Svar på opgave 303 (Oktober 2013)

Opgave:

Vis, at der for positive reelle tal *a*, *b* og *c* gælder

$$\frac{a}{2a+b}+\frac{b}{2b+c}+\frac{c}{2c+a}\le 1\,.$$

Besvarelse:

1. metode

Vi viser først, at der for reelle tal *a* og *b* og positive tal *x* og *y* gælder

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}\ge\frac{(a+b)^2}{x+y}\,. \qquad (1)$$

Uligheden er nemlig ved almindelig bogstavregning ensbetydende med

$$\frac{a^2y+b^2x}{xy}\ge\frac{(a+b)^2}{x+y} \quad\Leftrightarrow\quad \left(a^2y+b^2x\right)\cdot\left(x+y\right)\ge xy\cdot\left(a+b\right)^2$$

$$\Leftrightarrow\quad a^2xy+b^2x^2+a^2y^2+b^2xy \;\ge\; a^2xy+2abxy+b^2xy$$

$$\Leftrightarrow\quad a^2y^2+b^2x^2\ge 2abxy \quad\Leftrightarrow\quad \left(ay-bx\right)^2\ge 0\,,$$

hvilket er sandt. Lighedstegnet gælder netop hvis $ay - bx = 0$, dvs. $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}$.

Dernæst viser vi, at der for reelle tal *a*, *b* og *c* og positive tal *x*, *y* og *z* gælder

$$\frac{a^2}{x^2}+\frac{b^2}{y^2}+\frac{c^2}{z^2}\;\ge\;\frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}\,. \qquad (2)$$

Ved brug af (1) har vi nemlig

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\;\ge\;\frac{(a+b)^2}{x+y}+\frac{c^2}{z}\,,$$

og benyttes (1) endnu en gang, er

$$\frac{(a+b)^2}{x+y}+\frac{c^2}{z}\;\ge\;\frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}\,.$$

Lighedstegnet gælder netop hvis $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}$.

Nu ser vi på den givne ulighed. Vi omskriver den således:

$$\frac{2a+b-b}{2a+b}+\frac{2b+c-c}{2b+c}+\frac{2c+a-a}{2c-a}\le 2 \quad\Leftrightarrow\quad 1-\frac{b}{2a+b}+1-\frac{c}{2b+c}+1-\frac{a}{2c-a}\le 2$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{b}{2a+b}+\frac{c}{2b+c}+\frac{a}{2c+a}\ge 1 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{a^2}{a^2+2ac}+\frac{b^2}{b^2+2ab}+\frac{c^2}{c^2+2bc}\ge 1\,.$$

Her bruger vi uligheden (2), så vi får

$$\frac{a^2}{a^2+2ac}+\frac{b^2}{b^2+2ab}+\frac{c^2}{c^2+2bc} \geq \frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc} = \frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)^2} = 1 .$$

Dermed er det ønskede bevist.

2. metode

Vi bruger brutal algebra og ganger med fællesnævneren:

$$\frac{a}{2a+b}+\frac{b}{2b+c}+\frac{c}{2c+a} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \quad a(2b+c)(2c+a)+b(2c+a)(2a+b)+c(2a+b)(2b+c) \leq (2a+b)(2b+c)(2c+a)$$

$$\Leftrightarrow \quad 3abc-a^2c-b^2a-c^2b \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad ab(c-b)+bc(a-c)+ca(b-a) \leq 0 \ . \qquad (1)$$

På grund af symmetrien kan vi antage, at $a \leq b \leq c$. Vi har, at

$$bc(a - c) = bc(a - b + b - c) = bc(a - b) + bc(b - c) \ ,$$

så (1) er ensbetydende med

$$ab(c - b) + bc(a - b) + bc(b - c) + ca(b - a) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad bc(c - b) - ab(c - b) + bc(b - a) - ca(b - a) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (c - b)(bc - ab) + (b - a)(bc - ca) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad b(c - b)(c - a) + c(b - a)(b - a) \geq 0 \ .$$

Denne ulighed er sandt, fordi alle seks faktorer er ikke-negative.

3. metode

Vi får, at

$$\frac{a}{2a+b}+\frac{b}{2b+c}+\frac{c}{2c+a} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2+\frac{b}{a}}+\frac{1}{2+\frac{c}{b}}+\frac{1}{2+\frac{a}{c}} \leq 1 \ .$$

Vi sætter

$$x=\frac{b}{a} \ , \ y=\frac{c}{b} \ , \ z=\frac{a}{c} \ ,$$

så $xyz = 1$. Uligheden får nu udseendet

$$\frac{1}{2+x}+\frac{1}{2+y}+\frac{1}{2+z} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \quad (2 + y)(2 + z) + (2 + z)(2 + x) + (2 + x)(2 + y) \leq (2 + x)(2 + y)(2 + z)$$

$$\Leftrightarrow \quad 12 + 4x + 4y + 4z + xy + yz + xz \leq 8 + 4y + 4z + 4x + 2yz + 2xy + 2xz + xyz$$

$$\Leftrightarrow \quad 12 \leq 8 + xy + xz + yz + xyz \quad \Leftrightarrow \quad 4 \leq xy + yz + xz + 1$$

$$\Leftrightarrow \quad xy + xz + yz \geq 3 \ . \qquad (2)$$

Uligheden mellem aritmetisk og geometrisk middeltal anvendes på tallene xy, yz og xz:

$$\frac{xy+yz+xz}{3} \geq \sqrt[3]{xy\cdot yz\cdot xz} \quad \Leftrightarrow \quad xy+yz+xz \geq 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2} = 3.$$

Dermed er (2) opfyldt.

4. metode

Som under 2. metode fås, at

$$3abc - a^2c - b^2a - c^2b \ \le \ 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3abc \le \ a^2c + b^2a + c^2b \ .$$

Uligheden mellem aritmetisk og geometrisk middeltal giver

$$\frac{a^2c + b^2a + c^2b}{3} \ \ge \sqrt[3]{a^2c \cdot b^2a \cdot c^2b} \quad \Leftrightarrow \quad a^2c + b^2a + c^2b \ge abc \ ,$$

hvilket er det ønskede.