# Svar på opgave 302 (September 2013)

## *Opgave:*

Hvor mange løsninger har ligningen

$$x^2 + y^2 + 2013^2 = (x + y + 2013)^2$$

når $x$ og $y$ er hele tal?

## *Besvarelse:*

Vi omskriver ligningen til

$$x^2 + y^2 + 2013^2 = x^2 + y^2 + 2013^2 + 2xy + 4026x + 4026y$$

$$\Leftrightarrow \quad 2xy + 4026x + 4026y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad xy + 2013x + 2013y = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad xy + 2013x + 2013y + 2013^2 = 2013^2 \quad \Leftrightarrow \quad (x + 2013)(y + 2013) = 2013^2 \ .$$

Nu er 2013 = $3\cdot 11\cdot 61$, så vi kan skrive ligningen sådan:

$$(x + 2013)(y + 2013) = 3\cdot 3\cdot 11\cdot 11\cdot 61\cdot 61$$

Ved lidt systematisk opskrivning (ikke uoverkommeligt) finder vi, at de to faktorer $x + 2013$ og $y + 2013$ kan have værdier som følgende:

$1\cdot 2013$ og omvendt, dvs. 2 muligheder

$3\cdot(3\cdot 11^2\cdot 61^2)$ , $11\cdot(3^2\cdot 11\cdot 61^2)$ , $61\cdot(3^2\cdot 11^2\cdot 61)$ og omvendt, dvs. 6 muligheder

$3^2\cdot(11^2\cdot 61^2)$ , $11^2\cdot(3^2\cdot 61^2)$ , $61^2\cdot(3^2\cdot 11^2)$ og omvendt, dvs. 6 muligheder

$(3\cdot 11)\cdot(3\cdot 11\cdot 61^2)$ , $(3\cdot 61)\cdot(3\cdot 11^2\cdot 61)$ , $(11\cdot 61)\cdot(3^2\cdot 11\cdot 61)$ og omvendt, 6 muligheder

$(3^2\cdot 11)\cdot(11\cdot 61^2)$ , $(3^2\cdot 61)\cdot(11^2\cdot 61)$ , $(3\cdot 11^2)\cdot(3\cdot 61^2)$ og omvendt, dvs. 6 muligheder

$(3\cdot 11\cdot 61)\cdot(3\cdot 11\cdot 61)$ : 1 mulighed

Dette giver 27 løsninger.

Vi medregner desuden de negative muligheder, så det samlede antal løsninger er dermed 54.