Svar på opgave 298 (Marts 2013)

Opgave:

Løs følgende ligningssystem inden for de reelle tal:

$$2x^2 = 14 + yz$$
$$2y^2 = 14 + xz$$
$$2z^2 = 14 + xy$$

Besvarelse:

Vi deler op i tre tilfælde.

I. *Hvis de tre ubekendte har samme værdi, dvs.* $x = y = z$, er

$$2x^2 = 14 + x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{14} \ ,$$

så vi får løsningerne

$$(x\ ,\ y\ ,\ z)\ :\ \left(\sqrt{14}, \sqrt{14}, \sqrt{14}\right)\ ,\ \left(-\sqrt{14}, -\sqrt{14}, -\sqrt{14}\right)\ .$$

II. *Hvis to af de tre ubekendte har samme værdi, mens den tredje er forskellig fra denne værdi*, kan vi på grund af symmetrien mellem de variable antage, at $y = z$ og at $x \neq y$. Vi får så systemet

$$2x^2 = 14 + y^2$$
$$2y^2 = 14 + xy$$
$$2y^2 = 14 + xy\ .$$

Vi trækker den anden ligning fra den første:

$$2x^2 - 2y^2 = y^2 - xy \quad \Leftrightarrow \quad 2(x + y)(x - y) = y(y - x)\ .$$

Division med $x - y$ (som ikke er 0) giver

$$2x + 2y = -y \quad \Leftrightarrow \quad y = -\tfrac{2}{3}x\ .$$

Indsættelse i den første ligning giver

$$2x^2 = 14 + \frac{4}{9}x^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{14}{9}x^2 = 14 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 3\ .$$

Hvis $x = 3$, får vi

$$y = -\tfrac{2}{3}x = -2$$

og da $y = z$ får vi løsningen $(x,y,z) = (3,-2,-2)$.
På grund af symmetrien får vi desuden løsningerne (-2,3,-2) og (-2,-2,3).

Hvis $x = -3$ får vi løsningen $(x,y,z) = (-3,2,2)$. Symmetrien giver desuden (2,-3,2) og (2,2,-3).

III. *Antag endelig at x, y og z er parvis forskellige*.

Subtraktion af den anden ligning fra den første giver

$$2x^2 - 2y^2 = yz - xz \quad \Leftrightarrow \quad 2(x + y)(x - y) = z(y - x) \quad \Leftrightarrow \quad 2x + 2y + z = 0 \ . \qquad (1)$$

Ved subtraktion af den tredje ligning fra den anden får vi

$$2y^2 - 2z^2 = xz - xy \quad \Leftrightarrow \quad 2(y + z)(y - z) = x(z - y) \quad \Leftrightarrow \quad x + 2y + 2z = 0 \ . \qquad (2)$$

Trækker vi (2) fra (1) får vi

$$2x + 2y + z - x - 2y - 2z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x - z = 0 \ ,$$

hvilket er i strid med forudsætningen om, at de tre ubekendte er parvis forskellige.

I alt har vi fundet 8 løsninger til ligningssystemet.