Svar på opgave 297 (Februar 2013)

Opgave:

Bestem alle hele tal n, så $\sqrt{n+12\sqrt{5}} - \sqrt{n-12\sqrt{5}}$ er et helt tal.

Besvarelse:

1. metode
Antag, at der findes et helt tal k, så

$$\sqrt{n+12\sqrt{5}} - \sqrt{n-12\sqrt{5}} = k \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{n+12\sqrt{5}} = k + \sqrt{n-12\sqrt{5}} \ .$$

Kvadrering giver

$$n+12\sqrt{5} = k^2 + 2k\sqrt{n-12\sqrt{5}} + n - 12\sqrt{5} \quad \Leftrightarrow \quad 2k\sqrt{n-12\sqrt{5}} = 24\sqrt{5} - k^2 \ .$$

Endnu en kvadrering giver

$$4k^2\left(n-12\sqrt{5}\right) = k^4 - 48k^2\sqrt{5} + 5\cdot 24^2 \quad \Leftrightarrow \quad 4k^2n = k^4 + 5\cdot 24^2$$
$$\Leftrightarrow \quad k^2\left(4n-k^2\right) = 5\cdot 24^2 \ .$$

Så går k^2 op i $5\cdot 24^2$ og altså går k^2 op i 24^2, så k går op i 24. Derfor findes et helt tal m, så $km = 24$. Så er

$$4k^2n = k^4 + 5k^2m^2 \quad \Leftrightarrow \quad 4n = k^2 + 5m^2 \qquad (1)$$

Da $km = 24$ er et af tallene k og m lige. Af (1) følger, at det er umuligt at et af dem er lige og det andet ulige. Derfor er de begge lige, så vi har mulighederne $k = 2, 4, 6, 12$ eller 24. De tilhørende værdier af n fås sådan:

$k = 2$: $4(4n - 4) = 5\cdot 24^2 \quad \Leftrightarrow \quad 16(n - 1) = 5\cdot 24^2 \quad \Leftrightarrow \quad n = 181$

$k = 4$: $16(4n - 16) = 5\cdot 24^2 \quad \Leftrightarrow \quad 64(n - 4) = 5\cdot 24^2 \quad \Leftrightarrow \quad n = 49$

$k = 6$: $36(4n - 36) = 5\cdot 24^2 \quad \Leftrightarrow \quad 144(n - 9) = 5\cdot 24^2 \quad \Leftrightarrow \quad n = 29$

$k = 12$: $144(4n - 144) = 5\cdot 24^2 \quad \Leftrightarrow \quad 576(n - 36) = 5\cdot 24^2 \quad \Leftrightarrow \quad n = 41$

$k = 24$: $576(4n - 576) = 5\cdot 24^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2304(n - 144) = 5\cdot 24^2 \quad \Leftrightarrow \quad n = 145{,}25$.

Muligheden $k = 12$, $n = 41$ forkastes, fordi

$$\sqrt{41+12\sqrt{5}} < 12 \ .$$

Vi kontrollerer de øvrige muligheder:

***n* = 181**

Vi finder, at

$$\sqrt{181+12\sqrt{5}} = 1 + 6\sqrt{5} \quad \text{og} \quad \sqrt{181-12\sqrt{5}} = 6\sqrt{5} - 1$$

og forskellen er 2.

***n* = 49**

Her er

$$\sqrt{49+12\sqrt{5}} = 2+3\sqrt{5} \quad \text{og} \quad \sqrt{49-12\sqrt{5}} = 3\sqrt{5}-2$$

og forskellen er 4.

***n* = 29**

Vi får

$$\sqrt{29+12\sqrt{5}} = 3+2\sqrt{5} \quad \text{og} \quad \sqrt{29-12\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}-3$$

og forskellen er 6.

De søgte værdier af *n* er derfor 29, 49 og 181.

Bemærkning. Tallene 29, 49 og 181 opstår desuden ad en anden vej. Hvis vi skriver

$$\sqrt{n+12\sqrt{5}} = a+b\sqrt{5} \quad \text{eller} \quad n+12\sqrt{5} = \left(a+b\sqrt{5}\right)^2$$

får vi

$$n+12\sqrt{5} = a^2+5b^2+2ab\sqrt{5}$$

hvoraf

$$a^2+5b^2 = n \quad \text{og} \quad ab = 6 \ .$$

Dette giver følgende muligheder:

$$(a,b) = (1,6) \ : \quad n = 1^2+5\cdot 6^2 = 181$$
$$(a,b) = (2,3) \ : \quad n = 2^2+5\cdot 3^2 = 49$$
$$(a,b) = (3,2) \ : \quad n = 3^2+5\cdot 2^2 = 29$$
$$(a,b) = (6,1) \ : \quad n = 6^2+5\cdot 1^2 = 41 \ .$$

Disse værdier kontrolleres og vi finder, at n = 41 ikke er en løsning.

2. metode

Vi sætter

$$a = \sqrt{n+12\sqrt{5}} - \sqrt{n-12\sqrt{5}} \ .$$

Kvadrering giver, at

$$a^2 = 2n - 2\sqrt{n^2-720} \ ,$$

og endnu en kvadrering:

$$4(n^2-720) = a^4+4n^2-4na^2 \quad \Leftrightarrow \quad n = \frac{a^4+2880}{4a^2} \ .$$

Vi ser, at *a* må være lige, så vi sætter $a = 2b$ og får

$$n = b^2 + \frac{180}{b^2} \ .$$

Da *n* er et helt tal, er de mulige værdier af *b* og *n*:

$$(b,n) \ : \ (1,181) \ , \ (2,49) \ , \ (3,29) \ , \ (6,41) \ .$$

Prøve giver, at n = 29, 49 og 181 er løsninger.