# Svar på opgave 296 (Januar 2013)

## *Opgave:*

**a.** Vis, at $n^{19} - n^7$ er delelig med 30 for alle naturlige tal $n$.

**b.** Vis, at $n^4 - 14n^3 + 35n^2 + 50n$ er delelig med 24 for alle naturlige tal $n$.

**c.** Vis, at $n^2 + 11n + 2$ *ikke* er delelig med 12769 for noget naturligt $n$.

## *Besvarelse:*

**a.** Vi sætter

$$P = n^{19} - n^7 ,$$

og får opløsningen

$$P = n^7(n^{12} - 1) = n^7(n^6 + 1)(n^6 - 1)$$
$$= n^7(n^6 + 1)(n^3 + 1)(n^3 - 1) = n^4(n^6 + 1)(n^3 - 1)n^3(n^3 - 1) .$$

Her er tallene $n^3 - 1$, $n^3$ og $n^3 + 1$ konsekutive, så et af dem er deleligt med 3 og mindst et af dem med 2. Altså er $P$ delelig med 6.

Vi ser derefter på følgende opløsning:

$$P = n^7(n^{12} - 1) .$$

Nu er

$$n^{12} - 1 = (n^4 - 1)(n^8 + n^4 + 1) ,$$

så

$$P = n^7(n^4 - 1)(n^8 + n^4 + 1) = n^7(n^2 - 1)(n^2 + 1)(n^8 + n^4 + 1)$$
$$= n^7(n^2 + 1)(n + 1)(n - 1)(n^4 - n^2 + 1)(n^4 + n^2 + 1)$$
$$= n^7(n^2 + 1)(n + 1)(n - 1)(n^4 - n^2 + 1)(n^2 - n + 1)(n^2 + n + 1) .$$

Hvis hverken $n$, $n + 1$ eller $n - 1$ er delelige med 5, må $n$ være af formen $n = 5k \pm 2$, og dermed er

$$n^2 + 1 = (5k \pm 2)^2 + 1 = 25k^2 \pm 20k + 5$$

delelig med 5.

$P$ er derfor delelig med både 6 og med 5 og derfor med 30.

**b.** Vi finder opløsningen

$$Q = n^4 - 14n^3 + 35n^2 + 50n = n(n + 1)(n - 5)(n - 10) .$$

Her er $n$ eller $n + 1$ lige, så $Q$ er delelig med 2.

Hvis $n$ er lige, er $n - 10$ lige, og da disse to faktorer har en forskel på 10, er en af dem delelig med 4. Derfor er $Q$ delelig med 8.

Hvis n er ulige, er $n + 1$ og $n - 5$ lige, og da deres forskel er 6, er et af dem delelig med 4, så $Q$ igen er delelig med 8.

Hvis $n$ eller $n + 1$ er delelig med 3, er vi færdige. Hvis dette ikke er tilfældet, er $n = 3k + 1$ og dermed $n - 10 = 3k - 9$ delelig med 3.

I alle tilfælde er $Q$ delelig med 3, og da $Q$ i forvejen er delelig med 8, er $Q$ delelig med 24.

**c.**

*1. metode.*

Vi har, at $12769 = 113^2$ og får

$$n^2 + 11n + 2 = (n - 51)(n + 62) + 28 \cdot 113 \ .$$

Hvis $n^2 + 11n + 2$ er delelig med $113^2$, er det deleligt med 113 og derfor må tallet $(n - 51)(n + 62)$ være deleligt med 113. Da 113 er et primtal, må $n - 51$ eller $n + 62$ eller begge være delelige med 113. Da forskellen

$$n + 62 - (n - 51) = 113 \ ,$$

er begge tal delelige med 113, så $(n - 51)(n + 62)$ er delelig med $113^2$. Vi må kræve, at $n - 51$ er et multiplum af 113, så vi sætter

$$n = 51 + 113k$$

og får

$$n^2 + 11n + 2 = (51 + 113k)^2 + 11(51 + 113k) + 2 = 113^2 \cdot k^2 + 113^2 \cdot k + 3164 \ ,$$

og dette tal er ikke deleligt med $113^2$ for nogen værdi af $k$.

*2. metode.*

Vi har, at

$$n^2 + 11n + 2 = (n + 62)^2 - 113(n + 34) \ .$$

Antag, at $n^2 + 11n + 2$ er delelig med $113^2$. Så må højre side være delelig med $113^2$ og dermed med 113. Altså er $(n + 62)^2$ delelig med 113, så $n + 62$ er delelig med 113. Men også $n + 34$ skal være delelig med 113 og disse krav er umulige.

*3. metode.*

Hvis udtrykket var deleligt med $113^2$, kunne vi skrive

$$n^2 + 11n + 2 = 113^2 \cdot k \quad \Leftrightarrow \quad n^2 + 11n + 2 - 113^2 \cdot k = 0$$

hvor $k$ er et naturligt tal. Diskriminanten er

$$d = 11^2 - 4 \cdot (2 - 113^2 \cdot k) = 121 - 8 + 4 \cdot 113^2 \cdot k = 113 \cdot (1 + 4 \cdot 113 \cdot k) \ .$$

Her skal $d$ være et kvadrattal, så $1 + 4 \cdot 113 \cdot k$ skal være deleligt med 113. Men 113 går ty- deligvis ikke op i $1 + 4 \cdot 113 \cdot k$. Derfor er udtrykket ikke deleligt med $113^2$.