Svar på opgave 295 (December 2012)

Opgave:

Bestem alle positive hele tal n, så $n^2 + n + 2012$ er et kvadrattal.

Besvarelse:

Antag, at $n^2 + n + 2012$ er et kvadrattal.
Så er

$$n^2 + n + 2012 = (n + d)^2 \ ,$$

hvor $d \geq 1$.
Ligningen giver

$$n^2 + n + 2012 = n^2 + d^2 + 2nd \quad \Leftrightarrow \quad n(2d - 1) = 2012 - d^2 \ . \tag{1}$$

Altså er $d^2 < 2012$ så $d < 45$. Vi ser af (1), at $2d - 1$ går op i $2012 - d^2$ og dermed går $2d - 1$ også op i $4 \cdot (2012 - d^2) = 8048 - 4d^2$.

Tallet $2d - 1$ går også op i $(2d - 1)(2d + 1) = 4d^2 - 1$, så $2d - 1$ går op i summen af de to tal, dvs. i

$$8048 - 4d^2 + 4d^2 - 1 = 8047 = 13 \cdot 619 \ .$$

Da 13 og 619 er primtal, må $2d - 1$ være et af tallene 1, 13, 619 eller 8047. Da $d < 45$, har vi mulighederne

$$2d - 1 = 1 \quad \text{eller} \quad 2d - 1 = 13$$

dvs.

$$d = 1 \quad \text{eller} \quad d = 7 \ .$$

Efter (1) er

$$n = \frac{2012 - d^2}{2d - 1} \ ,$$

så $d = 1$ og $d = 7$ giver

$$n = \frac{2012 - 1}{2} = 2011 \quad \text{og} \quad n = \frac{2012 - 49}{13} = 151 \ .$$

Vi kontrollerer:

$$n = 2011 \ : \quad n^2 + n + 1 = 2011^2 + 2011 + 2012 = 4048144 = 2012^2$$

$$n = 151 \ : \quad n^2 + n + 1 = 151^2 + 151 + 2012 = 24964 = 158^2 \ .$$

I almindelighed er $n^2 + n + a$ et kvadrattal for $n = a - 1$, idet

$$(a - 1)^2 + (a - 1) + a = a^2 - 2a + 1 + a - 1 + a = a^2 \ ,$$

så hvis $a = 2012$ kan vi sige, at $n = 2011$ er en triviel løsning til opgaven.