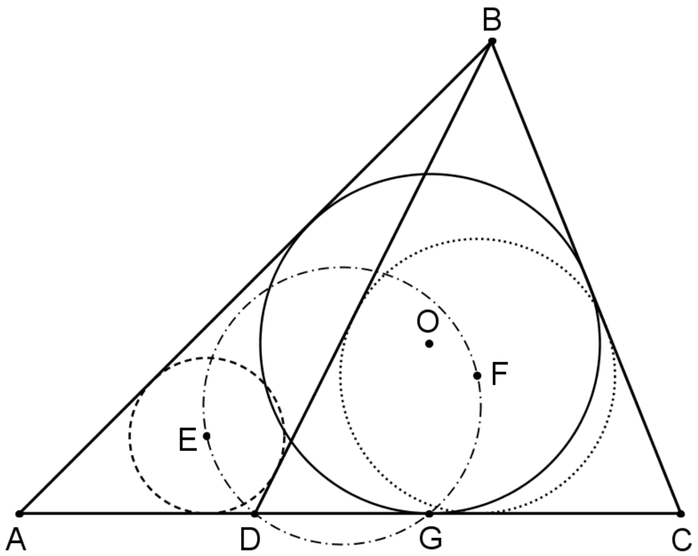
Svar på opgave 294 (November 2012)

Opgave:

I ΔABC er D et punkt på AC. De indskrevne cirkler i ΔABC, ΔABD og ΔBCD har centrer i O, E og F. Punktet G er røringspunkt på AC for den indskrevne cirkel i ΔABC.

Vis, at punkterne D, E, F og G ligger på en cirkel.



Besvarelse:

Da DE og DF er vinkelhalveringslinjer for vinklerne BDA og BDF, er $DE \perp DF$. Lad I være midtpunkt af EF og K projektionen af I på AC. Desuden er røringspunkterne på AB benævnt S og V, på BC er de T og X og på BD er røringspunkterne P og Q. Desuden er projektionen af E og F på AC punkterne M og H.

Vi benytter, at en tangentvinkels ben er lige lange, så vi får regningerne:

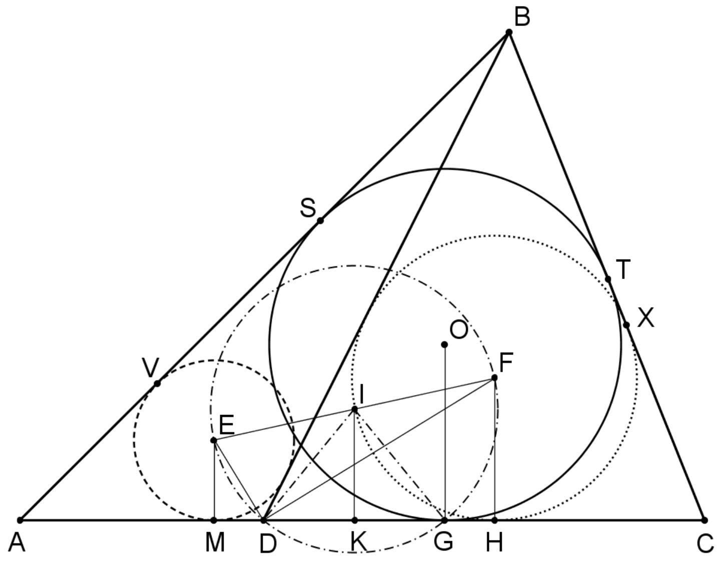
$$BS = BT \iff BV - VS = BX - TX \iff BQ - VS = BP - TX$$

$$\iff BP + PQ - VS = BP - TX \iff PQ - VS = -TX \iff PQ + TX = VS$$

$$\iff PD - DQ + GH = MG \iff PD - DQ + GH = MD + DG$$

$$\iff PD - DQ + GH = DQ + DH - GH \iff 2GH = 2DQ$$

$$\iff GH = DQ \iff GH = DM.$$



Da I er midtpunkt af EF, er projektionen K midtpunkt af MH.

Da $GH = DM$, er K også midtpunkt af DG, så ΔDIG er ligebenet med $ID = IG$.

Da I er midtpunkt af hypotenusen i ΔEDF, er $ID = IE = IF$.

Dermed har vi, at $ID = IG = IE = IF$, så I er centrum for en cirkel gennem D, E, F og G.