Svar på opgave 293 (Oktober 2012)

Opgave:

Find reelle tal a, b, c, d og e i intervallet [-2;2], der opfylder ligningerne

$$a + b + c + d + e = 0$$
$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + e^3 = 0$$
$$a^5 + b^5 + c^5 + d^5 + e^5 = 10$$

Besvarelse:

Vi har, at tallene $\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}b, \frac{1}{2}c, \frac{1}{2}d, \frac{1}{2}e$ ligger i intervallet [-1;1], så vi kan sætte

$$a = 2\cos x \ \ , \ \ b = 2\cos y \ \ , \ \ c = 2\cos z \ \ , \ \ d = 2\cos t \ \ , \ \ e = 2\cos u .$$

Nu er som bekendt

$$\cos 5v = 16\cos^5 v - 20\cos^3 v + 5\cos v$$

hvoraf

$$2\cos 5v = (2\cos v)^5 - 5(2\cos v)^3 + 5 \cdot 2\cos v \ \ ,$$

så

$$2\cos 5x = a^5 - 5a^3 + 5a \ , \qquad (1)$$

og analoge formler for $2\cos 5y$, $2\cos 5z$, $2\cos 5t$ og $2\cos 5u$. Ved addition af disse formler fås

$$2\cos 5x + 2\cos 5y + 2\cos 5z + 2\cos 5t + 2\cos 5u$$
$$= a^5 + b^5 + c^5 + d^5 + e^5 - 5(a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + e^3) + 5(a + b + c + d + e)$$
$$= 10 - 5 \cdot 0 + 5 \cdot 0 = 10 \ ,$$

hvoraf

$$\cos 5x + \cos 5y + \cos 5z + \cos 5t + \cos 5u = 5 \ .$$

Men så må

$$\cos 5x = \cos 5y = \cos 5z = \cos 5t = \cos 5u = 1 \ ,$$

så vi af (1) får

$$a^5 - 5a^3 + 5a = 2 \quad \Leftrightarrow \quad a^5 - 5a^3 + 5a - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (a - 2)(a^2 + a - 1)^2 = 0 \ \ ,$$

og samme ligning for b, c, d og e. Altså gælder

$$a, b, c, d, e \in \left\{2, \ \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{-\sqrt{5}-1}{2}\right\} \ .$$

Efter ligningen

$$a + b + c + d + e = 0$$

er et af tallene 2, to af dem er $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ og de sidste to er $\frac{-\sqrt{5}-1}{2}$, fordi

$$2 + \frac{\sqrt{5}-1}{2} + \frac{\sqrt{5}-1}{2} + \frac{-\sqrt{5}-1}{2} + \frac{-\sqrt{5}-1}{2} = 0 \quad .$$

Desuden finder vi

$$2^3+\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^3+\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^3+\left(\frac{-\sqrt{5}-1}{2}\right)^3+\left(\frac{-\sqrt{5}-1}{2}\right)^3$$

$$=8+2\left(\sqrt{5}-2\right)+2\left(-\sqrt{5}-2\right)=0\ .$$