Svar på opgave 292 (September 2012)

Opgave:

a. Med $(11111)_n$ betegner vi det tal i n-talsystemet, der skrives med fem 1-taller. Bestem samtlige værdier af n, for hvilke $(11111)_n$ er et kvadrattal.

b. Findes der kvadrattal, der skrives med lutter 1-taller, dvs. findes der kvadrattal i følgen

$$1 , 11 , 111 , 1111 , 11111 , \dots \ ?$$

Besvarelse:

a.

Vi sætter $T = (11111)_n$ og får, at

$$T = n^4 + n^3 + n^2 + n + 1.$$

Hvis $n = 2$, er

$$T = 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2 + 1 = 31 ,$$

som ikke er et kvadrattal. For $n = 3$ er

$$T = 3^4 + 3^3 + 3^2 + 3 + 1 = 121 = 11^2 ,$$

som er et kvadrattal. Derefter deler vi op i to tilfælde.

I. n er lige.

Her er tallene $n^2 + \frac{n}{2}$ og $n^2 + \frac{n}{2} + 1$ konsekutive hele tal. Vi får, at

$$\left(n^2 + \frac{n}{2}\right)^2 = n^4 + n^3 + \frac{n^2}{4} < n^4 + n^3 + n^2 + n + 1$$

og

$$\left(n^2 + \frac{n}{2} + 1\right)^2 = n^4 + n^3 + \frac{9n^2}{4} + n + 1 > n^4 + n^3 + n^2 + n + 1.$$

I alt har vi fundet, at

$$\left(n^2 + \frac{n}{2}\right)^2 < n^4 + n^3 + n^2 + n + 1 < \left(n^2 + \frac{n}{2} + 1\right)^2 .$$

Da T altså ligger mellem to konsekutive kvadrattal, er T ikke selv et kvadrattal.

II. n er ulige og $n \geq 5$.

Her er tallene $n^2 + \frac{n}{2} - \frac{1}{2}$ og $n^2 + \frac{n}{2} + \frac{1}{2}$ konsekutive hele tal. Vi får, at

$$\left(n^2 + \frac{n}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 = n^4 + n^3 - \frac{3n^2}{4} - \frac{n}{2} + \frac{1}{4} < n^4 + n^3 + n^2 + n + 1 .$$

Den sidste ulighed er nemlig ensbetydende med

$$-\frac{3n^2}{4}-\frac{n}{2}+\frac{1}{4}<n^2+n+1 \iff -3n^2-2n+1<4n^2+4n+4 \iff 7n^2+6n+3>0 ,$$

hvilket er sandt.

På den anden side er

$$\left(n^2+\tfrac{n}{2}+\tfrac{1}{2}\right)^2=n^4+n^3+\tfrac{5n^2}{4}+\tfrac{n}{2}+\tfrac{1}{4} \;>\; n^4+n^3+n^2+n+1 .$$

Den sidste ulighed er nemlig ensbetydende med

$$\frac{5n^2}{4}+\frac{n}{2}+\frac{1}{4}>n^2+n+1 \iff 5n^2+2n+1>4n^2+4n+4 \iff n^2-2n-3>0 \iff (n-3)(n-1)>0,$$

hvilket er sandt.

I alt har vi nu

$$\left(n^2+\tfrac{n}{2}-\tfrac{1}{2}\right)^2 \;<\; n^4+n^3+n^2+n+1 \;<\; \left(n^2+\tfrac{n}{2}+\tfrac{1}{2}\right)^2 \;.$$

Igen ligger T mellem to konsekutive kvadrattal og er altså ikke selv et kvadrattal.

Dermed er $n = 3$ den eneste værdi af n, for hvilken $n^4 + n^3 + n^2 + n + 1$ er et kvadrattal.

b.

Svaret er nej.

Vi kan nemlig skrive

$$\underbrace{1111\ldots11}_{n\text{ 1-taller}} \;=\; \underbrace{111\ldots11}_{n\text{ - 2 1-taller}}00 + 11 \;=\; 10^2\cdot\underbrace{111\ldots11}_{n\text{ - 2 1-taller}} + 11$$

$$4\cdot(25\cdot\underbrace{111\ldots11}_{n\text{ - 2 1-taller}} + 2) + 3 = 4k + 3 \;\equiv\; 3 \pmod 4 .$$

Nu er ethvert kvadrattal kongruent med 0 eller 1 modulo 4, fordi

$$(2n)^2 = 4n^2 \quad \text{og} \quad (2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 .$$

Altså er 111…11 ikke et kvadrattal.