Svar på opgave 291 (August 2012)

Opgave:

Vis, at der for positive tal a, b, c og d gælder

$$\frac{a}{b+2c+d}+\frac{b}{c+2d+a}+\frac{c}{d+2a+b}+\frac{d}{a+2b+c}\geq 1 \, .$$

Besvarelse:

1. metode:

Vi har, at der for positive tal u, v, x og y gælder

$$\frac{u}{x}+\frac{v}{y}\geq \frac{4(uy+vx)}{(x+y)^2} \, ,$$

fordi denne ulighed er ensbetydende med

$$\frac{uy+vx}{xy}\geq \frac{4(uy+vx)}{(x+y)^2} \iff \frac{1}{xy}\geq \frac{4}{(x+y)^2} \iff (x+y)^2\geq 4xy \iff (x-y)^2\geq 0 \, ,$$

hvilket er sandt.

Vi benytter dette og får

$$\frac{a}{b+2c+d}+\frac{c}{d+2a+b}\geq \frac{4\big(a(d+2a+b)+c(b+2c+d)\big)}{(b+2c+d+d+2a+b)^2}$$

$$\iff \frac{a}{b+2c+d}+\frac{c}{d+2a+b}\geq \frac{4\left(ad+2a^2+ab+bc+2c^2+cd\right)}{4(a+b+c+d)^2} \, ,$$

og på samme måde:

$$\frac{b}{c+2d+a}+\frac{d}{a+2b+c}\geq \frac{4\big(b(a+2b+c)+d(c+2d+a)\big)}{(c+2d+a+a+2b+c)^2}$$

$$\iff \frac{b}{c+2d+a}+\frac{d}{a+2b+c}\geq \frac{4\left(ab+2b^2+bc+cd+2d^2+ad\right)}{4(a+b+c+d)^2} \, .$$

Addition giver

$$\frac{a}{b+2c+d}+\frac{b}{c+2d+a}+\frac{c}{d+2a+b}+\frac{d}{a+2b+c}\geq \frac{4\left(2a^2+2b^2+2c^2+2d^2+2ab+2ad+2bc+2cd\right)}{4(a+b+c+d)^2}$$

$$=\frac{(a+b+c+d)^2+\left(a^2+b^2+c^2+d^2-2ac-2bd\right)}{(a+b+c+d)^2}=1+\frac{(a-c)^2+(b-d)^2}{(a+b+c+d)^2}\geq 1 \, .$$

Lighedstegnet i uligheden gælder netop hvis $a = c$ og $b = d$.

2. metode:

Vi minder om Cauchy-Schwarz' ulighed:

$$(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4)^2 \le (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)\cdot (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2)\ ,$$

hvor samtlige indgående tal er ikke-negative. Vi sætter

$$\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right) = \left(\sqrt{\frac{a}{b+2c+d}}\ ,\ \sqrt{\frac{b}{c+2d+a}}\ ,\ \sqrt{\frac{c}{d+2a+b}}\ ,\ \sqrt{\frac{d}{a+2b+c}}\right)$$

$$\left(y_1, y_2, y_3, y_4\right) = \left(\sqrt{a(b+2c+d)}\ ,\ \sqrt{b(c+2d+a)}\ ,\ \sqrt{c(d+2a+b)}\ ,\ \sqrt{d(a+2b+c)}\right)\ .$$

Så giver CS ulighed

$$(a+b+c+d)^2 \le \left(\frac{a}{b+2c+d} + \frac{b}{c+2d+a} + \frac{c}{d+2a+b} + \frac{d}{a+2b+c}\right)$$
$$\cdot\left(a(b+2c+d) + b(c+2d+a) + c(d+2a+b) + d(a+2b+c)\right)\ .$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{a}{b+2c+d} + \frac{b}{c+2d+a} + \frac{c}{d+2a+b} + \frac{d}{a+2b+c}$$
$$\ge \frac{\left(a+b+c+d\right)^2}{a(b+2c+d) + b(c+2d+a) + c(d+2a+b) + d(a+2b+c)}$$

Vi ønsker at vise, at

$$\frac{a}{b+2c+d} + \frac{b}{c+2d+a} + \frac{c}{d+2a+b} + \frac{d}{a+2b+c} \ge 1$$

så vi er færdige, hvis vi kan vise, at

$$\frac{\left(a+b+c+d\right)^2}{a(b+2c+d) + b(c+2d+a) + c(d+2a+b) + d(a+2b+c)} \ge 1.$$

Denne ulighed er ensbetydende med

$$(a+b+c+d)^2 \ge a(b+2c+d) + b(c+2d+a) + c(d+2a+b) + d(a+2b+c)$$
$$\Leftrightarrow \quad a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)$$
$$\ge 2ab + 4ac + 2ad + 2bc + 4bd + 2cd$$
$$\Leftrightarrow \quad a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \ge 2ac + 2bd$$
$$\Leftrightarrow \quad a^2 + c^2 - 2ac + b^2 + d^2 - 2bd \ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad (a-c)^2 + (b-d)^2 \ge 0\ ,$$

hvilket er sandt.