Svar på opgave 290 (Maj 2012)

Opgave:

Vis, at produktet af fire konsekutive naturlige tal ikke kan være lig med produktet af to konsekutive naturlige tal.

Besvarelse:

1. metode
Vi ser på de fire konsekutive naturlige tal $n - 1$, n, $n + 1$ og $n + 2$. Deres produkt er

$$P = (n - 1)(n + 2)\cdot n(n + 1) = (n^2 + n - 2)(n^2 + n) \ .$$

Produktet af to konsekutive naturlige tal er

$$Q = k(k + 1) \ .$$

Vi skal vise, at der ikke findes værdier af n og k, så $P = Q$. Vi deler op i en række tilfælde:

I. $k > n^2 + n$.

Her er

$$Q = k(k + 1) > (n^2 + n)(n^2 + n + 1) > (n^2 + n)(n^2 + n - 2) = P \ .$$

II. $k = n^2 + n$.

Her er

$$Q = k(k + 1) = (n^2 + n)(n^2 + n + 1) > (n^2 + n)(n^2 + n - 2) = P \ .$$

III. $k = n^2 + n -1$.

Her er

$$Q = k(k + 1) = (n^2 + n - 1)(n^2 + n) > (n^2 + n - 2)(n^2 + n) = P \ .$$

IV. $k = n^2 + n - 2$.

Her er

$$Q = k(k + 1) = (n^2 + n - 2)(n^2 + n - 1) < (n^2 + n - 2)(n^2 + n) = P \ .$$

V. $k = n^2 + n - 3$

Her er

$$Q = k(k + 1) = (n^2 + n - 3)(n^2 + n - 2) < (n^2 + n)(n^2 + n - 2) = P \ .$$

VI. $k < n^2 + n - 3$

Her er

$$Q = k(k + 1) < (n^2 + n - 3)(n^2 + n - 2) < (n^2 + n)(n^2 + n - 2) = P \ .$$

Dermed er beviset ført.

2. metode

Lad n være et naturligt tal og

$$T = n(n+1)(n+2)(n+3)\ .$$

Vi omskriver sådan:

$$T = n(n+3)(n+1)(n+2) = n(n+3)(n^2+3n+2) = n(n+3)(n(n+3)+2)\ .$$

T kan altså skrives på formen $T = N(N+2)$, hvor N er et naturligt tal.

Antag nu, at T også kunne skrives som produkt af to konsekutive tal, så T er på formen

$$T = M(M+1)\ ,$$

hvor M er et naturligt tal.

Altså har vi to naturlige tal M og N, der opfylder

$$N(N+2) = M(M+1).$$

Vi omformer dette således:

$$N(N+2) = M(M+1) \quad\Leftrightarrow\quad N^2 + 2N = M^2 + M \quad\Leftrightarrow\quad N^2 + 2N + 1 = M^2 + M + 1$$

$$\Leftrightarrow\quad 4N^2 + 8N + 4 = 4M^2 + 4M + 4 \quad\Leftrightarrow\quad (2N+2)^2 = (2M+1)^2 + 3$$

$$\Leftrightarrow\quad (2N+2)^2 - (2M+1)^2 = 3\ .$$

De eneste kvadrattal med en differens på 3 er tallene 4 og 1, så

$$(2N+2)^2 = 4 \quad \text{og} \quad (2M+1)^2 = 1\ .$$

Da N og M er positive, er $2N + 2 = 2$ og $2M + 1 = 1$, så $N = M = 0$ i strid med, at N og M er naturlige tal.

3. metode

Vi undersøger for naturlige tal x og y ligningen

$$x(x+1)(x+2)(x+3) = y(y+1) \quad\Leftrightarrow\quad 1 + 4(x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x) = 1 + 4y^2 + 4y$$

$$\Leftrightarrow\quad 4x^4 + 24x^3 + 44x^2 + 24x + 1 = (2y+1)^2\ .$$

Vi sætter

$$Q = 4x^4 + 24x^3 + 44x^2 + 24x + 1 = (2x^2 + 6x + 2)^2 - 3$$

Desuden er

$$Q = (2x^2 + 6x + 1)^2 + 4x^2 + 12x\ .$$

Altså er

$$(2x^2 + 6x + 1)^2 < Q = (2y+1)^2 = (2x^2 + 6x + 2)^2 - 3 < (2x^2 + 6x + 2)^2\ ,$$

hvoraf

$$2x^2 + 6x + 1 < 2y + 1 < 2x^2 + 6x + 2\ .$$

Dette er imidlertid umuligt, fordi det naturlige tal $2y + 1$ ikke kan ligge mellem to konsekutive naturlige tal.

Generalisering

Man kan spørge om, hvor tæt tallene P og Q kan ligge på hinanden. Fx er

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 24 \quad \text{og} \quad 4\cdot 5 = 20 \qquad , \qquad 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 120 \quad \text{og} \quad 10\cdot 11 = 110\ .$$

Desuden kan man undersøge generaliseringer

Kan et produkt af 5 konsekutive naturlige tal være lig med et produkt af to konsekutive tal? Af tre konsekutive?

Kan et produkt af p konsekutive naturlige tal og et produkt af q konsekutive naturlige tal være lig hinanden for visse værdier af p og q?