Svar på opgave 288 (Marts 2012)

Opgave:

a. Vis, at hvis x, y og z er reelle tal forskellige fra 0 og $x + y + z = 0$, så er

$$\frac{x^2+y^2}{x+y}+\frac{y^2+z^2}{y+z}+\frac{z^2+x^2}{z+x}=\frac{x^3}{yz}+\frac{y^3}{zx}+\frac{z^3}{xy} \quad .$$

b. Reducér brøken

$$a=\frac{x^4(y^2-z^2)+y^4(z^2-x^2)+z^4(x^2-y^2)}{x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)} \quad .$$

Besvarelse:

a. Da $x + y + z = 0$, er

$$x + y = -z \quad , \quad y + z = -x \quad , \quad z + x = -y \ ,$$

og dermed

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = z^2 - 2xy \quad , \quad y^2 + z^2 = x^2 - 2yz \quad , \quad z^2 + x^2 = y^2 - 2xz.$$

Den givne ligning kan derfor omformes til

$$\frac{z^2-2xy}{-z}+\frac{x^2-2yz}{-x}+\frac{y^2-2zx}{-y}=\frac{x^3}{yz}+\frac{y^3}{zx}+\frac{z^3}{xy}$$

$$\Leftrightarrow \quad -(x+y+z)+2\left(\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}\right)=\frac{x^3}{yz}+\frac{y^3}{zx}+\frac{z^3}{xy}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2xyz\left(\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}\right)=xyz\left(\frac{x^3}{yz}+\frac{y^3}{zx}+\frac{z^3}{xy}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x^2y^2+2y^2z^2+2z^2x^2=x^4+y^4+z^4 \ . \qquad (1)$$

Da $x + y + z = 0$, er

$$(x + y + z)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 + z^2 = -2(xy + yz + zx)$$

og kvadrering heraf giver

$$x^4 + y^4 + z^4 + 2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) = 4(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + 2xyz(x + y + z))$$

$$\Leftrightarrow \quad x^4 + y^4 + z^4 = 2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) \ ,$$

hvilket efter (1) er det ønskede.

b. Vi omskriver brøken til

$$a = \frac{x^4y^2 - x^4z^2 + y^4z^2 - y^4x^2 + z^4x^2 - z^4y^2}{x^2y - x^2z + y^2z - y^2x + z^2x - z^2y} = \frac{t}{n}$$

Det er praktisk at udtrykke tæller og nævner ved determinanter:

$$t = \begin{vmatrix} x^4 & y^4 & z^4 \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad , \quad n = \begin{vmatrix} x^2 & y^2 & z^2 \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad .$$

I tælleren *t* trækker vi 2. søjle fra 1. og 3. og får

$$t = \begin{vmatrix} x^4 - y^4 & y^4 & z^4 - y^4 \\ x^2 - y^2 & z^2 & z^2 - y^2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} x^4 - y^4 & z^4 - y^4 \\ x^2 - y^2 & z^2 - y^2 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} (x^2 - y^2)(x^2 + y^2) & (z^2 - y^2)(z^2 + y^2) \\ x^2 - y^2 & z^2 - y^2 \end{vmatrix} = - (x^2 - y^2)(z^2 - y^2) \cdot \begin{vmatrix} x^2 + y^2 & z^2 - y^2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= - (x^2 - y^2)(z^2 - y^2) \cdot (x^2 + y^2 - z^2 - y^2) = (y^2 - x^2)(z^2 - y^2)(x^2 - z^2) \quad .$$

I nævneren *n* går vi frem på same måde:

$$n = \begin{vmatrix} x^2 - y^2 & y^2 & z^2 - y^2 \\ x - y & y & z - y \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} x^2 - y^2 & z^2 - y^2 \\ x - y & z - y \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} (x - y)(x + y) & (z - y)(z + y) \\ x - y & z - y \end{vmatrix} = -(x - y)(z - y) \cdot \begin{vmatrix} x + y & z + y \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= - (x - y)(z - y)(x + y - z - y) = (y - x)(z - y)(x - z) \quad .$$

Altså er

$$a = \frac{(y^2 - x^2)(z^2 - y^2)(x^2 - z^2)}{(y - x)(z - y)(x - z)} = (y + x)(z + y)(x + z) \; .$$