

Svar på opgave 284 (November 2011)

Opgave:

Vis, at tallet

$$S = \frac{2}{3} + \frac{4}{5} + \frac{6}{7} + \dots + \frac{2008}{2009} + \frac{2010}{2011}$$

ikke er helt.

Besvarelse:

Vi sætter

$$S = \frac{2}{3} + \frac{4}{5} + \dots + \frac{2008}{2009} + \frac{2010}{2011} .$$

Summen S består af 1005 brøker, så vi skriver

$$1005 - S = \left(1 - \frac{2}{3}\right) + \left(1 - \frac{4}{5}\right) + \dots + \left(1 - \frac{2008}{2009}\right) + \left(1 - \frac{2010}{2011}\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2009} + \frac{1}{2011} .$$

Denne sum betegnes T :

$$T = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2009} + \frac{1}{2011} .$$

Nu er S et helt tal netop hvis T er hel.

Med M betegner vi produktet af alle ulige naturlige tal under 2011:

$$M = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots 2007 \cdot 2009 .$$

Hvis T er hel, er også $M \cdot T$ hel og vi får

$$M \cdot T = \frac{M}{3} + \frac{M}{5} + \dots + \frac{M}{2009} + \frac{M}{2011} .$$

Alle disse brøker bortset fra den sidste er hele tal. Den sidste brøk er ikke hel, fordi 2011 er et primtal, der ikke går op i M . Dermed er T ikke hel og S heller ikke hel.