Svar på opgave 283 (Oktober 2011)

Opgave:

Løs inden for de hele tal ligningssystemet

$$x^3 - 4x^2 - 16x + 60 = y$$
$$y^3 - 4y^2 - 16y + 60 = z$$
$$z^3 - 4z^2 - 16z + 60 = x$$

Besvarelse:

Opgave 283 er identisk med opgave 210 (maj 2004).
De løsningsmetoder, der dengang blev angivet, var dog noget anderledes end nedenstående.

1. metode
Vi omformer den første ligning sådan:

$$x^3 - 4x^2 - 16x + 60 = y \quad \Leftrightarrow \quad x^3 - 16x - 4x^2 + 64 = y + 4$$

$$\Leftrightarrow \quad x(x^2 - 16) - 4(x^2 - 16) = y + 4 \quad \Leftrightarrow \quad (x - 4)^2(x + 4) = y + 4 \ .$$

Analogt behandles de to andre ligninger. Vi har dermed systemet

$$(x - 4)^2(x + 4) = y + 4 \qquad (1)$$
$$(y - 4)^2(y + 4) = z + 4 \qquad (2)$$
$$(z - 4)^2(z + 4) = x + 4 \ . \qquad (3)$$

Vi ser straks, at $(x,y,z) = (-4,-4,-4)$ er en løsning.
Antag derfor, at $x \neq -4$. Så følger af (3), at da $x + 4 \neq 0$, er $z + 4 \neq 0$, og af (2) får vi, at da $z + 4 \neq 0$, er $y + 4 \neq 0$. Tilsvarende argumenteres, hvis $z \neq -4$ eller $y \neq -4$
Lad nu (x,y,z) være en løsning til ligningssystemet. Multiplikation af ligningerne giver (idet ingen af de variable har værdien -4):

$$(x - 4)^2(y - 4)^2(z - 4)^2(x + 4)(y + 4)(z + 4) = (x + 4)(y + 4)(z + 4)$$

$$\Leftrightarrow \quad (x - 4)^2(y - 4)^2(z - 4)^2 = 1 \ .$$

Her må hver faktor være 1, dvs.

$$(x-4)^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3 \ \vee \ x = 5 \ .$$

Indsættelse af $x = 3$ i (1) giver $y = 3$ og i (2) får vi $z = 3$. Indsættelse af $x = 5$ giver $y = 5$ og $z = 5$.
Kontrol giver, at

$$(x,y,z) = (3,3,3) \quad \text{og} \quad (x,y,z) = (5,5,5)$$

er løsninger sammen med den tidligere fundne $(x,y,z) = (-4,-4,-4)$.

2. metode

Vi har, at

$$(a + 4)(a - 3)(a + 5) = (a^3 - 4a^2 - 16a + 60) - a \,.$$

Dermed er ligningssystemet ensbetydende med

$$(x + 4)(x - 3)(x - 5) = y - x \tag{4}$$

$$(y + 4)(y - 3)(y - 5) = z - y \tag{5}$$

$$(z + 4)(z - 3)(z - 5) = x - z \,. \tag{6}$$

Vi kan antage, at $x \geq y$ og $x \geq z$. Vi deler op i tilfælde.

I. *x* > **5**. Venstre side i (4) er positiv, mens højre er 0 eller negativ. Ingen løsninger.

II. *x* = 4. Ligning (4) er $8 \cdot 1 \cdot (-1) = y - 4$ dvs. $y = -4$. Ligning (5) giver så $0 = z - y$, så $z = y = -4$. Ligning (6) giver $0 = x - z$ i strid med at $x = 4$ og $z = -4$. Ingen løsning.

III. *x* = 2, 1, 0, -1, -2, -3. På venstre side i (4) er $x - 3 < 0$, $x - 5 < 0$ og $x + 4 > 0$, så venstre side er positiv. Højre side er 0 eller negativ. Ingen løsninger.

IV. *x* < -4. Så er $z \leq x < -4$ og i (6) er så alle faktorer på venstre side negative, så ven- stre side er negativ. Højre side er positiv eller 0. Ingen løsninger.

Tilbage er kun mulighederne $x = -4$, $x = 3$ og $x = 5$. Disse giver løsningerne

$$(x,y,z): \ (-4,-4,-4) \ , \ (3,3,3) \ , \ (5,5,5) \,.$$