Svar på opgave 281 (August 2011)

Opgave:

Vis, at der gælder følgende relationer:

a. tan72° = tan66° + tan36° + tan6°
b. tan84° = tan78° + tan72° + tan60°

Besvarelse:

Vi har som bekendt, at

$$\cos 36° = \frac{1}{2}\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \quad \text{og} \quad \cos 72° = \frac{1}{2\Phi} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \ ,$$

hvor Φ er det gyldne snits forhold, der opfylder, at

$$\Phi^2 - \Phi - 1 = 0 \ .$$

Vi benytter i det følgende, at

$$\tan u - \tan v = \frac{\sin u}{\cos u} - \frac{\sin v}{\cos v} = \frac{\sin u \cdot \cos v - \sin v \cdot \cos u}{\cos u \cdot \cos v} = \frac{\sin(u-v)}{\cos u \cdot \cos v}$$

$$\tan u + \tan v = \frac{\sin(u+v)}{\cos u \cdot \cos v} \ .$$

a. Vi omskriver lidt snedigt sådan:

$$\tan 72° = \tan 66° + \tan 36° + \tan 6° \quad \Leftrightarrow \quad \tan 72° - \tan 36° = \tan 66° + \tan 6°$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\sin(72°-36°)}{\cos 72° \cdot \cos 36°} = \frac{\sin(66°+6°)}{\cos 66° \cdot \cos 6°} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sin 36°}{\cos 72° \cdot \cos 36°} = \frac{\sin 72°}{\cos 66° \cdot \cos 6°}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sin 36° \cdot \cos 66° \cdot \cos 6° = 2\sin 72° \cdot \cos 72° \cdot \cos 36°$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sin 36° \cdot \cos 66° \cdot \cos 6° = \sin 144° \cdot \cos 36° \quad \Leftrightarrow \quad 2 \cdot \cos 66° \cdot \cos 6° = \cos 36°$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos 72° + \cos 60° = \cos 36° \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2\Phi} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\Phi \quad \Leftrightarrow \quad 1 + \Phi = \Phi^2 \qquad (1)$$

hvilket er sandt.

b. Igen omskriver vi:

$$\tan 84° = \tan 60° + \tan 72° + \tan 78° \quad \Leftrightarrow \quad \tan 84° - \tan 60° = \tan 78° + \tan 72°$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\sin(84°-60°)}{\cos 84° \cdot \cos 60°} = \frac{\sin(78°+72°)}{\cos 78° \cdot \cos 72°} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sin 24°}{\cos 84° \cdot \cos 60°} = \frac{\sin 150°}{\cos 78° \cdot \cos 72°}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2\sin 24°}{\cos 84°} = \frac{1}{2\cos 78° \cdot \cos 72°} \quad \Leftrightarrow \quad \cos 84° = 4\sin 24° \cdot \cos 72° \cdot \cos 78°$$

$$\Leftrightarrow \sin 6° = 2(\sin 96° - \sin 48°) \cdot \cos 78°$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin 6° = 2\sin 96° \cdot \cos 78° - 2\sin 48° \cdot \cos 78°$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin 6° = (\sin 174° + \sin 18°) - (\sin 126° - \sin 30°)$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin 6° = \sin 6° + \cos 72° - \cos 36° + \tfrac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \cos 72° - \cos 36° + \tfrac{1}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2\Phi} - \frac{1}{2}\Phi + \frac{1}{2} = 0 \;,$$

hvilket er sandt efter (1) oven for.

Bemærkning. Der findes yderligere netop 7 sæt af vinkler mellem 0° og 90°, der opfylder samme type relation som i opgaven, nemlig følgende besynderligheder:

tan60° = tan42° + tan36° + tan6°

tan60° = tan50° + tan20° + tan10°

tan70° = tan60° + tan40° + tan10°

tan72° = tan60° + tan42° + tan24°

tan78° = tan72° + tan42° + tan36°

tan78° = tan66° + tan60° + tan36°

tan80° = tan70° + tan60° + tan50° .