Svar på opgave 280 (Maj 2011)

Opgave:

Hvis

$$k = \frac{(a-b)(c-d)}{(b-c)(d-a)}$$

skal man bestemme

$$\frac{(a-c)(b-d)}{(a-b)(c-d)} \; .$$

Besvarelse:

1. metode

Vi omskriver sådan:

$$k = \frac{(a-b)(c-d)}{(b-c)(d-a)} \;\Leftrightarrow\; c(a-b) - d(a-b) = k(b-c)d - k(b-c)a$$

$$\Leftrightarrow\; d(k(b-c)+(a-b)) = c(a-b) + k(b-c)a \;\Leftrightarrow\; d = \frac{c(a-b)+k(b-c)a}{a-b+k(b-c)} \; .$$

Dermed er

$$b - d = b - \frac{c(a-b)+k(b-c)a}{a-b+k(b-c)} = \frac{b(a-b)+kb(b-c)-c(a-b)-k(b-c)a}{a-b+k(b-c)}$$

$$= \frac{(a-b)(b-c)+k(b-c)(b-a)}{a-b+k(b-c)} = \frac{(a-b)(b-c)(1-k)}{a-b+k(b-c)} \; . \tag{1}$$

På samme måde er

$$c-d = c - \frac{c(a-b)+k(b-c)a}{a-b+k(b-c)} = \frac{c(a-b)+kc(b-c)-c(a-b)-k(b-c)a}{a-b+k(b-c)}$$

$$= \frac{k(b-c)(c-a)}{a-b+k(b-c)} \; . \tag{2}$$

Ved brug af (1) og (2) får vi

$$\frac{(a-c)(b-d)}{(a-b)(c-d)}$$

$$= \frac{a-c}{a-b} \cdot \frac{(a-b)(b-c)(1-k)}{a-b+k(b-c)} \cdot \frac{a-b+k(b-c)}{k(b-c)(c-a)} = \frac{k-1}{k} \; .$$

2. metode

Vi har, at

$$k = \frac{(a-b)(c-d)}{(b-c)(d-a)} \;\Leftrightarrow\; (a-b)(c-d) = k(b-c)(d-a) \; .$$

I brøken

$$\frac{(a-c)(b-d)}{(a-b)(c-d)}$$

er nævneren lig med tælleren i k, og vi prøver at udtrykke tælleren ved de fire faktorer, der indgår i k.

$$(a - c)(b - d) = [(a - b) + (b - c)]\cdot[(b - c) + (c - d)]$$
$$= (a - b)(b - c) + (a - b)(c - d) + (b - c)(b - c) + (b - c)(c - d)$$
$$= (a - b)(c - d) + (b - c)\cdot[(a - b) + (b - c) + (c - d)]$$
$$= (a - b)(c - d) - (b - c)(d - a)\ .$$

Altså har vi

$$\frac{(a-c)(b-d)}{(a-b)(c-d)} = \frac{(a-b)(c-d)-(b-c)(d-a)}{k(b-c)(d-a)}\ .$$
$$= \frac{1}{k}\cdot\frac{(a-b)(c-d)}{(b-c)(d-a)} - \frac{1}{k}\cdot\frac{(b-c)(d-a)}{(b-c)(d-a)} = \frac{1}{k}\cdot k - \frac{1}{k}\cdot 1 = 1-\frac{1}{k}\ .$$

3. metode

Vi har, at

$$k = \frac{(a-b)(c-d)}{(b-c)(d-a)} \Leftrightarrow ac-ad-bc+bd = kbd-kab-kcd+kac \qquad (3).$$

Vi ser på tælleren i den anden brøk

$$(a - c)(b - d) = ab - ad - bc + cd\ .$$

I ligningen (3) lægger vi $ab + cd$ til og trækker $ac + bd$ fra på begge sider:

$$.\ ac-ad-bc+bd = kbd-kab-kcd+kac$$
$$\Leftrightarrow\quad ab - ad - bc + cd = kbd - kab - kcd + kac + ab + cd - ac - bd$$
$$\Leftrightarrow\quad ab - ad - bc + cd = (k - 1)ac + (k - 1)bd - (k - 1)ab - (k - 1)cd\ .$$

Læg $(k - 1)ab + (k - 1)cd$ til på begge sider:

$$ab - ad - bc + cd + (k - 1)ab + (k - 1)cd = (k - 1)ac + (k - 1)bd$$
$$\Leftrightarrow\quad kab + kcd - ad - bc = (k - 1)ac + (k - 1)bd\ .$$

Træk $(k - 1)ad + (k - 1)bc$ fra på begge sider

$$kab + kcd - (k - 1)ad - (k - 1)bc = (k - 1)ac + (k - 1)bd - (k - 1)ad - (k - 1)bc$$
$$\Leftrightarrow\quad k(ab + cd - ad - bc) = (k - 1)(ac + bd - ad - bc)$$
$$\Leftrightarrow\quad k(a - c)(b - d) = (k - 1)(a - b)(c - d) \quad\Leftrightarrow\quad \frac{(a-c)(b-d)}{(a-b)(c-d)} = 1-\frac{1}{k}\ ..$$

4. metode

Vi sætter $k_1 = \dfrac{(a-c)(b-d)}{(a-b)(c-d)}$.

Så er

$$k + \frac{1}{k} = \frac{(a-c)(b-d)+(b-c)(d-a)}{(a-b)(c-d)} = \frac{(c-d)(a-b)}{(c-d)(a-b)} = 1\ ,$$

hvoraf $\qquad k_1 = 1-\dfrac{1}{k}$.