Svar på opgave 275 (December 2010)

Opgave:

Løs følgende ligningssystem indenfor de positive tal:

$$p + q = r^2$$
$$q + r = s^2$$
$$r + s = p^2$$
$$s + p = q^2$$

Besvarelse:

1. metode:

Vi skal løse følgende ligningssystem inden for de positive tal:

$$p + q = r^2$$
$$q + r = s^2$$
$$r + s = p^2$$
$$s + p = q^2\ .$$

Lad (p,q,r,s) være en løsning med positive tal. Subtraktion af den første fra den tredje ligning giver:

$$p^2 - r^2 = r + s - p - q \quad \Leftrightarrow \quad q - s = r - p - (p^2 - r^2)$$
$$\Leftrightarrow \quad q - s = (r - p)-(p - r)(p + r) \quad \Leftrightarrow \quad q - s = (r - p)(1 + p + r)\ , \qquad (1)$$

og trækker vi den fjerde ligning fra den anden, fås

$$s^2 - q^2 = q + r - s - p \quad \Leftrightarrow \quad r - p = s^2 - q^2 - q + s$$
$$\Leftrightarrow \quad r - p = (s - q)(s + q) + s - q \quad \Leftrightarrow \quad r - p = (s - q)(1 + s + q)\ . \qquad (2)$$

Vi indsætter (2) i (1) og får

$$q - s = (s - q)(1 + s + q)(1 + p + r)\ .$$

Da p, q, r og s er positive, er de to sidste parenteser positive. Hvis $q \neq s$ følger, at

$$-1 = (1 + s + q)(1 + p + r)\ ,$$

hvilket er umuligt. Altså er $q = s$ og efter (2) er så $r = p$. Det oprindelige ligningssystem reduceres til

$$p + q = p^2$$
$$q + p = q^2\ .$$

Heraf følger

$$p^2 = q^2 \quad \Leftrightarrow \quad p = q\ ,$$

fordi p og q er positive. Altså er

$$p + q = p^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2p = p^2 \quad \Leftrightarrow \quad p = 2\ ,$$

og derfor er $q = p = 2$. Endelig er $r = p = 2$ og $s = q = 2$. Den eneste positive løsning er altså $(p,q,r,s) = (2,2,2,2)$. Frafaldes kravet om positivitet findes flere løsninger, fx ser vi straks, at $(p,q,r,s) = (0,0,0,0)$ er løsning.

2. metode:

Vi trækker den anden ligning fra den første:

$$p - r = r^2 - s^2 \ ,$$

og indsætter den tredje:

$$p - r = r^2 - s^2 = (r - s)(r + s) = (r - s)\cdot p^2 \ . \tag{3}$$

På samme måde fås, at

$$q - s = (s - p)q^2 \quad (4) \quad , \quad r - p = (p - q)r^2 \quad (5) \quad , \quad s - q = (q - r)s^2 \quad (6) \ .$$

Hvis $p > r$ følger af (3), at $r > s$ og derfor også $p > s$. Af (4) følger så, at $s > q$ og således også $p > q$. Efter (5) medfører dette, at $r > p$, hvilket er en modstrid.

Hvis $p < r$, følger af (3), at $r < s$ og dermed $p < s$. Af (4) følger, at $s < q$ og så $p < q$. Ef- ter (5) er $r < p$, en modstrid.

Vi slutter, at $p = r$. Af (5) følger, at $p = q$, så vi har $p = q = r$. Efter (6) er $s = q$, så $p = q = r = s$. Vi har undervejs brugt, at alle tallene er positive.

De fire ligninger er ensbetydende med ligningen $2p = p^2$, som kun har løsningen $p = 2$ inden for de positive tal. Vi konkluderer, at ligningssystemet har én løsning, nemlig $(p,q,r,s) = (2,2,2,2)$ inden for de positive tal.