Svar på opgave 273 (Oktober 2010)

Opgave:

Vis, at der for positive reelle tal a og b gælder, at

$$\frac{1}{1+2a}+\frac{1}{1+2b} \ \geq \ \frac{2}{ab+2}$$

Besvarelse:

1. metode:

Vi har, at

$$\frac{1}{1+2a}+\frac{1}{1+2b}=\frac{1}{1+2a}+\frac{a^2}{a^2+2a^2b} \ .$$

Vi får brug for følgende ulighed for positive tal x, y og a:

$$\frac{1}{x}+\frac{a^2}{y} \ \geq \ \frac{(a+1)^2}{x+y}$$

som er sand, fordi den er ensbetydende med

$$\frac{y+a^2x}{xy} \geq \frac{(a+1)^2}{x+y} \ \Leftrightarrow \ (y+a^2x)(x+y) \geq xy(a+1)^2$$

$$\Leftrightarrow \ xy+y^2+a^2x^2+a^2xy \ \geq \ a^2xy+xy+2axy \ \Leftrightarrow \ y^2+a^2x^2 \ \geq 2axy$$

$$\Leftrightarrow \ y^2+a^2x^2-2axy \ \geq \ 0 \ \Leftrightarrow \ (y-ax)^2 \geq 0 \ .$$

Altså har vi ved brug heraf, at

$$\frac{1}{1+2a}+\frac{1}{1+2b}=\frac{1}{1+2a}+\frac{a^2}{a^2+2a^2b} \ \geq \ \frac{(a+1)^2}{1+2a+a^2+2a^2b} \ .$$

Vi skal altså nu vise, at

$$\frac{(a+1)^2}{1+2a+a^2+2a^2b} \geq \frac{2}{ab+2} \ .$$

Vi omformer denne ulighed sådan:

$$(a+1)^2 \ \geq \frac{2(1+2a+a^2+2a^2b)}{ab+2} \ \Leftrightarrow \ (a-1)^2 \geq \frac{2(1+2a+a^2+2a^2b)}{ab+2}-4a \ .$$

Vi omskriver højre side af uligheden sådan:

$$\frac{2(1+2a+a^2+2a^2b)-4a^2b-8a}{ab+2}=\frac{2+4a+2a^2+4a^2b-4a^2b-8a}{ab+2}$$

$$=\frac{2a^2-4a+2}{ab+2}=\frac{2(a^2-2a+1)}{ab+2}=\frac{2(a-1)^2}{ab+2}\ .$$

Altså skal vi vise uligheden

$$(a-1)^2\ \geq\ \frac{2(a-1)^2}{ab+2}\ \Leftrightarrow\ 1\ \geq\ \frac{2}{ab+2}\ \Leftrightarrow\ ab+2\ \geq\ 2\ \Leftrightarrow\ ab\geq 0\ ,$$

hvilket er sandt.

2. metode:

Vi omskriver uligheden således:

$$\frac{1}{1+2a}+\frac{1}{1+2b}\geq\frac{2}{ab+2}\ \Leftrightarrow\ (ab+2)\cdot[(1+2b)+(1+2a)]\geq 2(1+2a)(1+2b)$$

$$\Leftrightarrow\ 2(ab+2)(1+a+b)\ \geq\ 2(1+2a+2b+4ab)$$

$$\Leftrightarrow\ (ab+2)(1+a+b)\ \geq\ 1+2a+2b+4ab$$

$$\Leftrightarrow\ ab+2+a^2b+2a+ab^2+2b\ \geq\ 1+2a+2b+4ab$$

$$\Leftrightarrow\ a^2b+ab^2+1\ \geq\ 3ab\ \Leftrightarrow\ \frac{a+b+\frac{1}{ab}}{3}\ \geq\ 1$$

Uligheden mellem aritmetisk og geometrisk middeltal anvendt på tallene a, b og $\frac{1}{ab}$ giver

$$\frac{a+b+\frac{1}{ab}}{3}\ \geq\ \sqrt[3]{a\cdot b\cdot\frac{1}{ab}}=1\ ,$$

hvilket netop er det ønskede.

3. metode:

Samme omskrivning som oven for giver, at uligheden er ensbetydende med

$$ab^2+a^2b-3ab+1\ \geq\ 0\ \Leftrightarrow\ ab^2+(a^2-3a)b+1\ \geq\ 0\ . \qquad (1)$$

Venstre side er et andengradspolynomium i b med diskriminanten

$$d=(a^2-3a)^2-4a=a^4-6a^3+9a^2-4a=a(a-4)(a-1)^2\ .$$

Hvis $0\leq a\leq 4$, er uligheden (1) sand, fordi diskriminanten er ikke-positiv og højeste- gradsleddets koefficient i andengradspolynomiet er $a\geq 0$.

Uligheden (1) kan også skrives sådan:

$$3ab-ab^2-a^2b\ \leq\ 1\ \Leftrightarrow\ ab(3-a-b)\ \leq\ 1\ . \qquad (2)$$

Hvis $a\geq 4$, er

$$3-a-b\leq 3-4-b\leq -1-b<0\ .$$

På venstre side i uligheden (2) er altså de to første faktorer ikke-negative og den tredje negativ. Altså er uligheden opfyldt.