Svar på opgave 266 (Januar 2010)

Opgave:

De reelle tal a, b og c opfylder, at $a + b + c = 3$.

Vis, at

$$\frac{1}{5a^2-4a+11}+\frac{1}{5b^2-4b+11}+\frac{1}{5c^2-4c+11} \le \frac{1}{4}.$$

Besvarelse:

Vi betegner udtrykket på venstre side med S, altså

$$S = \frac{1}{5a^2-4a+11}+\frac{1}{5b^2-4b+11}+\frac{1}{5c^2-4c+11}.$$

Vi har, at $5x^2 - 4x + 11 > 0$ for alle x. For $x < \frac{9}{5}$ gælder, at

$$\frac{1}{5x^2-4x+11} \le \frac{3-x}{24},$$

fordi denne ulighed er ensbetydende med

$$24 \le (3 - x)(5x^2 - 4x + 11) \iff 5x^3 - 19x^2 + 23x - 9 \le 0$$
$$\iff (x - 1)^2(5x - 9) \le 0 \iff x \le \frac{9}{5}.$$

Hvis $x \ge \frac{9}{5}$ er

$$5x^2 - 4x + 11 = 5x(x - \tfrac{4}{5}) + 11 \ge 5\cdot\tfrac{9}{5}\cdot(\tfrac{9}{5}-\tfrac{4}{5})+11 = 20$$

så

$$\frac{1}{5x^2-4x+11} \le \frac{1}{20}.$$

For alle x gælder

$$5x^2 - 4x + 11 = 5\left(x-\tfrac{2}{5}\right)^2+11-\tfrac{4}{5} \ge 11-\tfrac{4}{5} > 10,$$

så

$$\frac{1}{5x^2-4x+11} \le \frac{1}{10}.$$

I. Hvis alle tre tal a, b og c er mindre end $\frac{9}{5}$ er altså

$$S \le \frac{3-a}{24}+\frac{3-b}{24}+\frac{3-c}{24}=\frac{9-(a+b+c)}{24}=\frac{6}{24}=\frac{1}{4}.$$

II. Hvis præcis et af tallene *a*, *b* og *c* er større end eller lig med $\frac{9}{5}$ er

$$S \leq \frac{1}{20}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}=\frac{1}{4} \ .$$

III. Hvis præcis to af tallene *a*, *b* og *c* er større end eller lig med $\frac{9}{5}$ er

$$S \leq \frac{1}{20}+\frac{1}{20}+\frac{1}{10}=\frac{1}{5} \ < \ \frac{1}{4}$$

IV. Hvis alle tre tal er større end eller lig med $\frac{9}{5}$ er

$$S \leq \frac{1}{20}+\frac{1}{20}+\frac{1}{20}=\frac{3}{20} \ < \ \frac{1}{4} \ .$$