Svar på opgave 262 (September 2009)

Opgave:

Løs hvert af følgende ligningssystemer inden for de reelle tal:

a.
$$x^2 + xy + y^2 = 37$$
$$y^2 + yz + z^2 = 19$$
$$z^2 + zx + x^2 = 28$$

b.
$$x^3 = 3y - 2$$
$$y^3 = 3z - 2$$
$$z^3 = 3x - 2$$

Besvarelse:

a. I ligningssystemet

$$x^2 + xy + y^2 = 37$$
$$y^2 + yz + z^2 = 19$$
$$z^2 + zx + x^2 = 28$$

giver subtraktion af de to første ligninger:

$$x^2 - y^2 + xy - yz + y^2 - z^2 = 18 \quad \Leftrightarrow \quad (x - z)(x + y + z) = 18 \,. \qquad (1)$$

Addition af de to første ligninger giver

$$x^2 + xy + y^2 + y^2 + yz + z^2 = 56 = 2 \cdot 28 \;\;,$$

og heri indsættes den tredje:

$$x^2 + 2y^2 + z^2 + xy + yz = 2(z^2 + zx + x^2) \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 2y^2 + z^2 + xy + yz = 2z^2 + 2zx + 2x^2$$
$$\Leftrightarrow \quad 2y^2 + xy + yz = x^2 + 2zx + z^2 \quad \Leftrightarrow \quad y^2 + y(x + y + z) = (x + z)^2$$
$$\Leftrightarrow \quad y(x + y + z) = (x + z)^2 - y^2 \quad \Leftrightarrow \quad y(x + y + z) = (x + z - y)(x + z + y) \;. \qquad (2)\,.$$

Efter (1) er $x + y + z \neq 0$, så (2) er ensbetydende med

$$y = x + z - y \quad \Leftrightarrow \quad 2y = x + z \;. \qquad (3)$$

Dette indsættes i (1):

$$(x - z) \cdot 3y = 18 \quad \Leftrightarrow \quad x - z = \frac{6}{y} \;. \qquad (4)$$

Addition af (3) og (4) giver

$$2x = 2y + \frac{6}{y} \quad \Leftrightarrow \quad x = y + \frac{3}{y} \;\;, \qquad (5)$$

og subtraction af (4) fra (3) giver

$$z = y - \frac{3}{y} \;. \qquad (6)$$

Nu kan vi indsætte *x* og *z* udtrykt ved *y* i den sidste af de tre ligninger:

$$\left(y-\frac{3}{y}\right)^2+\left(y-\frac{3}{y}\right)\left(y+\frac{3}{y}\right)+\left(y+\frac{3}{y}\right)^2=28 \quad\Leftrightarrow\quad 3y^2+\frac{9}{y^2}=28$$

$$\Leftrightarrow\quad 3y^4-28y^2+9=0 \quad\Leftrightarrow\quad y^2=9 \ \vee\ y^2=\tfrac{1}{3}\ .$$

Altså er $y = \pm 3$ eller $y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. I ligningerne (5) og (6) får vi de tilhørende værdier af x og z, så løsningerne til det givne ligningssystem er

$$(x,y,z)\ :\ (4,3,2)\ ,\ (-4,-3,-2)\ ,\ \left(\frac{10}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{-8}{\sqrt{3}}\right),\ \left(\frac{-10}{\sqrt{3}},\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{8}{\sqrt{3}}\right)\ .$$

b. I ligningssystemet

$$x^3 = 3y - 2$$
$$y^3 = 3z - 2$$
$$z^3 = 3x - 2$$

får vi ved addition af ligningerne

$$x^3 + y^3 + z^3 = 3x + 3y + 3z - 6 \quad\Leftrightarrow\quad x^3 - 3x + 2 + y^3 - 3y + 2 + z^3 - 3z + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow\quad (x-1)^2(x+2) + (y-1)^2(y+2) + (z-1)^2(z+2) = 0\ . \qquad (7)$$

Vi ser straks, at vi som løsninger har

$$(x,y,z)\ :\ (1,1,1)\ ,\ (-2,-2,-2)\ .$$

Lad nu (x,y,z) være en tredje løsning, og antag først, at $x > -2$. Så er

$$3y - 2 = x^3 > -8 \quad \text{så} \quad y > -2$$

og dermed

$$3z - 2 = y^3 > -8 \quad \text{så} \quad z > -2\ ,$$

men så følger af (7), at venstre side er positiv..

Antag så, at (x,y,z) er en løsning, hvor $x < -2$. Så er

$$3y - 2 = x^3 < -8 \quad \text{så} \quad y < -2$$

og

$$3z - 2 = y^3 < -8 \quad \text{så} \quad z < -2\ .$$

Heraf følger, at venstre side i (7) er negativ. De eneste løsninger til ligningssystemet er altså de fundne

$$(x,y,z)\ .\ (1,1,1)\ ,\ (-2,-2,-2)\ .$$

Bemærkning. Vi kan af den første ligning isolere y og i den tredje isolere z:

$$y=\frac{x^3+2}{3} \quad \text{og} \quad z=\sqrt[3]{3x-2}\ ,$$

og disse udtryk kan indsættes i den midterste ligning:

$$\left(\frac{x^3+2}{3}\right)^3 = 3\sqrt[3]{3x-2}-2\ .$$

Denne ligning løses ved hjælp af symbolregner, og man får $x = 1$ eller $x = -2$. Denne metode anses dog for usportslig og kedsommelig.