Svar på opgave 258 (Marts 2009)

Opgave:

Vis, at der for positive reelle tal *a*, *b* og *c* gælder, at

$$\frac{a}{a+3b+3c}+\frac{b}{3a+b+3c}+\frac{c}{3a+3b+c} \ \geq \ \frac{3}{7} \ .$$

Besvarelse:

1. metode:

Funktionen

$$f(x)=\frac{x}{k-x} \quad , \ k>0$$

er konveks i [0;k[. Så gælder efter Jensens ulighed, at

$$f\left(\tfrac{x+y+z}{3}\right) \leq \tfrac{1}{3}(f(x)+f(y)+f(z)) \quad , \quad x,\ y,\ z \in [0;k[\ .$$

Vi sætter $x = 2a$, $y = 2b$ og $z = 2c$ og får

$$\begin{aligned} & f\left(\tfrac{2a+2b+2c}{3}\right) \ \leq \ \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{2a}{k-2a}+\tfrac{2b}{k-2b}+\tfrac{2c}{k-2c}\right) \\ \Leftrightarrow \ & \frac{\frac{1}{3}(2a+2b+2c)}{k-\frac{1}{3}(2a+2b+2c)} \ \leq \ \frac{1}{3}\left(\frac{2a}{k-2a}+\frac{2b}{k-2b}+\frac{2c}{k-2c}\right) \\ \Leftrightarrow \ & 3\cdot\frac{2a+2b+2c}{3k-2a-2b-2c} \ \leq \ \frac{2a}{k-2a}+\frac{2b}{k-2b}+\frac{2c}{k-2c} \quad . \qquad (1) \end{aligned}$$

Her lader vi $k = 3a + 3b + 3c$. Så vil $2a$, $2b$ og $2c$ ligge mellem 0 og *k*, og uligheden (1) er ensbetydende med

$$\begin{aligned} & 3\cdot\frac{2a+2b+2c}{7a+7b+7c} \ \leq \ \frac{2a}{k-2a}+\frac{2b}{k-2b}+\frac{2c}{k-2c} \ \Leftrightarrow \ \frac{6}{7} \leq \frac{2a}{k-2a}+\frac{2b}{k-2b}+\frac{2c}{k-2c} \\ \Leftrightarrow \ & \frac{3}{7} \ \leq \ \frac{a}{a+3b+3c}+\frac{b}{3a+b+3c}+\frac{c}{3a+3b+c} \ , \end{aligned}$$

hvilket er det ønskede.

2. metode:

Vi kan henvise til artiklen *Et par algebraiske uligheder* i *MatematikMagasinet* 44, s. 1332. Her finder vi som ulighed 2, at der for positive tal *x*, *y* og *z* samt
$0 < k \leq 1$ gælder

$$\frac{x}{kx+y+z}+\frac{y}{x+ky+z}+\frac{z}{x+y+kz} \ \geq \ \frac{3}{k+2} \ .$$

Hvis vi heri sætter $k = \frac{1}{3}$, får vi

$$\frac{x}{\frac{1}{3}x+y+z}+\frac{y}{x+\frac{1}{3}y+z}+\frac{z}{x+y+\frac{1}{3}z} \ \geq \ \frac{3}{\frac{1}{3}+2}$$

$$\Leftrightarrow \ \frac{3x}{x+3y+3z}+\frac{3y}{3x+y+3z}+\frac{3z}{3x+3y+z} \ \geq \ \frac{9}{7} \ ,$$

og efter division med 3 har vi det ønskede.

3. metode:
Vi benytter her den kendte *Nesbitts ulighed* (se Jens Carstensen & Palle Bak Petersen: *Uligheder*, 2003):

$$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y} \ \geq \ \frac{3}{2} \quad , \quad x, y, z > 0 \ .$$

Vi bestemmer positive tal x, y og z, så

$$x+y=a+3b+3c \quad , \quad y+z=3a+b+3c \quad , \quad z+x=3a+3b+c.$$

Løses dette ligningssystem med hensyn til a, b og c fås

$$(a,b,c)=\left(\frac{6z-(x+y)}{14} \ , \ \frac{6x-(y+z)}{14} \ , \ \frac{6y-(z+x)}{14}\right)$$

Den oprindelige uligheds venstreside kan nu omskrives til et udtryk i x, y og z:

$$\frac{a}{a+3b+3c}+\frac{b}{3a+b+3c}+\frac{c}{3a+3b+c}=\frac{1}{14}\left(\frac{6z-(x+y)}{x+y}+\frac{6x-(y+z)}{y+z}+\frac{6y-(z+x)}{z+x}\right)$$

$$=\frac{1}{14}\left(\frac{6z}{x+y}+\frac{6x}{y+z}+\frac{6y}{z+x}-3\right)=\frac{3}{7}\left(\frac{z}{x+y}+\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}\right)-\frac{3}{14} \geq \frac{3}{7}\cdot\frac{3}{2}-\frac{3}{14}=\frac{6}{14}=\frac{3}{7} \ .$$

Her har vi i den sidste ulighed netop brugt Nesbitts ulighed.

***4. metode*:**
For a, b, $c > 0$ sætter vi

$$S=\frac{a}{a+3b+3c}+\frac{b}{3a+b+3c}+\frac{c}{3a+3b+c} \ ,$$

og vi ønsker at vise, at $S \ \geq \ \frac{3}{7}$.

Vi sætter

$$x=a+3b+3c \quad , \quad y=3a+b+3c \quad , \quad z=3a+3b+c \ .$$

Vi bemærker, at

$$2a+x=2b+y=2c+z=3(a+b+c)$$

og at

$$x+y+z=7(a+b+c) \ \Leftrightarrow \ \frac{3}{7}(x+y+z)=3(a+b+c).$$

Dette udnyttes i nedenstående regninger.

S kan altså skrives således:

$$S=\frac{1}{2}\left(\frac{2a}{x}+\frac{2b}{y}+\frac{2c}{z}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{2a+x}{x}+\frac{2b+y}{y}+\frac{2c+z}{z}-3\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{3(a+b+c)}{x}+\frac{3(a+b+c)}{y}+\frac{3(a+b+c)}{z}-3\right)$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\left(3(a+b+c)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)-3\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{7}(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)-3\right)$$
$$=\frac{3}{14}(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)-\frac{3}{2}$$
$$\geq\ \frac{3}{14}\cdot 3\cdot\sqrt[3]{xyz}\cdot 3\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{x}\frac{1}{y}\frac{1}{z}}-\frac{3}{2}=\frac{3^3\cdot 1}{14}-\frac{3}{2}=\frac{27-21}{14}=\frac{3}{7}\ ,$$

Vi har udnyttet uligheden mellem aritmetisk og geometrisk middeltal to steder.

5. metode:
I den givne ulighed ses, at udtrykket på venstre side i uligheden ikke ændrer værdi, hvis a, b og c erstattes med ka, kb og kc, hvor k er et vilkårligt positivt tal. Vi kan derfor forudsætte, at

$$a+b+c=1\ . \tag{2}$$

Ved hjælp af (2) foretages omskrivningen

$$\frac{a}{a+3b+3c}+\frac{b}{3a+b+3c}+\frac{c}{3a+3b+c}=\frac{a}{3-2a}+\frac{b}{3-2b}+\frac{c}{3-2c}\quad . \tag{3}$$

Vi ser på funktionen

$$f(x)=\frac{x}{3-2x}\ ,$$

hvis graf i intervallet I = [0;1] er en hyperbelbue, som er konveks. Jensens ulighed sam- men med (3) giver

$$\frac{1}{3}\left(\frac{a}{3-2a}+\frac{b}{3-2b}+\frac{c}{3-2c}\right)=\frac{1}{3}f(a)+\frac{1}{3}f(b)+\frac{1}{3}f(c)$$
$$\geq\ f\left(\tfrac{1}{3}a+\tfrac{1}{3}b+\tfrac{1}{3}c\right)=\ f\left(\tfrac{1}{3}\right)=\frac{\frac{1}{3}}{3-2\cdot\frac{1}{3}}=\frac{1}{7}\ ,$$

og multiplikation med 3 giver det ønskede.

***6. metode*:**
I uligheden

$$\frac{a}{a+3b+3c}+\frac{b}{3a+b+3c}+\frac{c}{3a+3b+c}\geq\frac{3}{7}$$

ganger vi på hver side af ulighedstegnet med fællesnævneren

$$7(a+3b+3c)(3a+b+3c)(3a+3b+c)\ ,$$

ganger parenteser ud, rykker rundt på led og dividerer med 12, så vi får, at uligheden er ensbetydende med

$$3a^2+3b^2+3c^2\ \geq\ ab^2+a^2b+ac^2+a^2c+bc^2+b^2c+3abc$$
$$\Leftrightarrow\ \ 3a^2+3b^2+3c^2\ \geq\ (a+b+c)(ab+bc+ca)\ .$$

Vi har den kendte ulighed

$$a^2 + b^2 + c^2 \ \geq\ ab + bc + ca\ . \qquad (4)$$

Vi kan antage, at $0 < a \leq b \leq c$. Vi minder om Chebyhevs ulighed:

> Hvis tallene a_k og b_k opfylder, at
>
> $$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \quad \text{og} \quad b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$$
>
> eller
>
> $$a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \quad \text{og} \quad b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n\ ,$$
>
> gælder
>
> $$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n} \ \leq\ \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n}{n}\ .$$

Altså gælder

$$\frac{a+b+c}{3} \cdot \frac{a^2+b^2+c^2}{3} \ \leq\ \frac{a^3+b^3+c^3}{3}\ . \qquad (5)$$

Ulighederne (4) og (5) kombineres, så vi får

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{3} \ \geq\ \frac{a+b+c}{3} \cdot \frac{a^2+b^2+c^2}{3} \geq \frac{a+b+c}{3} \cdot \frac{ab+bc+ca}{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad 3a^2 + 3b^2 + 3c^2 \ \geq\ (a + b + c)(ab + bc + ca)\ ,$$

hvilket netop medfører den ønskede ulighed.