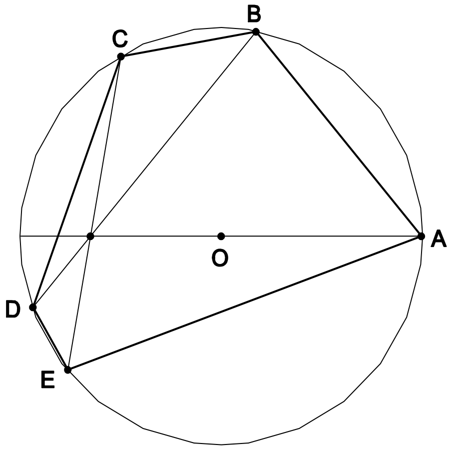
Svar på opgave 257 (Februar 2009)

Opgave:

I den indskrivelige femkant *ABCDE* er vinklerne
$A = 70°$, $B = 120°$, $C = 120°$, $D = 130°$ og $E = 100°$.

Vis, at diagonalerne *BD* og *CE* skærer hinanden på cirkeldiameteren gennem *A*.



Besvarelse:

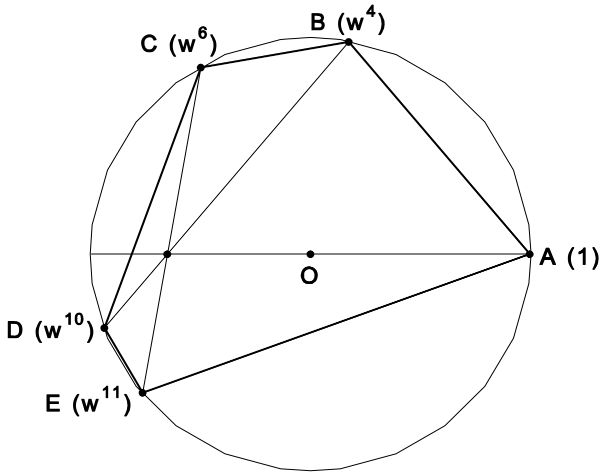
At femkanten er indskrivelig ses ved at buerne er

$$AB = 80° \;,\quad BC = 40° \;,\; CD = 80° \;,\; DE = 20° \;,\; EA = 140°$$

1. metode.

Vi foretager et bevis ved hjælp af komplekse tal.
Vi kan gå ud fra, at radius i femkantens omskrevne cirkel er 1, centrum er (0,0) og at *A* ligger i det komplekse tal 1.
Vi skal vise, at skæringspunktet mellem *BD* og *CE* ligger på den reelle akse. På grund af de anførte buer gradtal er det praktisk at betegne den 18. primitive enhedsrod med *w*, dvs.

$$w = \cos\frac{2\pi}{18} + i\sin\frac{2\pi}{18} \;.$$



På denne måde svarer vinkelspidserne til følgende komplekse tal:

$$A:1 \;,\; B:w^4 \;,\; C:w^6 \;,\; D:w^{10} \;,\; E:\; w^{11} \;.$$

Vi har så, at *w* opfylder, at

$$w^{18} = 1 \;,\; w^9 = -1 \;,\; w^6 - w^3 + 1 = 0 \;,\; \overline{w^k} = w^{18-k} \;.$$

Nu er det kendt (?), at hvis en linje i den komplekse plan går gennem punkterne svarende til de komplekse tal p og q, er dens ligning

$$z(\overline{p}-\overline{q})+\overline{z}(q-p)=\overline{p}\cdot q-p\cdot\overline{q}\ ,$$

hvor z er det løbende punkt på linjen.

Ved brug af dette ser vi, at linjen BD har ligningen

$$\begin{aligned}&z(\overline{w^4}-\overline{w^{10}})+\overline{z}(w^{10}-w^4)=\overline{w^4}\cdot w^{10}-x^4\cdot\overline{w^{10}}\\ \Leftrightarrow\ &z(w^{14}-w^8)+\overline{z}(w^{10}-w^4)=w^{14}\cdot w^{10}-w^4\cdot w^8\\ \Leftrightarrow\ &zw^8(w^6-1)+\overline{z}w^4(w^6-1)=w^6-w^{12}=w^6(1-w^6)\ \Leftrightarrow\ zw^4+\overline{z}=-w^2\ .\end{aligned}$$

På samme måde har CE ligningen

$$\begin{aligned}&z(\overline{w^6}-\overline{w^{11}})+\overline{z}(w^{11}-w^6)=\overline{w^6}\cdot w^{11}-x^6\cdot\overline{w^{11}}\\ \Leftrightarrow\ &z(w^{12}-w^7)+\overline{z}(w^{11}-w^6)=w^{12}\cdot w^{11}-w^6\cdot w^7\\ \Leftrightarrow\ &zw^7(w^5-1)+\overline{z}w^6(w^5-1)=w^5-w^{13}\\ \Leftrightarrow\ &zw^2(w^5-1)+\overline{z}w(w^5-1)=1-w^8\ .\end{aligned}$$

For at finde de to linjers skæringspunkt isolerer vi $\overline{z}$ i den første og indsætter i den anden:

$$zw^2(w^5-1)+(-w^2-zw^4)\cdot w\cdot(w^5-1)=1-w^8$$

$$\Leftrightarrow\ z(w^7-w^2-w^{10}+w^5)=1-w^3\ \Leftrightarrow\ z=\frac{1-w^3}{w^7-w^2-w^{10}+w^5}$$

Denne brøk kan ved hjælp af en symbolregner forkortes til

$$z=\frac{1}{w^7-w^2}\ .$$

Hvis vi kan vise, at $z=\overline{z}$ er vi færdige. Vi finder, at

$$\overline{z}=\frac{1}{\overline{w^2}(\overline{w^5}-1)}=\frac{1}{w^{16}(w^{13}-1)}=\frac{1}{w^{29}-w^{16}}=\frac{1}{w^{11}-w^{16}}$$

Vi ønsker at vise, at $w^7-w^2=w^{11}-w^{16}$ og vi finder ved at bruge $w^9=-1$, at

$$\begin{aligned}&w^7-w^2=w^{11}-w^{16}\ \Leftrightarrow\ w^5-1=w^9-w^{14}\ \Leftrightarrow\ w^5-1=-1-w^{14}\\ &\Leftrightarrow\ w^5=-w^{14}\ \Leftrightarrow\ 1=-w^9\ ,\end{aligned}$$

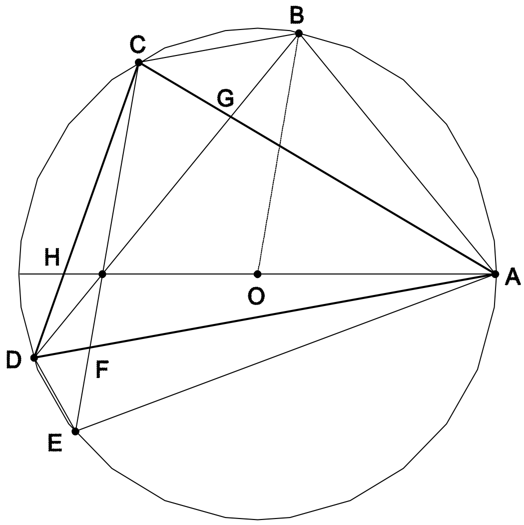
hvilket er det ønskede.

(fortsættes næste side)

2. metode (Hans Christian Hulvej, Marselisborg Gymnasium).

Lad F være skæringspunktet mellem AD og CE, G skæringspunkt mellem AC og BD og H skæringspunkt mellem CD og AO. I ΔACD har vi tre cevianer (dvs. linjer gennem trekantens vinkelspidser), og vi ønsker at vise, at de skærer hinanden i samme punkt. Hertil benyttes Cevas omvendte sætning på trigonometrisk form. Vi ønsker altså at vise, at

$$\frac{\sin\angle CAH}{\sin\angle HAD}\cdot\frac{\sin\angle ADG}{\sin\angle GDC}\cdot\frac{\sin\angle DCF}{\sin\angle FCA}=1$$



Ved hjælp af de angivne buemål oven for, får vi vinklerne

$$\angle GDC=\angle BDC=20° \quad , \quad \angle ADG=\angle ADB=40°$$

$$\angle BDE=110°$$

$$\angle FCA=\angle ECA=70° \;\; , \;\; \angle ADC=60° \;\; , \;\; \angle DCF=10° \; .$$

Vi trækker linjen BO. Så er $\angle AOB=80°$ og da ΔAOB er ligebenet, er $\angle BAO=50°$. Desuden er $\angle BAC=20°$ og $\angle ACB=40°$.

Dermed er

$$\angle CAO=\angle CAH=\angle BAO-\angle BAC=50°-20°=30°$$

og

$$\angle OAD=\angle HAD=\angle CAD-\angle CAH=40°-30°=10° \; .$$

Nu udregner vi

$$\frac{\sin\angle CAH}{\sin\angle HAD}\cdot\frac{\sin\angle ADG}{\sin\angle GDC}\cdot\frac{\sin\angle DCF}{\sin\angle FCA}=\frac{\sin 30°}{\sin 10°}\cdot\frac{\sin 40°}{\sin 20°}\cdot\frac{\sin 10°}{\sin 70°}$$

$$=\frac{\sin 30°\cdot\sin 40°}{\sin 20°\cdot\sin 70°}=\frac{\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\sin 20°\cdot\cos 20°}{\sin 20°\cdot\sin 70°}=\frac{\cos 20°}{\sin 70°}=1 \; .$$

3. metode (Hans Benner, Randers).

Vi går ud fra, at cirklens radius er 1. Lad S være skæringspunktet mellem BD og CE og lad AS skære cirklen i Q. Med de anførte gradtal for buerne er

$$AB=2\sin 40° \;\; , \;\; BC=2\sin 20° \; .$$

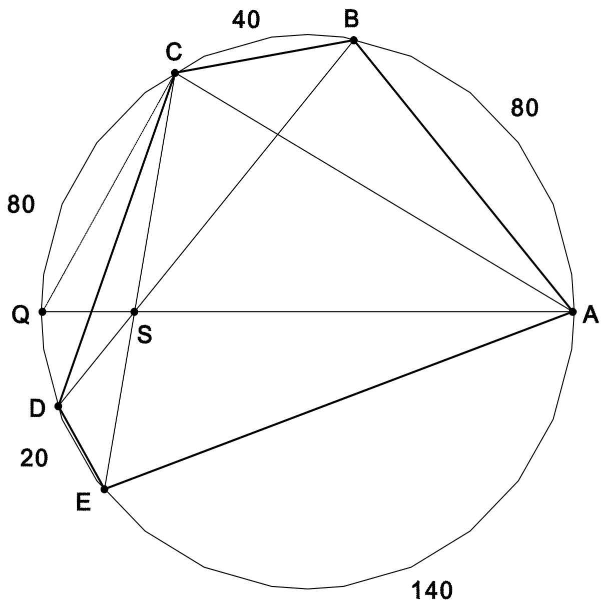
$$\frac{BS}{\sin 110°}=\frac{BC}{\sin 30°} \;\Leftrightarrow\; BS=\frac{BC\cdot\sin 10°}{\sin 30°} \; .$$

Heri indsættes udtrykket for BC:

$$BS=\frac{2\cdot\sin 20°\cdot\sin 110°}{\frac{1}{2}}=4\cdot\sin 20°\cdot\sin 70°$$

$$=\frac{4\cdot\sin 20°\cdot\cos 20°\cdot\sin 70°}{\cos 20°}=\frac{2\cdot\sin 40°\cdot\sin 70°}{\cos 20°}$$

$$=2\cdot\sin 40°$$



I ΔSCB får vi

.

Dermed er $BS = AB$, så ΔBSA er ligebenet. Da $\angle SBA = 80°$ er

$$\angle BSA = \angle BAS = 50° \ ,$$

så $\angle CAQ = 30°$. Desuden er $\angle CQA = 60°$. Så følger i ΔQCA, at

$$\angle QCA = 180° - \angle CQA - \angle CAQ = 180° - 60° - 30° = 90° \ ,$$

så AQ er diameter.