Svar på opgave 256 (Januar 2009)

Opgave:

Bestem rationale tal *a*, *b* og *c*, så

$$\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1}=\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}\ .$$

Besvarelse:

Vi sætter

$$x=\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1}\quad \text{og}\quad y=\sqrt[3]{2}\ .$$

Så er

$$y^3=2\quad \text{og}\quad x=\sqrt[3]{y-1}\ .$$

Desuden er

$$y^3=2\ \Leftrightarrow\ 1=y^3-1\ \Leftrightarrow\ 1=(y-1)(y^2+y+1)\ , \qquad (1)$$

og da $y^3+1=3$ er

$$y^2+y+1=\tfrac{1}{3}(3y^2+3y+3)=\tfrac{1}{3}(3y^2+3y+y^3+1)=\tfrac{1}{3}(y+1)^3\ . \qquad (2)$$

Efter (1) og (2) får vi

$$x^3=y-1=\frac{1}{y^2+y+1}=\frac{3}{(y+1)^3}\quad \text{hvoraf}\quad x=\frac{\sqrt[3]{3}}{y+1}\ . \qquad (3)$$

Vi har endvidere

$$3=y^3+1=(y+1)(y^2-y+1)\ ,$$

hvoraf

$$\frac{1}{y+1}=\frac{y^2-y+1}{3}\ . \qquad (4)$$

Af (3) og (4) fås

$$x=\frac{\sqrt[3]{3}}{3}(y^2-y+1)=\frac{\sqrt[3]{3}}{3}(\sqrt[3]{2}^2-\sqrt[3]{2}+1)=\frac{1}{3}(\sqrt[3]{12}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{3})$$

$$=\sqrt[3]{\frac{12}{27}}-\sqrt[3]{\frac{6}{27}}+\sqrt[3]{\frac{3}{27}}=\sqrt[3]{\frac{4}{9}}+\sqrt[3]{-\frac{2}{9}}+\sqrt[3]{\frac{1}{9}}\ ,$$

og dermed er $(a,b,c)=\left(\frac{4}{9},-\frac{2}{9},\frac{1}{9}\right)$.