Svar på opgave 253
(Oktober 2008)

Opgave:

En talfølge (a_n) er rekursivt bestemt ved

$$a_1 = 1$$
$$a_{n+1} = 2a_n + \sqrt{3(a_n^2 - 1)} \quad \text{for n > 1}$$

Vis, at samtlige led i talfølgen er naturlige tal.

Besvarelse:

Vi omskriver sådan:

$$a_n = 2a_{n-1} + \sqrt{3(a_{n-1}^2 - 1)} \iff (a_n - 2a_{n-1})^2 = a_{n-1}^2 - 3$$
$$\iff a_n^2 + 4a_{n-1}^2 - 4a_n \cdot a_{n-1} = 3a_{n-1}^2 - 3 \iff a_n^2 + a_{n-1}^2 - 4a_n \cdot a_{n-1} = -3$$
$$\iff 4a_n^2 + a_{n-1}^2 - 4a_n \cdot a_{n-1} = 3a_n^2 - 3 \iff (2a_n - a_{n-1})^2 = 3(a_n^2 - 1) \ .$$

Her er parentesen positiv, så vi efter definitionen af talfølgen får

$$2a_n - a_{n-1} = \sqrt{3(a_n^2 - 1)} \iff 2a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - 2a_n \iff a_{n+1} = 4a_n - a_{n-1} \ .$$

Her er altså hvert led i talfølgen udtrykt ved en naturlig linearkombination af de to foregående led, og da $a_1 = 1$ og $a_2 = 2$ er naturlige tal, gælder det samme for alle led i talfølgen.

Generalisering. Vi viser, at talfølgen (a_n) bestemt ved

$$a_1 = c \quad , \quad a_{n+1} = ca_n + \sqrt{(c^2 - 1)(a_n^2 - 1)} \quad \text{hvor } n > 1 \text{ og } c \in N \qquad (1)$$

består af lutter naturlige tal. Vi omskriver sådan:

$$a_{n+1} = ca_n + \sqrt{(c^2 - 1)(a_n^2 - 1)} \iff (a_n - ca_{n-1})^2 = (c^2 - 1)a_{n-1}^2 - c^2 + 1$$
$$\iff a_n^2 + c^2 a_{n-1}^2 = 2ca_n a_{n-1} = (c^2 - 1)a_{n-1} - c^2 + 1$$
$$\iff a_n^2 + a_{n-1}^2 - 2ca_n a_{n-1} = 1 - c^2$$
$$\iff c^2 a_n^2 + a_{n-1}^2 - 2ca_n a_{n-1} = 1 - c^2 + (c^2 - 1)a_n^2$$
$$\iff (ca_n - a_{n-1})^2 = (c^2 - 1)(a_n^2 - 1) \ . \qquad (2)$$

Efter definitonen (1) har vi at $a_{n+1} > ca_n$ eller $a_n > ca_{n-1}$ så

$$ca_n > c^2 a_{n-1} \geq a_{n-1} \ .$$

Altså er (2) ensbetydende med

$$ca_n - a_{n-1} = \sqrt{(c^2-1)(a_n{}^2-1)} \ ,$$

og efter (1) med

$$ca_n - a_{n-1} = a_{n+1} - ca_n \iff a_{n+1} = 2ca_n - a_{n-1} \ ,$$

og dermed er a_{n+1} et naturligt tal.

Bemærkning. Kjeld Ejrnæs, Tønder, nævner, at rekursionen

$$a_{n+2} = 4a_{n+1} - a_n$$

efter teorien for rekursive talfølger har den karakteristiske ligning

$$q^2 = 4q - 1 \iff q = 2 \pm \sqrt{3} \ .$$

Dermed er den eksplicitte formel for talfølgen elementer:

$$a_n = A \cdot (2+\sqrt{3})^{n-1} + B \cdot (2-\sqrt{3})^{n-1} \ .$$

For at finde tallene A og B sætter vi n = 1 og n = 2 og får

$$a_1 = 1 = A + B \quad \text{og} \quad a_2 = 2 = A \cdot (2+\sqrt{3}) + B \cdot (2-\sqrt{3}) \ ,$$

hvilket giver $A = B = \frac{1}{2}$.

Dermed har vi det eksplicitte udtryk $a_n = \frac{1}{2}((2+\sqrt{3})^{n-1} + (2-\sqrt{3})^{n-1})$.