Svar på opgave 252 (September 2008)

Opgave:

a. Vis, at ΔABC er retvinklet netop hvis

$$\cos\tfrac{A}{2}\cdot\cos\tfrac{B}{2}\cdot\cos\tfrac{C}{2}-\sin\tfrac{A}{2}\cdot\sin\tfrac{B}{2}\cdot\sin\tfrac{C}{2}=\tfrac{1}{2}\ .$$

b. Vis, at ΔABC er retvinklet netop hvis

$$a^3+b^3+c^3=ab(a+b)+ac(a+c)-bc(b+c)\ .$$

Besvarelse:

a.

1. metode.

Vi sætter $\frac{A}{2}=\frac{\pi}{4}+v$, hvor $v<\frac{\pi}{4}$. Så er

$$\frac{B+C}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}=\frac{\pi}{4}-v\ ,$$

og ligningen er ensbetydende med

$$\cos(\tfrac{\pi}{4}+v)\mathrm{A}\cos\tfrac{B}{2}\ \mathrm{A}\ \cos\tfrac{C}{2}-\sin(\tfrac{\pi}{4}+v)\mathrm{A}\ \sin\tfrac{B}{2}\ \mathrm{A}\ \sin\tfrac{C}{2}=\tfrac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow\ (\tfrac{\sqrt{2}}{2}\cos v-\tfrac{\sqrt{2}}{2}\sin v)\ \mathrm{A}\cos\tfrac{B}{2}\ \mathrm{A}\ \cos\tfrac{C}{2}-(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\cos v+\tfrac{\sqrt{2}}{2}\sin v)\ \mathrm{A}\sin\tfrac{B}{2}\ \mathrm{A}\ \sin\tfrac{C}{2}=\tfrac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow\ \cos v\cdot(\cos\tfrac{B}{2}\ \mathrm{A}\ \cos\tfrac{C}{2}-\sin\tfrac{B}{2}\ \mathrm{A}\ \sin\tfrac{C}{2})-\sin v(\cos\tfrac{B}{2}\ \mathrm{A}\ \cos\tfrac{C}{2}+\sin\tfrac{B}{2}\ \mathrm{A}\ \sin\tfrac{C}{2})=\tfrac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow\ \cos v\mathrm{A}\ \cos\tfrac{B+C}{2}-\sin v\mathrm{A}\ \cos\tfrac{B-C}{2}=\tfrac{\sqrt{2}}{2}\ \Leftrightarrow\ \cos v\mathrm{A}\ \cos(\tfrac{\pi}{4}-v)-\sin v\mathrm{A}\ \cos\tfrac{B-C}{2}=\tfrac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow\ \cos v\mathrm{A}\ (\tfrac{\sqrt{2}}{2}\cos v+\tfrac{\sqrt{2}}{2}\sin v)-\sin v\mathrm{A}\ \cos\tfrac{B-C}{2}=\tfrac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow\ \tfrac{\sqrt{2}}{2}(\cos^2 v+\cos v\mathrm{A}\ \sin v)-\sin v\mathrm{A}\ \cos\tfrac{B-C}{2}=\tfrac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow\ \tfrac{\sqrt{2}}{2}(1-\sin^2 v+\cos v\mathrm{A}\ \sin v)-\sin v\mathrm{A}\ \cos\tfrac{B-C}{2}=\tfrac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow\ \sin v\ \mathrm{A}\,(\tfrac{\sqrt{2}}{2}(\cos v-\sin v)-\cos\tfrac{B-C}{2})=0$$

$$\Leftrightarrow\ \sin v\ \mathrm{A}\,(\tfrac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2}\cos(\tfrac{\pi}{4}+v)-\cos\tfrac{B-C}{2})=0$$

$$\Leftrightarrow\ \sin v\mathrm{A}\ (\cos\tfrac{A}{2}-\cos\tfrac{B-C}{2})=0\ \Leftrightarrow\ \sin v\mathrm{A}\ 2\sin\tfrac{A+B-C}{4}\ \mathrm{A}\ \sin\tfrac{A-B+C}{4}=0$$

$$\Leftrightarrow\ \sin\tfrac{2A-\pi}{4}\ \mathrm{A}\ \sin\tfrac{\pi-2C}{4}\ \mathrm{A}\ \sin\tfrac{\pi-2B}{4}=0\ .$$

Her er mindst en af faktorerne 0, så $A=\frac{\pi}{2}$ eller $B=\frac{\pi}{2}$ eller $C=\frac{\pi}{2}$.

2. metode.
Ved hjælp af det trigonometriske formelmaskineri i den almindelige trekant får vi de velkendte formler:

$$\sin\tfrac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}} \quad , \ \sin\tfrac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}} \quad , \ \sin\tfrac{C}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}} \quad .$$

Multiplikation giver ved hjælp af Herons formel og formlerne $4RT = abc$ og $T = r$A s, at

$$\sin\tfrac{A}{2}\ \mathrm{A}\ \sin\tfrac{B}{2}\ \mathrm{A}\ \sin\tfrac{C}{2} = \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{abc} = \frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{sabc}$$

$$= \frac{T^2}{s\cdot 4RT} = \frac{T}{s\cdot 4R} = \frac{rs}{s\cdot 4R} = \frac{r}{4R} \ .$$

De tilsvarende formler for cosinus er

$$\cos\tfrac{A}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}} \quad , \ \cos\tfrac{B}{2} = \sqrt{\frac{s(s-b)}{ac}} \quad , \ \cos\tfrac{C}{2} = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}} \ ,$$

hvoraf ved lignende regninger:

$$\cos\tfrac{A}{2}\ \mathrm{A}\ \cos\tfrac{B}{2}\ \mathrm{A}\ \cos\tfrac{C}{2} = \frac{s}{4R} \ .$$

Så har vi:

$$\cos\tfrac{A}{2}\ \mathrm{A}\ \cos\tfrac{B}{2}\ \mathrm{A}\ \cos\tfrac{C}{2} - \sin\tfrac{A}{2}\ \mathrm{A}\ \sin\tfrac{B}{2}\ \mathrm{A}\ \sin\tfrac{C}{2} = \tfrac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{s}{4R} - \frac{r}{4R} = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 2R + r = s \ .$$

Vi skal derfor vise, at ΔABC er retvinklet netop hvis $2R + r = s$.

I. Hvis $C = 90°$, er $2R = c$ og $r = \tfrac{1}{2}(a + b - c)$ og dermed

$$2R + r = c + \tfrac{1}{2}(a + b - c) = \tfrac{1}{2}(a + b + c) = s \ .$$

II. Antag så, at $2R + r = s$. Vi skal vise, at trekanten er retvinklet. Vi har at

$$2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{a(1+\tan^2\frac{A}{2})}{2\tan\frac{A}{2}} \quad \text{og} \quad r = (s - a)\tan\tfrac{A}{2} \ .$$

Dermed er

$$\frac{a(1+\tan^2\frac{A}{2})}{2\tan\frac{A}{2}} + (s - a)\tan\tfrac{A}{2} = s$$

For nemheds skyld sætter vi $x = \tan\frac{A}{2}$, så ligningen kan omskrives til

$$\frac{a(1+x^2)}{2x} + (s - a)x = s \ \Leftrightarrow \ a + ax^2 + 2x^2s - 2ax^2 = 2xs \ \Leftrightarrow \ (1 - x)(a + ax - 2sx) = 0 \ .$$

Enten er $x = 1$, så $\tan\frac{A}{2} = 1$, hvoraf $A = 90°$. Eller vi har

$$a + ax - 2sx = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{a}{2s-a} \quad \Leftrightarrow \quad \tan\tfrac{A}{2} = \frac{a}{b+c} \ .$$

Det gælder om at vise, at ΔABC også i dette tilfælde er retvinklet.

Vi omskriver sådan:

$$\tan\tfrac{A}{2} = \frac{a}{b+c} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sin A}{1+\cos A} = \frac{2R\cdot\sin A}{2R\cdot(\sin B+\sin C)} \quad \Leftrightarrow \quad \sin B + \sin C = 1 + \cos A$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sin\tfrac{B+C}{2}\ \text{A}\ \cos\tfrac{B-C}{2} = 2\cos^2\tfrac{A}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \sin\tfrac{B+C}{2}\ \text{A}\ \cos\tfrac{B-C}{2} - \cos^2\tfrac{A}{2} = 0$$

Da $\frac{B+C}{2} = 90° - \frac{A}{2}$ er dette ensbetydende med

$$\cos\tfrac{A}{2}\left(\cos\tfrac{B-C}{2} - \cos\tfrac{A}{2}\right) = 0 \quad \_\_ \quad \cos\tfrac{B-C}{2} = \cos\tfrac{A}{2} \ .$$

Heraf følger, at

$$B - C = A \quad \text{eller} \quad C - B = A \ .$$

I det første tilfælde har vi

$$2B = (B - C) + (B + C) = A + (180° - A) = 180° \quad \text{så} \quad B = 90° \ ,$$

i det andet:

$$2C = (C - B) + (C + B) = A + (180° - A) = 180° \quad \text{så} \quad C = 90° \ .$$

For at vise, at ligningen

$$\tan\tfrac{A}{2} = \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}+\mathrm{c}}$$

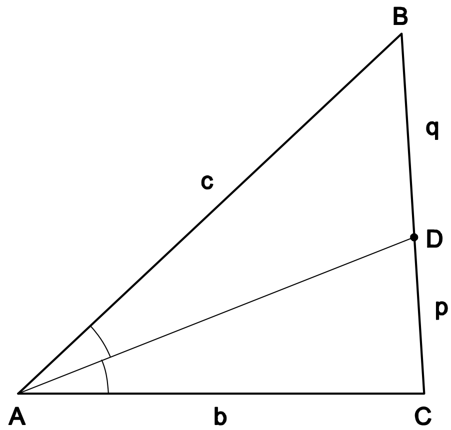
medfører, at ΔABC er retvinklet, kan vi måske klare sagen simplere. Hvis AD er vinkelhalveringslinje fra A gælder om de stykker p og q, som D deler siden BC i, at

$$p + q = a \quad \text{og} \quad \frac{p}{q} = \frac{b}{c} \quad \text{hvoraf} \quad p = \frac{ab}{b+c} \ ,$$

så vi får

$$\tan\tfrac{A}{2} = \frac{a}{b+c} = \frac{p}{b} \ .$$

Dette medfører, at C er ret.



---

b.

Vi ser på ligningen:

$$a^3 + b^3 + c^3 = ab(a+b) + ac(a+c) - bc(b+c)$$

og omskriver sådan:

$$a^3 + b^3 + c^3 - ab(a+b) - ac(a+c) + bc(b+c)$$
$$= a^3 + b^3 + c^3 - a^2b - ab^2 - a^2c - ac^2 + b^2c + bc^2$$
$$= (a^3 - ab^2 - ac^2) - (a^2b - b^3 - bc^2) - (a^2c - b^2c - c^3)$$
$$= a(a^2 - b^2 - c^2) - b(a^2 - b^2 - c^2) - c(a^2 - b^2 - c^2) = (a - b - c)(a^2 - b^2 - c^2) \ .$$

Da a, b og c er sider i en trekant, er $a - b - c \neq 0$ og derfor gælder

$$a^3 + b^3 + c^3 = ab(a+b) + ac(a+c) - bc(b+c)$$

$$\Leftrightarrow \quad (a - b - c)(a^2 - b^2 - c^2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 = b^2 + c^2 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta ABC \text{ er retvinklet.}$$