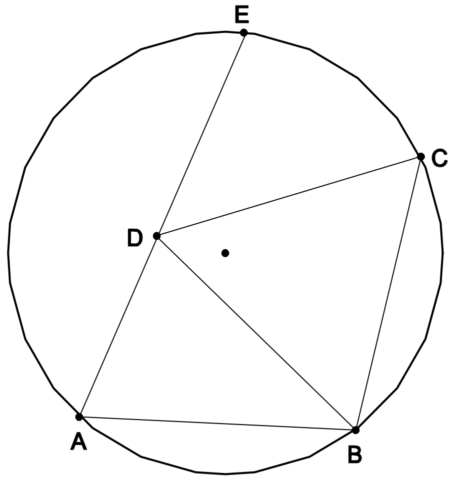
Svar på opgave 250
(Maj 2008)

Opgave:

I en cirkel er korderne *BA* og *BC* lige lange.
Punktet *D* ligger i cirklen, så ΔBCD er ligesidet.
AD skærer cirklen i *E*.
Vis, at længden af *DE* er lig med cirklens radius.



Besvarelse:

1. *metode.*

Sæt $\angle DBA = 2x$. Så er $\angle CBA = 60° + x$, og da ΔBAC er ligebenet, finder vi at

$$\angle BAC = \tfrac{1}{2}(180° - \angle CBA) = 90° - \tfrac{1}{2}\cdot\angle CBA =$$
$$0° - (30° + x) = 60° - x$$

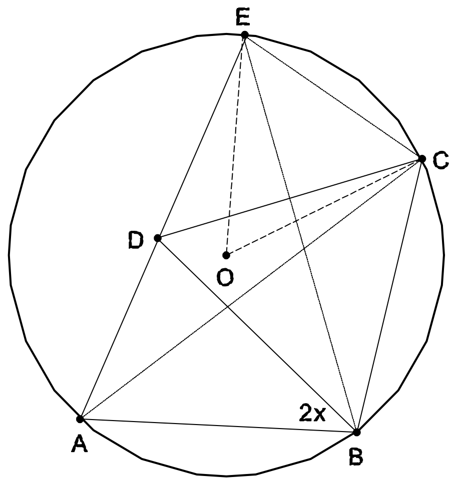
Da ΔABD er ligebenet med $BD = BA$ og $\angle DBA = 2x$, er $\angle DAB = 90° - x$ og dermed

$$\angle EAC = \angle DAC = \angle DAB - \angle CAB = 90° - x - (60° - x) = 30°.$$

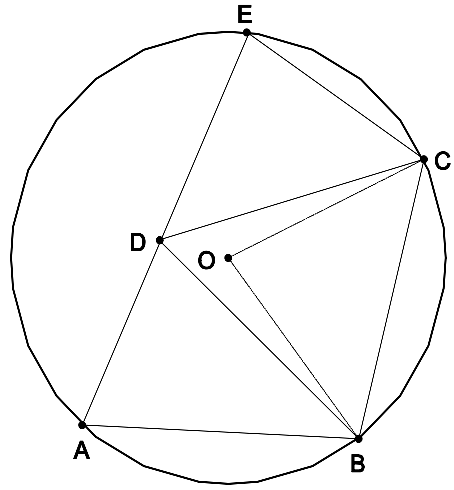
Vi trækker *BE*, og lige store periferivinkler giver

$$\angle EAC = \angle EBC = 30° .$$

Da ΔBCD er ligesidet, må så *BE* være vinkelhalveringslinje for $\angle CBD$ og samtidig midtnormal for *CD*. Derfor er $DE = EC$. Desuden er $\overset{\frown}{EC} = 60°$ (nemlig det dobbelte af $\angle EAC$). Men så er ΔEOC ligesidet, så $EC = OC$, og da desuden $EC = ED$, er $ED = r$ som ønsket.



2. metode.



Sæt $v = \angle OBC$. I den ligebenede ΔOBC fås, at $\angle BOC = 180° - 2v$, og der-for

$\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{AB} = 180° - 2v$ så $\overset{\frown}{CEA} = 360° - \overset{\frown}{BC} - \overset{\frown}{AB} = 4v$.

Men så er

$$\angle ABC = \tfrac{1}{2} \cdot \overset{\frown}{CEA} = 2v ,$$

så $\angle ABD = 2v - 60°$. I den ligebenede ΔBDA er så

$$\angle ADB = \tfrac{1}{2} \cdot (180° - (2v - 60°)) = 120° - v.$$

Heraf fås

$\angle EDC = 180° - \angle CDB - \angle ADB = 180° - 60° - (120° - v) = v$.

Nu er $\square AECB$ indskrivelig, så summen af modstående vinkler er 180°, og derfor

$$\angle DEC = 180° - \angle ABC = 180° - 2v ,$$

og i ΔDEC fås derefter

$$\angle DCE = 180° - \angle EDC - \angle DEC = 180° - v - (180° - 2v) = v .$$

Nu har ΔOCB og ΔEDC de samme vinkler, de er ligebenede og da $BC = DC$, er de kongruente. Altså er $OB = DE$.