Svar på opgave 246 (Januar 2008)

Opgave:

Vi har, at

$$\left(\sqrt{7}+\sqrt{6}\right)^3=\sqrt{4375}+\sqrt{4374} \quad \text{og} \quad \left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^4=\sqrt{2401}+\sqrt{2400}\ .$$

Vis i almindelighed, at en potens af en sum af to konsekutive kvadratrødder selv kan skrives som en sum af to konsekutive kvadratrødder, dvs. hvis p og q er naturlige tal, findes der et naturligt tal x, så

$$\left(\sqrt{p}+\sqrt{p-1}\right)^q=\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\ .$$

Besvarelse:

Vi deler op efter pariteten af q.

I. *q* lige

Binomialformlen giver

$$\left(\sqrt{p}+\sqrt{p-1}\right)^q=\sqrt{p}^q+\binom{q}{1}\sqrt{p}^{q-1}\cdot\sqrt{p-1}+\binom{q}{2}\sqrt{p}^{q-2}\cdot\sqrt{p-1}^2$$
$$+\cdots+\binom{q}{q-2}\sqrt{p}^2\cdot\sqrt{p-1}^{q-2}+\binom{q}{q-1}\sqrt{p}\cdot\sqrt{p-1}^{q-1}+\sqrt{p-1}^q\ .$$

Hvert andet af disse led indeholder kun lige eksponenter. Sådanne led er naturlige tal og summen af disse betegner vi med a. De øvrige led indeholder kun ulige eksponenter. Summen af disse led kan skrives på formen $b\cdot\sqrt{p(p-1)}$. Dermed har vi

$$\left(\sqrt{p}+\sqrt{p-1}\right)^q=a+b\sqrt{p(p-1)} \quad , \quad a,b\in N\ .$$

Nu er

$$a+b\sqrt{p(p-1)}=\sqrt{a^2}+\sqrt{b^2p(p-1)} \quad ,$$

så hvis vi kan vise, at

$$a^2 - b^2p(p - 1) = 1\ ,$$

følger det, at

$$a+b\sqrt{p(p-1)}=\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\ ,$$

hvor $x = a^2$ og $x - 1 = b^2p(p - 1)$. Hertil ser vi på

$$\left(\sqrt{p}-\sqrt{p-1}\right)^q=\sqrt{p}^{\,q}-\binom{q}{1}\sqrt{p}^{\,q-1}\cdot\sqrt{p-1}+\binom{q}{2}\sqrt{p}^{\,q-2}\cdot\sqrt{p-1}^{\,2}$$
$$-\cdots+\binom{q}{q-2}\sqrt{p}^{\,2}\cdot\sqrt{p-1}^{\,q-2}-\binom{q}{q-1}\sqrt{p}\cdot\sqrt{p-1}^{\,q-1}+\sqrt{p-1}^{\,q}=a-b\sqrt{p(p-1)}$$

med samme betydning af a og b som før. Multiplikation giver

$$\left(\sqrt{p}+\sqrt{p-1}\right)^q\cdot\left(\sqrt{p}-\sqrt{p-1}\right)^q=\left(a+b\sqrt{p(p-1)}\right)\left(a-b\sqrt{p(p-1)}\right)$$
$$\Leftrightarrow\quad 1=(p-(p-1))^q=a^2-b^2p(p-1)\ ,$$

og dette var netop, hvad vi ønskede at vise.

II. *q* ulige

Binomialformlen giver igen

$$\left(\sqrt{p}+\sqrt{p-1}\right)^q=\sqrt{p}^{\,q}+\binom{q}{1}\sqrt{p}^{\,q-1}\cdot\sqrt{p-1}+\binom{q}{2}\sqrt{p}^{\,q-2}\cdot\sqrt{p-1}^{\,2}$$
$$+\cdots+\binom{q}{q-2}\sqrt{p}^{\,2}\cdot\sqrt{p-1}^{\,q-2}+\binom{q}{q-1}\sqrt{p}\cdot\sqrt{p-1}^{\,q-1}+\sqrt{p-1}^{\,q}\ .$$

Her indeholder hvert led et produkt af en faktor med ulige eksponent og en faktor med lige eksponent. Hvert sådant led er derfor af formen $c\sqrt{p}$ eller $d\sqrt{p-1}$, hvor c og d er naturlige tal. Dermed kan vi skrive

$$\left(\sqrt{p}+\sqrt{p-1}\right)^q=c\sqrt{p}+d\sqrt{p-1}=\sqrt{c^2p}+\sqrt{d^2(p-1)}$$

og

$$\left(\sqrt{p}-\sqrt{p-1}\right)^q=c\sqrt{p}-d\sqrt{p-1}\ ,$$

hvoraf

$$\left(\sqrt{p}+\sqrt{p-1}\right)\cdot\left(\sqrt{p}-\sqrt{p-1}\right)=\left(c\sqrt{p}+d\sqrt{p-1}\right)\cdot\left(c\sqrt{p}-d\sqrt{p-1}\right)$$
$$\Leftrightarrow\quad 1=c^2p-d^2(p-1)\ .$$

Dermed er

$$\left(\sqrt{p}+\sqrt{p-1}\right)^q=\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\ ,$$

hvor $x=c^2p$ og $x-1=d^2(p-1)$.

Eksempler.

Vi kan illustrere metoderne oven for med et par taleksempler.

Lad os først udregne $\left(\sqrt{7}+\sqrt{6}\right)^3$, hvor $q = 3$ er ulige. Vi får

$$\left(\sqrt{7}+\sqrt{6}\right)^3 = \sqrt{7}^3 + 3\cdot\sqrt{7}^2\cdot\sqrt{6} + 3\cdot\sqrt{7}\cdot\sqrt{6}^2 + \sqrt{6}^3 = 25\sqrt{7} + 27\sqrt{6} \ .$$

Her er $c = 25$ og $d = 27$ og

$$x = c^2p = 25^2\cdot 7 = 4375 \quad \text{og} \quad x - 1 = d^2(p - 1) = 27^2\cdot 6 = 4374 \ ,$$

så vi får den ønskede fremstilling

$$\left(\sqrt{7}+\sqrt{6}\right)^3 = \sqrt{4375} + \sqrt{4374} \ .$$

På samme måde findes

$$\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^4 = 49 + 20\sqrt{6} = \sqrt{49^3} + \sqrt{6\cdot 20^2} = \sqrt{2401} + \sqrt{2400} \ .$$

Der er tilsyneladende ingen simpel metode til at bestemme de to søgte rødders radikan- der. Man kunne måske tænke sig at løse ligningen

$$\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^4 = \sqrt{x} + \sqrt{x-1}$$

eller, hvis vi for nemheds skyld sætter $k = \sqrt{3}+\sqrt{2}$, kan vi ved hjælp af symbolregner (eller håndkraft!) løse

$$\sqrt{x} + \sqrt{x-1} = k^4 \ ,$$

og vi får

$$x = \left(\frac{k^8+1}{2k^4}\right)^2 \ .$$

Men nu er problemet selvfølgelig at vise, at denne værdi for x er hel, og hvordan gør man det?

Der er modtaget 8 besvarelser.