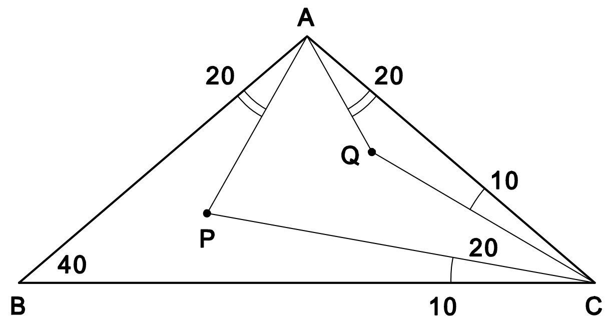
# Svar på opgave 245 (December 2007)

## *Opgave:*




ΔABC er ligebenet med $\angle B = \angle C = 40°$.
Punkterne P og Q ligger i det indre af trekanten så

$$\angle PAB = \angle QAC = 20° \text{ og } \angle PCB = \angle QCA = 10°.$$

Vis, at B, P og Q ligger på linje.

## *Besvarelse:*

***1. metode***

Punkterne $P$ og $Q$ forbindes med $B$. Cevas sætning på trigonometrisk form (se Jens Carstensen; *Plangeomeri*, Systime, 1992) giver for punktet $P$:

$$\frac{\sin\angle CBP \cdot \sin\angle BAP \cdot \sin\angle PCA}{\sin\angle PBA \cdot \sin\angle PAC \cdot \sin\angle PCB} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sin\angle CBP \cdot \sin 20° \cdot \sin 30°}{\sin\angle PBA \cdot \sin 80° \cdot \sin 10°} = 1$$

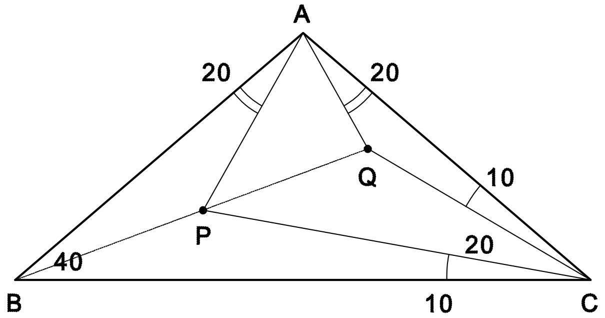
$$\frac{\sin\angle CBP}{\sin\angle PBA} = \frac{\sin 80° \cdot \sin 10°}{\sin 20° \cdot \sin 30°} = \frac{\cos 10° \cdot \sin 10°}{\frac{1}{2} \cdot \sin 20°} = 1 \ .$$

Heraf får vi, at $\angle CBP = \angle PBA = 20°$. For punktet Q fås tilsvarende

$$\frac{\sin\angle CBQ \cdot \sin\angle BAQ \cdot \sin\angle QCA}{\sin\angle QBA \cdot \sin\angle QAC \cdot \sin\angle QCB} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sin\angle CBQ \cdot \sin 80° \cdot \sin 10°}{\sin\angle QBA \cdot \sin 20° \cdot \sin 30°} = 1$$

$$\frac{\sin\angle CBQ}{\sin\angle QBA} = \frac{\sin 20° \cdot \sin 30°}{\sin 80° \cdot \sin 10°} = 1 \ ,$$

så $\angle QBA = \angle CBQ = 20°$.
Vi kan derfor slutte, at $P$ og $Q$ ligger på vinkelhalveringslinjen for $B$.




***2. metode*** (Hans Christian Hulvej, Tranbjerg J.)

Da *AQ* og *AP* danner samme vinkel (nemlig 20°) med siderne *AC* og *AB* og *CQ* og *CP* danner samme vinkel (nemlig 10°) med siderne *CA* og *CB*, er *P* og *Q* såkaldt *isogonalt konjugerede* (se Jens Carstensen: *Geometri og keglesnit*, Systime, 1996). Da vil også *BP* og *BQ* danne samme vinkel med siderne *BC* og *BA*. Altså vil *B*, *P* og *Q* ligge på linje, hvis *BP* er en del af vinkelhalveringslinjen for *B*.

Vi ser, at $\angle PAC = 80°$ og $\angle APC = 70°$, så sinusrelationen i $\Delta APC$ giver

$$\frac{AP}{\sin 30°} = \frac{AC}{\sin 70°} = \frac{CP}{\sin 80°} \ ,$$

hvoraf

$$AP = \frac{AC \cdot \sin 30°}{\sin 70°} \quad \text{og} \quad CP = \frac{AC \cdot \sin 80°}{\sin 70°} \ .$$

Afstanden fra *P* til siden *AB* er

$$\text{dist}(P, AB) = AP \cdot \sin 20° = \frac{AC \cdot \sin 30° \cdot \sin 20°}{\sin 70°} \ ,$$

mens afstanden fra *P* til siden *BC* er

$$\text{dist}(P, BC) = \text{C}P \cdot \sin 10° = \frac{AC \cdot \sin 80° \cdot \sin 10°}{\sin 70°} \ .$$

Disse afstande er lige store, fordi

$$\text{dist}(P, AB) = \text{dist}(P, BC) \quad \Leftrightarrow \quad \sin 30° \cdot \sin 20° = \sin 80° \cdot \sin 10°$$

$$\Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{2} \cdot \sin 20° = \cos 10° \cdot \sin 10° \quad \Leftrightarrow \quad \sin 20° = 2 \cdot \cos 10° \cdot \sin 10° \ ,$$

hvilket er sandt.

Altså ligger *P* på halveringslinjen for vinkel *B*.