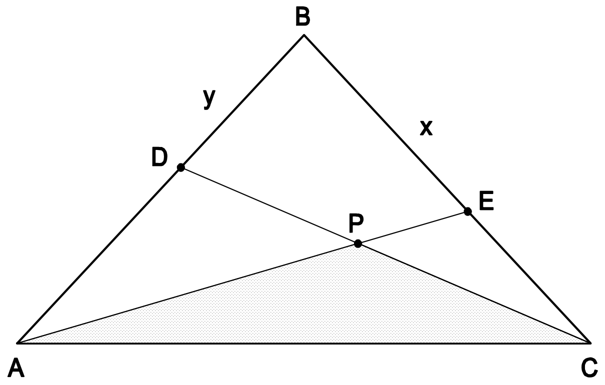
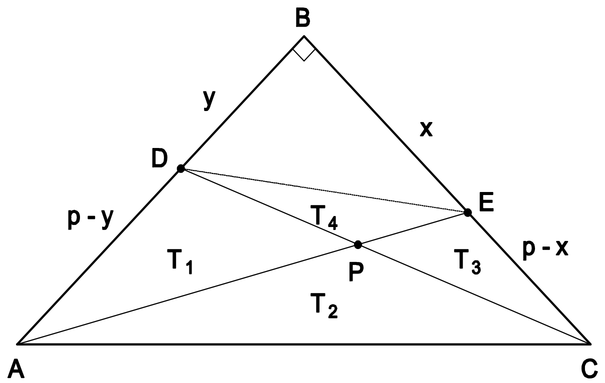
Svar på opgave 243 (Oktober 2007)

Opgave:



ΔABC er ligebenet og retvinklet, $BA = BC = p$, $B = 90°$. Punkterne D og E ligger på BA og BC, så $BE = x$, og $BD = y$. AE og CD skærer hinanden i P. Bestem arealet af ΔACP som funktion af længderne x, y og p.

Besvarelse:



Vi sætter $p = BA = BC$. For nemheds skyld indfører vi følgende betegnelser for arealerne på figuren:

$T_1 = [\mathrm{APD}]$, $T_2 = [\mathrm{ACP}]$, $T_3 = [\mathrm{CPE}]$, $T_4 = [\mathrm{DPE}]$.

Så er

$$T_1 + T_2 = \tfrac{1}{2} \cdot BC \cdot DA = \tfrac{1}{2} \cdot p \cdot (p - y) \qquad (1)$$

$$T_1 + T_4 = \tfrac{1}{2} \cdot BE \cdot DA = \tfrac{1}{2} \cdot x \cdot (p - y) \qquad (2)$$

$$T_2 + T_3 = \tfrac{1}{2} \cdot AB \cdot CE = \tfrac{1}{2} \cdot p \cdot (p - x) \qquad (3)$$

Desuden er

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{DP}{CP} = \frac{T_4}{T_3} \quad \text{så} \quad \frac{T_1}{T_2} = \frac{T_1 + T_4}{T_2 + T_3} \ ,$$

og ved hjælp af (2) og (3) fås

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\frac{1}{2}x(p-y)}{\frac{1}{2}p(p-x)} \quad \Leftrightarrow \quad T_1 = \frac{x(p-y)}{p(p-x)}T_2$$

Dette sættes ind i (1):

$$\frac{x(p-y)}{p(p-x)}T_2 + T_2 = \tfrac{1}{2}p(p-y) \quad \Leftrightarrow \quad \text{Arealet af } \Delta ACP = T_2 = \underline{\underline{\frac{p^2(p-x)(p-y)}{2(p^2-xy)}}}$$

Hvis specielt $x = y$ fås

$$\text{Arealet af } \Delta ACP = T_2 = \frac{p^2(p-x)^2}{2(p^2-x^2)} = \frac{p^2(p-x)}{2(p+x)}$$