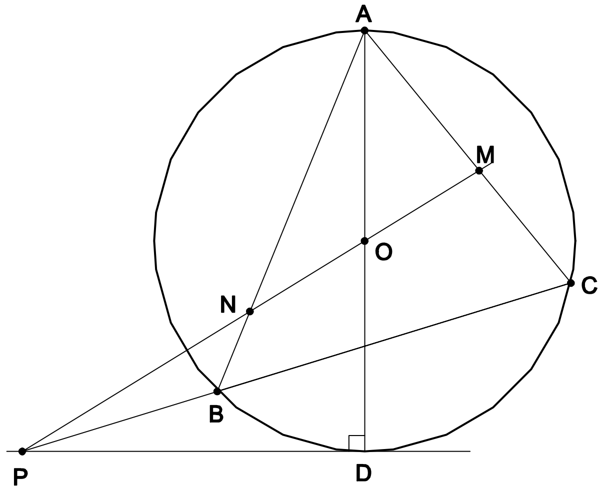
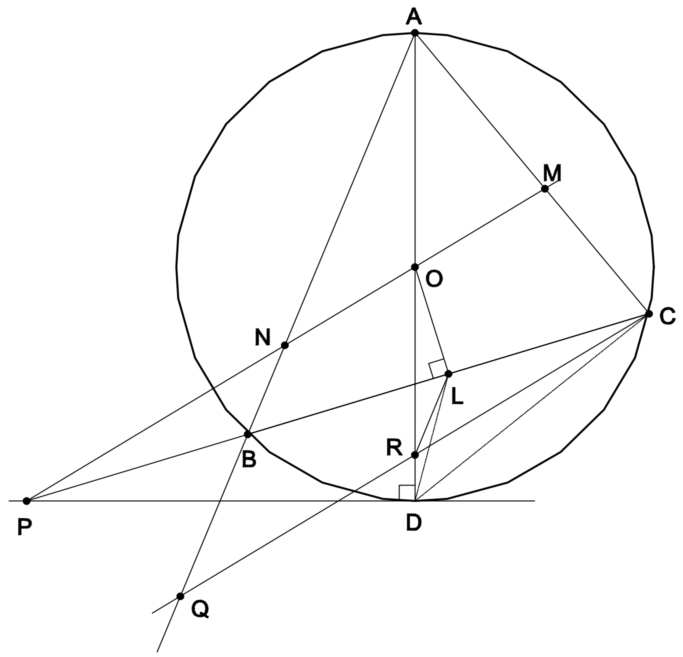
Svar på opgave 241 (August 2007)

Opgave:

Lad O være centrum for den omskrevne cirkel for ΔABC og lad AD være diameter i cirklen. Tangenten til cirklen i D skærer BC i P. Linjen PO skærer AC og AB i M og N.
Vis, at O er midtpunkt af MN.



Besvarelse:



O er centrum for den omskrevne cirkel i ΔABC og AD er diameter i cirklen. Tangenten til cirklen i D skærer BC i P. Linjen PO skærer AC og AB i M og N. Vi skal vise, at O er midtpunkt af MN.

Gennem C trækkes en linje parallel med MN. Den skærer AB i Q. Skæringspunktet mellem AD og CQ er R. Da $MN \parallel CQ$, er ΔAMN og ΔACQ ensvinklede. For at vise, at $OM = ON$ er det derfor nok at vise, at $RC = RQ$.

Lad L være midtpunktet af BC. Vi viser, at $LR \parallel BQ$, hvilket vil medføre det ønskede: at R er midtpunkt af CQ.

Da L er midtpunkt af korden BC, er

$$\angle OLP = \angle OLB = 90° = \angle ODP \ .$$

Derfor er $\square OLDP$ indskrivelig, så

$$\angle ODL = \angle OPL = v \ ,$$

og da $OP \parallel RC$, er

$$\angle RCL = \angle OPL = v \ .$$

Men så er $\square LRDC$ indskrivelig og dermed

$$\angle RLC = 180° - \angle RDC = 180° - \angle ADC = 180° - \angle ABC = \angle QBC \ .$$

Da så $\angle RLC = \angle QBC$, er $LR \parallel BQ$ som ønsket.