Svar på opgave 234 (November 2006)

Opgave:

Vis, at der i enhver ΔABC gælder

a. $\cot A + \cot B + \cot C \geq \sqrt{3}$

b. $\tan\frac{A}{2}\cdot\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}\cdot\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}\cdot\tan\frac{A}{2} = 1$

c. $\tan\frac{A}{2}\cdot\tan\frac{B}{2}\cdot\tan\frac{C}{2} \leq \frac{\sqrt{3}}{9}$

Besvarelse:

a. Vi skal vise, at der i enhver ΔABC gælder

$$\cot A + \cot B + \cot C \geq \sqrt{3}.$$

Vi foretager følgende omskrivning:

$$\cot A + \cot B = \frac{\cos A}{\sin A} + \frac{\cos B}{\sin B} = \frac{\cos A\cdot\sin B + \cos B\cdot\sin A}{\sin A\cdot\sin B} = \frac{\sin(A+B)}{\sin A\cdot\sin B}$$

$$= \frac{2\sin C}{\cos(A-B) - \cos(A+B)} = \frac{2\sin C}{\cos(A-B) + \cos C}$$

$$\geq \frac{2\sin C}{1+\cos C} = \frac{4\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}{2\cos^2\frac{C}{2}} = 2\tan\frac{C}{2}\ .$$

Dermed er

$$\cot A + \cot B + \cot C \geq 2\tan\frac{C}{2} + \cot C\ .$$

Nu har vi

$$2\tan\frac{C}{2} + \cot C = 2\tan\frac{C}{2} + \frac{\cot^2\frac{C}{2} - 1}{2\cot\frac{C}{2}} = \frac{\cot^2\frac{C}{2} + 3}{2\cot\frac{C}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\cot\frac{C}{2} + 3\tan\frac{C}{2}\right) \geq \sqrt{\cot\frac{C}{2}\cdot 3\tan\frac{C}{2}} = \sqrt{3}\ .$$

Ved det sidste ulighedstegn har vi benyttet uligheden mellem aritmetisk og geometrisk middeltal.

Se flere svarmuligheder i februar-nummeret af *MatematikMagasinet*.

b. Vi skal vise, at der i enhver ΔABC gælder, at

$$\tan\frac{A}{2}\cdot\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}\cdot\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}\cdot\tan\frac{A}{2} = 1\ .$$

Vi benytter de (kendte?) formler for trekanten:

$$\tan\tfrac{A}{2} = \frac{r}{s-a} \quad , \quad \tan\tfrac{B}{2} = \frac{r}{s-b} \quad , \quad \tan\tfrac{C}{2} = \frac{r}{s-c} \quad ,$$

hvor s er den halve omkreds og r radius i den indskrevne cirkel. Vi skal vise, at

$$\frac{r^2}{(s-a)(s-b)} + \frac{r^2}{(s-b)(s-c)} + \frac{r^2}{(s-c)(s-a)} = 1 \ . \tag{1}$$

Nu gælder efter Herons formel, at

$$T^2 = r^2 s^2 = s(s - a)(s - b)(s - c) \quad \text{så} \quad r^2 = \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s} \ .$$

Derfor er (1) ensbetydende med

$$\frac{s-c}{s} + \frac{s-a}{s} + \frac{s-b}{s} = 1 \quad \text{eller} \quad \frac{3s-(a+b+c)}{s} = 1 \ ,$$

hvilket er sandt.

Se flere svarmuligheder i februar-nummeret af *MatematikMagasinet*.

c. Vi skal vise, at der i enhver ΔABC gælder, at

$$\tan\tfrac{A}{2} \cdot \tan\tfrac{B}{2} \cdot \tan\tfrac{C}{2} \ \leq \ \frac{\sqrt{3}}{9} \ .$$

Vi bruger uligheden mellem aritmetisk og geometrisk middeltal og får ved hjælp af opgave b, at

$$1 = \tan\tfrac{A}{2} \cdot \tan\tfrac{B}{2} + \tan\tfrac{B}{2} \cdot \tan\tfrac{C}{2} + \tan\tfrac{C}{2} \cdot \tan\tfrac{A}{2} \ \geq \ 3\sqrt[3]{(\tan\tfrac{A}{2} \cdot \tan\tfrac{B}{2} \cdot \tan\tfrac{C}{2})^2} \quad ,$$

hvoraf

$$\tfrac{1}{27} \geq (\tan\tfrac{A}{2} \cdot \tan\tfrac{B}{2} \cdot \tan\tfrac{C}{2})^2 \quad \Leftrightarrow \quad \tan\tfrac{A}{2} \cdot \tan\tfrac{B}{2} \cdot \tan\tfrac{C}{2} \ \leq \ \frac{\sqrt{3}}{9} \ .$$

Se flere svarmuligheder i februar-nummeret af *MatematikMagasinet*.

Der er modtaget svar fra 7 personer