Svar på opgave 232 (September 2006)

Opgave:

a. Vis, at der for alle reelle tal *x*, *y* og *z* gælder, at

$$\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{6}\right)^2 \le \frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}+\frac{z^2}{6} \ .$$

b. Vis, at der for alle reelle tal *a*, *b* og *c* gælder, at

$$ab(b-c)(c-a)+bc(c-a)(a-b)+ca(a-b)(b-c) \le 0 \ .$$

Besvarelse:

a. Vi skal vise, at hvis *x*, *y* og *z* er reelle tal, er

$$\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{6}\right)^2 \le \frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}+\frac{z^2}{6} \ .$$

1. metode. Vi har, at

$$\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{6}\right)^2 = \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{36}+\frac{xy}{3}+\frac{yz}{9}+\frac{xz}{6}$$

$$=\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}+\frac{z^2}{6}-\frac{x^2}{4}-\frac{2y^2}{9}-\frac{5z^2}{36}+\frac{xy}{3}+\frac{yz}{9}+\frac{xz}{6}$$

$$=\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}+\frac{z^2}{6}-\left[\tfrac{1}{6}(x-y)^2+\tfrac{1}{12}(x-z)^2+\tfrac{1}{18}(y-z)^2\right] \ ,$$

og da tallet i den sidste parentes er positivt, følger uligheden.

2. metode. Vi bruger Cauchy-Schwarz' ulighed på talsættene

$$(x,x,x,y,y,z) \text{ og } (1,1,1,1,1,1) \ ,$$

og får

$$(x+x+x+y+y+z)^2 \le (x^2+x^2+x^2+y^2+y^2+z^2)(1^2+1^2+1^2+1^2+1^2+1^2)$$

$$\Leftrightarrow \quad (3x+2y+z)^2 \le 6(3x^2+2y^2+z^2) \ ,$$

og ved division med 36 på begge sider fås den ønskede ulighed.

I *MatematikMagasinet* for december 2006 findes endnu et par løsningsmetoder samt en generaliserende bemærkning.

b. Vi skal vise, at der for alle reelle tal a, b og c gælder, at

$$ab(b-c)(c-a)+bc(c-a)(a-b)+ca(a-b)(b-c) \le 0 \ .$$

1. metode. En kendt ulighed for alle reelle tal er

$$x^2 + y^2 + z^2 \ge xy + yz + zx \ .$$

(se Jens Carstensen og Palle Bak Petersen: *Uligheder*, s. 14).
Vi sætter $x = ab$, $y = ac$ og $z = bc$. Så har vi efter denne ulighed, at

$$(ab)^2 + (ac)^2 + (bc)^2 \ge ab \cdot ac + ab \cdot bc + ac \cdot bc$$

$$\Leftrightarrow \ -(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 - a^2bc - ab^2c - abc^2) \le 0$$

$$\Leftrightarrow \ (-a^2b^2 - abc^2 + a^2bc + ab^2c) + (-b^2 - a^2bc + ab^2c + abc^2) \\ +(-a^2c^2 - ab^2c + a^2bc + abc^2) \le 0$$

$$\Leftrightarrow \ ab(b-c)(c-a)+bc(c-a)(a-b)+ca(a-b)(b-c) \le 0 \ .$$

2. metode. Vi omskriver venstre side til et andengradspolynomium p i b og skal så vise, at der gælder

$$p(b) = (ac - c^2 - a^2)b^2 + ca(a + c)b - a^2c^2 \le 0 \ .$$

Diskriminanten er

$$a^2c^2(a + c)^2 + 4a^2c^2(ac - c^2 - a^2) = a^2c^2(a^2 + c^2 + 2ac + 4ac - 4c^2 - 4a^2) \\ = a^2c^2(6ac - 3a^2 - 3c^2) = -3a^2c^2(a - c)^2 < 0 \ ,$$

for alle a og c. Da $p(0) < 0$ er derfor $p(b) \le 0$ for alle værdier af b.

I *MatematikMagasinet* for december 2006 findes endnu et par løsningsmetoder.

Der er modtaget svar fra 10 indsendere.