Svar på opgave 231 (August 2006)

Opgave:

Vis, at der for alle naturlige tal *n* gælder, at

$$\operatorname{int}\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)=\operatorname{int}\sqrt{9n+8}\ .$$

Her er int(*x*) det største hele tal, der er mindre end eller lig med *x*.

Besvarelse:

Vi har, at

$$(n+\tfrac{2}{5})^2<n(n+1)<(n+\tfrac{1}{2})^2\quad ,\qquad (1)$$

fordi uligheden er ensbetydende med

$$n^2+\tfrac{4}{25}+\tfrac{4}{5}n<n^2+n<n^2+\tfrac{1}{4}+n\ \Leftrightarrow\ \tfrac{4}{25}+\tfrac{4}{5}n<n<\tfrac{1}{4}+n$$
$$\Leftrightarrow\ 20n+4<25n<25n+\tfrac{25}{4}\ \Leftrightarrow\ 4<5n<5n+\tfrac{25}{4}\quad ,$$

hvilket er sandt for $n\geq 1$.
Dernæst er

$$(n+\tfrac{7}{10})^2<n(n+2)<(n+1)^2\quad ,\qquad (2)$$

fordi uligheden er ensbetydende med

$$n^2+\tfrac{49}{100}+\tfrac{7}{5}n<n^2+2n<n^2+2n+1\ \Leftrightarrow\ \tfrac{49}{100}+\tfrac{7}{5}n<2n<2n+1$$
$$\Leftrightarrow 140n+49<200n<200n+200\ \Leftrightarrow\ 49<60n<60n+200\ ,$$

hvilket er sandt for $n\geq 1$.
Endelig er

$$(n+\tfrac{7}{5})^2<(n+1)(n+2)<(n+\tfrac{3}{2})^2\quad ,\qquad (3)$$

fordi uligheden er ensbetydende med

$$n^2+\tfrac{49}{25}+\tfrac{14}{5}n<n^2+3n+2<n^2+\tfrac{9}{4}+3n\ \Leftrightarrow\ 70n+49<75n+50<75n+56\tfrac{1}{4}$$

hvilket er sandt for $n\geq 1$.
Nu sætter vi

$$x=\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\quad ,$$

så at

$$x^2=3n+3+2(\sqrt{n(n+1)}+\sqrt{(n+1)(n+2)}+\sqrt{n(n+2)})\quad .\qquad (4)$$

Efter (1), (2) og (3) er

$$n+\tfrac{2}{5} < \sqrt{n(n+1)} < n+\tfrac{1}{2}$$
$$n+\tfrac{7}{10} < \sqrt{n(n+2)} < n+1$$
$$n+\tfrac{7}{5} < \sqrt{(n+1)(n+2)} < n+\tfrac{3}{2} \quad ,$$

hvoraf ved addition

$$3n+\tfrac{25}{10} < \sqrt{n(n+1)} + \sqrt{(n+1)(n+2)} + \sqrt{n(n+2)} < 3n+3$$
$$6n+5 < 2(\sqrt{n(n+1)} + \sqrt{(n+1)(n+2)} + \sqrt{n(n+2)}) < 6n+6 \quad . \qquad (5)$$

Ved hjælp af (4) og (5) fås nu

$$3n + 3 + 6n + 5 < x^2 < 3n + 3 + 6n + 6 \quad \Leftrightarrow \quad 9n + 8 < x^2 < 9n + 9$$
$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{9n+8} < x < \sqrt{9n+9} \quad .$$

Dermed er $\mathrm{int}(x) = \mathrm{int}\sqrt{9n+8}$, fordi der ikke ligger nogen hele tal mellem $\sqrt{9n+8}$ og $\sqrt{9n+9}$.