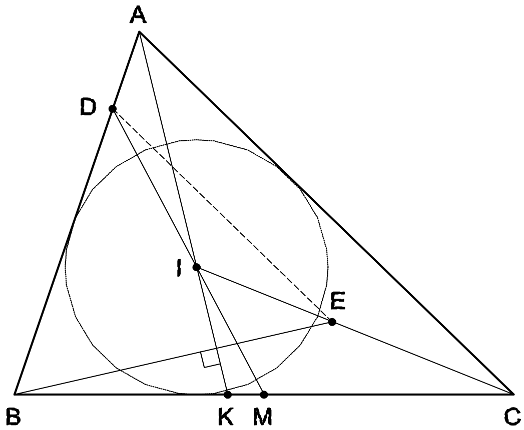
Svar på opgave 230
(Maj 2006)

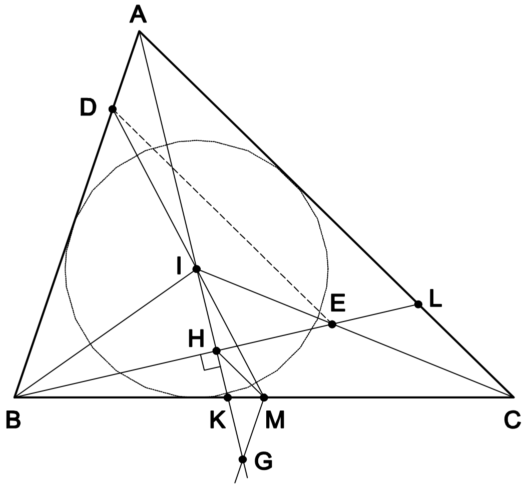
Opgave:



I ΔABC er $AC > AB$. Den indskrevne cirkel har centrum i I og M er midtpunkt af BC. Linjen AI skærer BC i K, den vinkelrette fra B på AK skærer CI i E og MI skærer AB i D.

Vis, at DE og AC er parallelle.

Besvarelse:



Lad H være skæringspunkt mellem BL og AK. Forlæng linjen AK ud over K og træk en linje gennem M parallel med AB. Denne skærer AK i G. Nu er ΔABH og ΔALH kongruente, så $BH = HL$.

Da M er midtpunkt af BC og H er midtpunkt af BL, er HM midtpunktstransversal i ΔBLC, så $HM \parallel AC$. Derfor er $\angle KHM = \angle KAC$. Da $MG \parallel AB$, er $\angle BAK = \angle HGM$. Vi slutter så, at ΔHGM er ligebenet med $HM = MG$.

Efter sætningen om vinkelhalveringslinjens delingsforhold får vi i ΔBDM:

$$\frac{BD}{BM} = \frac{ID}{IM} \quad . \tag{1}$$

Da ΔIGM og ΔIAD er ensvinklede, er

$$\frac{ID}{IM} = \frac{AD}{GM} = \frac{AD}{HM} \quad . \tag{2}$$

Vi har så efter (1) og (2), at

$$\frac{BD}{BM} = \frac{AD}{HM} \quad \text{eller} \quad \frac{BD}{AD} = \frac{BM}{HM} \quad . \tag{3}$$

Da $HM \parallel AC$, er ΔBHM og ΔBLC ensvinklede, så

$$\frac{BC}{CL} = \frac{BM}{HM}, \tag{4}$$

og da CE er vinkelhalveringslinje i ΔBLC, er

$$\frac{BE}{EL} = \frac{BC}{CL} \quad . \tag{5}$$

Af (3), (4) og (5) fås

$$\frac{BE}{EL} = \frac{BD}{AD} \quad ,$$

og derfor er DE og AC parallelle.