Svar på opgave 229 (April 2006)

Opgave:

Find alle naturlige tal x, y og z, hvor $x \le y \le z$, så $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ er et helt tal.

Besvarelse:

Vi sætter $S = \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$. Vi ser umiddelbart, at S kan antage værdierne 1, 2 og 3.

Hvis $x \ge 4$, er $y \ge 4$ og $z \ge 4$, så $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \le \frac{3}{4}$. Altså kan x antage værdierne 1, 2 og 3.

Hvis S = 3 ser vi, at den eneste løsningsmulighed er $\underline{\underline{(x,y,z) = (1,1,1)}}$.

Hvis S = 2, må x = 1, fordi $x \ge 2$ ville medføre, at $y \ge 2$ og $z \ge 2$, så $S \le \frac{3}{2}$. Vi har altså ligningen

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1 \;,$$

Der som eneste løsning har $(y,z) = (1,1)$. Dermed har vi løsningen $\underline{\underline{(x,y,z) = (1,2,2)}}$.

Hvis S = 1 deler vi op i tilfældene x = 1, x = 2 og x = 3.

I. x = 1. Så er $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$, hvilket er umuligt.

II. x = 2. Her har vi

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2 \;\Leftrightarrow\; 2y+2z=yz \;\Leftrightarrow\; (y-2)(z-2)=4 \;.$$

Denne ligning giver på grund af kravet $2 \le y \le z$ mulighederne

$$y - 2 = z - 2 = 2 \;\Leftrightarrow\; (y,z) = (4,4)$$

og

$$y-2=1 \;\wedge\; z-2=4 \;\Leftrightarrow\; (y,z)=(3,6) \;.$$

Dermed har vi løsningerne $\underline{\underline{(x,y,z) = (2,4,4)}}$ og $\underline{\underline{(x,y,z) = (2,3,6)}}$.

III. x = 3. I dette tilfælde har vi

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{2}{3} \;\Leftrightarrow\; 3y+3z=2yz \;\Leftrightarrow\; (2y-3)(2z-3)=9 \;.$$

Dette giver på grund af kravet $3 \le y \le z$ mulighederne

$$2y\text{-}3 = 2z\text{-}3 = 3 \;\Leftrightarrow\; (y,z) = (3,3)$$

og

$$2y-3=1 \wedge 2z-3=9 \quad \Leftrightarrow \quad (y,z)=(2,6) \ ,$$

men den sidste mulighed forkastes, fordi $y \geq 3$. I dette tilfælde har vi løsningen $\underline{\underline{(x,y,z) = (3,3,3)}}$.

BEMÆRKNING. *Asger Olesen*, Tønder, bemærker, at omskrivningen

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{n}{m} \quad \Leftrightarrow \quad (ny-m)(nz-m)=m^2 \ ,$$

der bruges et par steder oven for, undertiden kan være nyttig til løsning af diofantiske ligninger, der indeholder brøker.

Svar modtaget fra 6 personer.