Svar på opgave 226 (Januar 2006)

Opgave (a):

Vi skal vise, at der for positive reelle tal a, b og c gælder

$$\frac{a^2}{a^2+2bc}+\frac{b^2}{b^2+2ac}+\frac{c^2}{c^2+2ab}\geq 1 .$$

Besvarelse (a):

1. metode. Vi benytter Cauchy-Schwarz' ulighed, der gælder for positive tal:

$$(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2\leq (a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2)(b_1{}^2+b_2{}^2+b_3{}^2) \;,$$

idet vi sætter

$$a_1=\frac{a}{\sqrt{a^2+2bc}} \quad , \quad a_2=\frac{b}{\sqrt{b^2+2ac}} \quad , \quad a_3=\frac{c}{\sqrt{c^2+2ab}}$$

$$b_1=\sqrt{a^2+2bc} \quad , \quad b_2=\sqrt{b^2+2ac} \quad , \quad b_3=\sqrt{c^2+2ab} \;.$$

Så får vi

$$(a+b+c)^2\leq\left(\frac{a^2}{a^2+2bc}+\frac{b^2}{b^2+2ac}+\frac{c^2}{c^2+2ab}\right)(a^2+2bc+b^2+2ac+c^2+2ab)$$

$$\Leftrightarrow \;(a+b+c)^2\leq\left(\frac{a^2}{a^2+2bc}+\frac{b^2}{b^2+2ac}+\frac{c^2}{c^2+2ab}\right)(a+b+c)^2 \;,$$

og heraf fremgår den ønskede ulighed.

*2**. metode.*** Vi har i almindelighed, at $2xy\leq x^2+y^2$, så vi får

$$\frac{a^2}{a^2+2bc}\geq\frac{a^2}{a^2+b^2+c^2} \quad , \quad \frac{b^2}{b^2+2ac}\geq\frac{b^2}{a^2+b^2+c^2} \quad , \quad \frac{c^2}{c^2+2ab}\geq\frac{c^2}{a^2+b^2+c^2}$$

og ved addition af disse tre uligheder følger den ønskede ulighed.

3. metode. Vi sætter

$$x=\frac{bc}{a^2} \;,\; y=\frac{ac}{b^2} \;,\; z=\frac{ab}{c^2} \;,$$

hvor så $xyz = 1$. Vi kan omskrive den ønskede ulighed til

$$\frac{1}{1+2x}+\frac{1}{1+2y}+\frac{1}{1+2z}\geq 1 .$$

Denne ulighed er ensbetydende med

$$(1 + 2y)(1 + 2z) + (1 + 2x)(1 + 2z) + (1 + 2x)(1 + 2y)(1 + 2x)(1 + 2y)(1 + 2z)$$

$$\Leftrightarrow \; 3 + 4(x + y + z) + 4(xy + yz + xz) \;\geq\; 1 + 2(x + y + z) + 4(xy + yz + xz) + 8xyz$$

$$\Leftrightarrow \; 2 + 2(x + y + z) \geq 8 \;\Leftrightarrow\; x + y + z \geq 3 \,.$$

Nu gælder efter uligheden mellem aritmetisk og geometrisk middeltal, at

$$A \geq G \;\Leftrightarrow\; \tfrac{1}{3}(x+y+z) \geq \sqrt[3]{xyz} = 1 \,,$$

og dermed er den oprindelige ulighed vist.

Opgave (b):

Vi skal vise, at

$$\frac{bc}{a^2+2bc} + \frac{ac}{b^2+2ac} + \frac{ab}{c^2+2ab} \leq 1 \,.$$

Besvarelse (b):

1. metode. Vi foretager følgende omskrivning:

$$\frac{bc}{a^2+2bc} + \frac{ac}{b^2+2ac} + \frac{ab}{c^2+2ab} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2bc}{a^2+2bc} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2ac}{b^2+2ac} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2ab}{c^2+2ab}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{a^2}{a^2+2bc}\right) + \frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{b^2}{b^2+2ac}\right) + \frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{c^2}{c^2+2ab}\right)$$

$$\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{a^2+2bc} + \frac{b^2}{b^2+2ac} + \frac{c^2}{c^2+2ab}\right) \leq \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1 \,.$$

I det sidste ulighedstegn har vi benyttet uligheden under **a**.

2. metode. Vi sætter

$$x = \frac{a^2}{bc} \;,\; y = \frac{b^2}{ac} \;,\; z = \frac{c^2}{ab} \;,$$

så uligheden er ensbetydende med

$$\frac{1}{x+2} + \frac{1}{y+2} + \frac{1}{z+2} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \; (xy + yz + xz) + 4(x + y + z) + 12 \;\leq\; 9 + 2(xy + yz + xz) + 4(x + y + z)$$

$$\Leftrightarrow \; xy + yz + xz \geq 3 \,,$$

og denne ulighed er opfyldt på grund af A-G-uligheden:

$$\tfrac{1}{3}(xy+yz+xz) \geq \sqrt[3]{xy\cdot yz\cdot xz} = \sqrt[3]{(xyz)^2} = 1 \,.$$

Der er modtaget 6 besvarelser.