Svar på opgave 224 (November 2005)

Opgave:

Vis, at hvis a, b og c er reelle tal så $a, b, c \in]1;\infty[$ gælder

$$2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) < \frac{a}{a-1}+\frac{b}{b-1}+\frac{c}{c-1} \ .$$

Besvarelse:

Vi skal vise uligheden

$$2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) < \frac{a}{a-1}+\frac{b}{b-1}+\frac{c}{c-1} \quad \text{for } a, b, c > 1.$$

Vi har, at der for $a > 1$ gælder

$$\frac{2}{a} < \frac{a}{a-1} \iff 2(a-1) < a^2 \iff a^2 - 2a + 2 > 0 \ ,$$

og dette er opfyldt for alle a. Altså har vi

$$\frac{2}{a} < \frac{a}{a-1} \quad , \quad \frac{2}{b} < \frac{b}{b-1} \quad , \quad \frac{2}{c} < \frac{c}{c-1} \ ,$$

og ved addition af disse uligheder fås det ønskede.

Bemærkning. En indsender bemærker, at uligheden kan skærpes til

$$t\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) < \frac{a}{a-1}+\frac{b}{b-1}+\frac{c}{c-1} \quad ,$$

hvor $2 < t < 4$. Dette følger af at

$$\frac{t}{a} < \frac{a}{a-1} \iff a^2 - ta + t > 0 \ ,$$

hvor den tilhørende diskriminant $t^2 - 4t$ er negativ, hvis $0 < t < 4$.

Bemærkning. En indsender nævner generaliseringerne

$$2\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right) > \frac{x_1}{x_1-1}+\frac{x_2}{x_2-1}+\cdots+\frac{x_n}{x_n-1} \quad \text{for } 0 < x_i < 1$$

$$2\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right) < \frac{x_1}{x_1-1}+\frac{x_2}{x_2-1}+\cdots+\frac{x_n}{x_n-1} \quad \text{for } \quad x_i \le 0 \ \vee \ x_i \ge 1 \ .$$

Der er modtaget 3 besvarelser.