Svar på opgave 222 (September 2005)

Vi skal vise, at

$$\frac{1}{64} < \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2005}{2006} < \frac{1}{54} \ .$$

1. metode.
Vi sætter for nemheds skyld

$$a = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2005}{2006} \ .$$

Så er

$$a^2 = \frac{1^2}{2^2} \cdot \frac{3^2}{4^2} \cdot \frac{5^2}{6^2} \cdots \frac{2005^2}{2006^2} \ ,$$

hvoraf

$$\frac{1^2}{2^2} \cdot \frac{3^2-1}{4^2} \cdot \frac{5^2-1}{6^2} \cdots \frac{2005^2-1}{2006^2} < a^2 < \frac{1^2}{2^2-1} \cdot \frac{3^2}{4^2-1} \cdot \frac{5^2}{6^2-1} \cdots \frac{2005^2}{2006^2-1}$$

$$\Leftrightarrow \ \frac{1}{2 \cdot 2} \cdot \frac{2 \cdot 4}{4 \cdot 4} \cdot \frac{4 \cdot 6}{6 \cdot 6} \cdots \frac{2004 \cdot 2006}{2006 \cdot 2006} < a^2 < \frac{1}{1 \cdot 3} \cdot \frac{3 \cdot 3}{3 \cdot 5} \cdot \frac{5 \cdot 5}{5 \cdot 7} \cdots \frac{2005 \cdot 2005}{2005 \cdot 2007}$$

$$\Leftrightarrow \ \frac{1}{2 \cdot 2006} < a^2 < \frac{1}{2007} \ \Leftrightarrow \ \frac{1}{\sqrt{4012}} < a < \frac{1}{\sqrt{2007}} \ \Leftrightarrow \ \frac{1}{63{,}340} < a < \frac{1}{44{,}799} \ ,$$

og heraf fremgår det ønskede, endda i skærpet form.

2. metode.
Ved induktion vises, at

$$\sqrt{3n+1} \le \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdots \frac{2n}{2n-1} < \sqrt{4n+1} \ .$$

For n = 1003 får vi

$$\sqrt{3010} \le \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdots \frac{2006}{2005} < \sqrt{4013}$$

$$\frac{1}{64} < \frac{1}{\sqrt{4013}} < \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2005}{2006} \le \frac{1}{\sqrt{3010}} < \frac{1}{54} \ .$$

Bemærkning. Man kan vise, at der gælder

$$\frac{1}{2\sqrt{n}} < \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} \le \frac{1}{\sqrt{2n}} \ .$$

Dette giver os den skærpede ulighed

$$\frac{1}{64} < \frac{1}{63{,}340} = \frac{1}{2\sqrt{1003}} < \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2005}{2006} \le \frac{1}{\sqrt{2006}} = \frac{1}{44{,}788} < \frac{1}{44}\ .$$

3. metode.

Vi skal vise, at

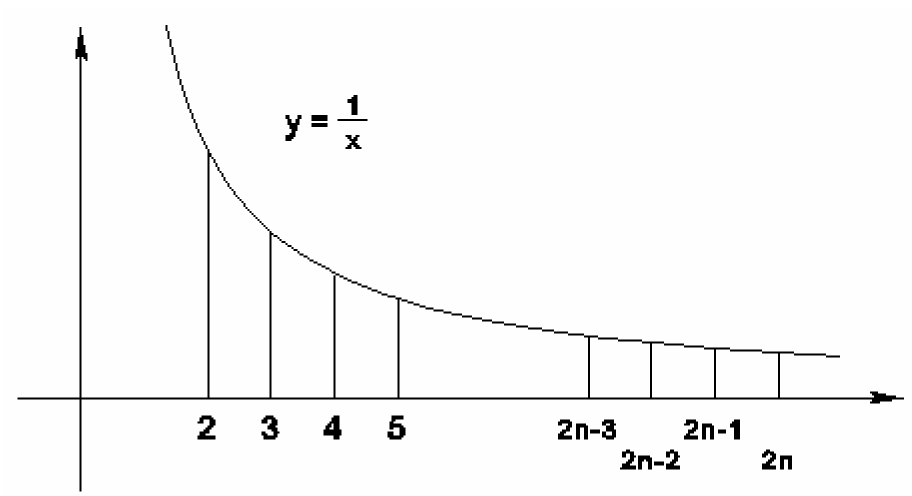
$$54 < \frac{2}{1}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdots\frac{2006}{2005} < 64\ .$$

Vi sætter

$$P_n = \frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdots\frac{2n}{2n-1}\ .$$

Vi skal så vise, at $27 < P_n < 32$. Vi får, at

$$\ln P_n = \ln\frac{4}{3} + \ln\frac{6}{5} + \ln\frac{8}{7} + \cdots + \ln\frac{2n-2}{2n-3} + \ln\frac{2n}{2n-1}\ . \qquad (1)$$



På figuren ser vi, at

$$2\ln\frac{4}{3} < \int_2^4 \frac{1}{x}dx\ ,\quad 2\ln\frac{6}{5} < \int_4^6 \frac{1}{x}dx\ ,\quad \ldots\ldots,\quad 2\ln\frac{2n}{2n-1} < \int_{2n-2}^{2n} \frac{1}{x}dx\ .$$

Dermed får vi efter (1), at

$$\ln P_n < \frac{1}{2}\int_2^{2n}\frac{1}{x}dx = \frac{1}{2}\ln\frac{2n}{2} = \frac{1}{2}\ln\sqrt{n} \quad \text{så} \quad P_n < \sqrt{n}$$

Videre ser vi på figuren, at

$$2\ln\frac{8}{7} < \int_7^9 \frac{1}{x}dx\ ,\quad 2\ln\frac{10}{9} < \int_9^{11} \frac{1}{x}dx\ ,\quad \ldots\ldots,\quad 2\ln\frac{2n-2}{2n-3} < \int_{2n-3}^{2n-1} \frac{1}{x}dx\ ,$$

og indsættes dette i (1) får vi

$$\ln P_n > \ln\frac{4}{3} + \ln\frac{6}{5} + \frac{1}{2}\int_7^{2n-1}\frac{1}{x}dx + \ln\frac{2n}{2n-1} = \ln\frac{8}{5} + \ln\sqrt{\frac{2n-1}{7}} + \ln\frac{2n}{2n-1}\ ,$$

hvoraf

$$P_n > \frac{8}{5}\cdot\sqrt{\tfrac{2n-1}{7}}\cdot\frac{2n}{2n-1} > \frac{8}{5}\cdot\sqrt{\tfrac{2n-1}{7}}\ .$$

I alt har vi, at

$$\frac{8}{5}\cdot\sqrt{\tfrac{2n-1}{7}} < P_n < \sqrt{n}\ ,$$

så at

$$\frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n} < \frac{5\sqrt{7}}{8\sqrt{2n-1}} \quad \text{eller} \quad \frac{1}{2\sqrt{n}} < \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n} < \frac{5\sqrt{7}}{16\sqrt{2n-1}}\ .$$

For $n = 1003$ er altså

$$\frac{1}{64} < \frac{1}{63{,}34} < \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2005}{2006} < \frac{1}{54{,}16} < \frac{1}{54}\ .$$

Bemærkning. Helt nøjagtigt gælder, at

$$\frac{1}{57} < \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2005}{2006} < \frac{1}{56}\ .$$

4. metode.
Vi begynder med at vise, at

$$\frac{1}{2\sqrt{n}} \le \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n} \le \frac{1}{\sqrt{3n+1}}\ .$$

Formlen er tydeligvis sand for $n = 1$.
Vi sætter

$$a(n) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n} \quad , \quad n \ge 1\ ,$$

og får

$$2a(n) = \frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}\ .$$

Desuden sætter vi

$$b(n) = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{2n-2}{2n-1}\ ,$$

og da $\frac{3}{4} > \frac{2}{3}$, $\frac{5}{6} > \frac{4}{5}$, ... , $\frac{2n-1}{2n} > \frac{2n-2}{2n-1}$, er

$$2a(n) > b(n)\ .$$

Dette medfører, at

$$2a(n)^2 > a(n)\cdot b(n) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-3}{2n-2}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2n-1}{2n}\ ,$$

og dermed

$$2a(n)^2 > \frac{1}{2n} \iff a(n) > \frac{1}{2\sqrt{n}}\ .$$

Den anden del af formlen bevises ved induktion. Vi har set, at formlen er sand for n = 1. Antag dernæst, at $a(n) < \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$. Vi skal vise, at $a(n+1) < \frac{1}{\sqrt{3n+4}}$.

Da

$$a(n+1) = a(n)\cdot\frac{2n+1}{2n+2} \ ,$$

skal vi vise uligheden

$$a(n+1) = a(n)\cdot\frac{2n+1}{2n+2} < \frac{1}{\sqrt{3n+1}}\cdot\frac{2n+1}{2n+2} < \frac{1}{\sqrt{3n+4}} \ .$$

Ved kvadrering fås, at den sidste ulighed er ensbetydende med

$$\frac{(2n+1)^2}{(3n+1)(2n+2)^2} < \frac{1}{3n+4} \ \Leftrightarrow \ (4n^2+4n+1)(3n+4) < (3n+1)(4n^2+8n+4) \ ,$$

som efter elementære reduktioner viser sig at være sand.

Hvis vi sætter n = 1003, får vi

$$a(1003) > \frac{1}{2\sqrt{1003}} > \frac{1}{2\sqrt{1024}} = \frac{1}{64} \quad \text{og} \quad a(1003) < \frac{1}{\sqrt{3\cdot 1003+1}} = \frac{1}{\sqrt{3010}} < \frac{1}{\sqrt{2916}} = \frac{1}{54} \ .$$

Svar på denne opgave modtaget fra 6 personer.