Svar på opgave 221 (August 2005)

Vi skal vise, at hvis a, b og c er ikke-negative tal, hvor $a + b + c = 1$, så gælder

$$\frac{ab}{c+1}+\frac{bc}{a+1}+\frac{ca}{b+1}\le\frac{1}{4} .$$

1. metode.
Vi sætter $a + b = s$ og $ab = p$. Så er $c = 1 - s$, hvor $0\le s\le 1$. Vi får brug for at

$$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab = s^2 - 2p .$$

Så kan vi skrive

$$\frac{bc}{a+1}+\frac{ca}{b+1}=\frac{c(a^2+b^2+a+b)}{ab+a+b+1}=\frac{(1-s)(s^2-2p+s)}{p+s+1} .$$

Det gælder derfor om at vise, at

$$\frac{p}{2-s}+\frac{(1-s)(s^2-2p+s)}{p+s+1}\le\frac{1}{4} .$$

Denne ulighed er ensbetydende med

$$4p(p + s + 1) + 4(2 - s)(s^2 - 2p + s) \le (2 - s)(p + s + 1) ,$$

og efter en del algebra er dette ensbetydende med

$$4p^2 - (8s^2 - 29s + 14)p - (2s - 1)^2(s + 1)(2 - s) \le 0 .$$

Vi betragter derfor funktionen f givet ved

$$f(x) = 4x^2 - (8s^2 - 29s + 14)x - (2s - 1)^2(s + 1)(2 - s) .$$

Diskriminanten er

$$d = (8s^2 - 29s + 14)^2 + 16(2s - 1)^2(s + 1)(2 - s) = -3(112s^3 - 371s^2 + 308s - 76) ,$$

som er positive for $0\le s\le 1$.

Tallet p varierer i intervallet $\left[0;\tfrac{1}{4}s^2\right]$, fordi

$$p\le\tfrac{1}{4}s^2 \iff 4p\le s^2 \iff 4ab\le(a+b)^2 \iff (a-b)^2\ge 0 ,$$

hvilket er sandt.

Da $0\le s\le 1$, er $f(0) = -(2s - 1)^2(s + 1)(2 - s) \le 0$. Dermed er

$$f(\tfrac{1}{4}s^2) = 4\cdot(\tfrac{1}{4}s^2)^2-(8s^2-29s+14)\cdot\tfrac{1}{4}s^2-(2s-1)^2(s+1)(2-s) ,$$

og ved brug af en symbolregner finder man, at

$$f(\tfrac{1}{4}s^2)=\tfrac{1}{4}(s-1)(3s-2)^2(s+2)\le 0 .$$

Nu er f et andengradspolynomium med positiv andengradskoeffcient. Funktionsværdierne i 0 og $\tfrac{1}{4}s^2$ er ikke-positive og derfor gælder det samme i hele intervallet $\left[0;\tfrac{1}{4}s^2\right]$.

Lighedstegnet i uligheden gælder i forskellige tilfælde:

1. Hvis $s = \frac{1}{2}$ og $p = 0$. Det svarer til $(a,b,c) = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$ eller $(a,b,c) = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.
2. Hvis $s = 1$, $p = \frac{1}{4}s^2$, så $(a,b,c) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$.
3. Hvis $s = \frac{2}{3}$, $p = \frac{1}{4}s^2 = \frac{1}{9}$, så $(a,b,c) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

2. metode.
Vi viser mere generelt, at hvis a, b og c er ikke-negative og $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ gælder, at

$$\frac{ab}{a+b+2c} + \frac{bc}{2a+b+c} + \frac{ca}{a+2b+c} \leq \frac{1}{4}(a+b+c) \ . \qquad (1)$$

Den ønskede ulighed fås så som specialtilfældet $a + b + c = 1$.
Nu er

$$(x+y)^2 = (x-y)^2 + 4xy \geq 4xy \ ,$$

så vi for ikke-negative a, b og c og $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ ved hjælp heraf får, at

$$(a+b+2c)^2 = (a+c+b+c)^2 \geq 4(a+c)(b+c)$$

$$\Leftrightarrow \ \frac{1}{4} \cdot \frac{a+b+2c}{(a+c)(b+c)} \geq \frac{1}{a+b+2c} \ \Leftrightarrow \ \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c}\right) \geq \frac{1}{a+b+2c}$$

$$\Leftrightarrow \ \frac{ab}{a+b+2c} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{ab}{a+c} + \frac{ab}{b+c}\right).$$

Tilsvarende er

$$\frac{bc}{2a+b+c} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{bc}{a+b} + \frac{bc}{a+c}\right) \quad \text{og} \quad \frac{ca}{a+2b+c} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{ca}{a+b} + \frac{ca}{b+c}\right).$$

Addition af disse tre sidste uligheder giver

$$\frac{ab}{a+b+2c} + \frac{bc}{2a+b+c} + \frac{ca}{a+2b+c} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{ab}{a+c} + \frac{ab}{b+c} + \frac{bc}{a+b} + \frac{bc}{a+c} + \frac{ca}{a+b} + \frac{ca}{b+c}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{ab+ca}{b+c} + \frac{ab+bc}{a+c} + \frac{bc+ca}{a+b}\right) = \frac{1}{4}(a+b+c) \ ,$$

som ønsket. Ovenstående regninger forudsætter, at mindst to af tallene a, b og c er forskellige fra 0. Skulle to af tallene begge være 0, ses uligheden (1) trivielt at være opfyldt.

Svar på denne opgave modtaget fra 4 personer.