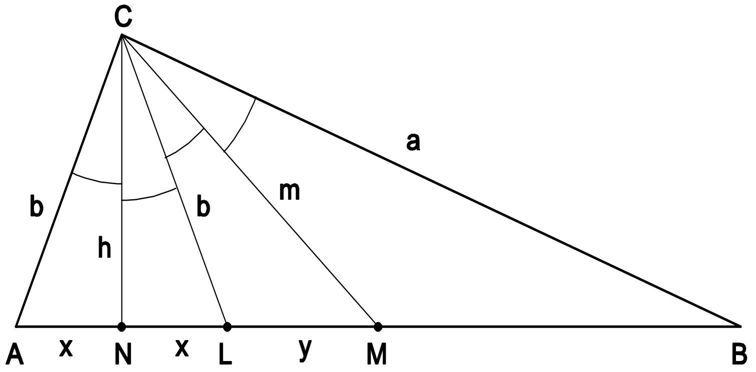
Svar på opgave 217 (Februar 2005)



Opgaven:

I ΔABC er N fodpunktet for højden fra C, L fodpunktet for vinkelhalveringslinjen for vinkel C og M fodpunkt for medianen fra C. Desuden er $\angle ACN = \angle NCL = \angle LCM = \angle MCB$.
Bestem vinklerne i ΔABC.

1. metode.

Vi sætter $AC = b$, $BC = a$, $CN = h$, $CL = b$, $CM = m$, $AN = x$, $LM = y$. Så er $NL = x$ og $MB = 2x + y$.
Vi benytter i ΔABC sætningen om at en vinkelhalveringslinje deler den modstående side i trekanten i samme forhold som de indesluttende sider:

$$\frac{BC}{AC} = \frac{LB}{LA} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{2x + 2y}{2x} \quad . \qquad (1)$$

Samme sætning anvendes i ΔLBC:

$$\frac{BC}{CL} = \frac{MB}{ML} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{2x + y}{y} \quad , \qquad (2)$$

og i ΔNMC:

$$\frac{CM}{CN} = \frac{LM}{LN} \Leftrightarrow \frac{m}{h} = \frac{y}{x} \quad . \qquad (3)$$

Ligningerne (1) og (2) giver, at

$$\frac{2x + 2y}{2x} = \frac{2x + y}{y} \Leftrightarrow \frac{y}{x} = \frac{2x}{y} \Leftrightarrow \frac{y}{x} = \sqrt{2} \ .$$

Af (3) fås, at

$$\frac{m}{h} = \sqrt{2} \Leftrightarrow m = h\sqrt{2} \ ,$$

Og da ΔNMC er retvinklet, er den også ligebenet. Altså er $\angle NCM$ =45°, så de fire vinkler ved C hver er $22\tfrac{1}{2}°$. Dermed er $A = 67\tfrac{1}{2}°$ og $B = 22\tfrac{1}{2}°$.

2. metode.

Vi sætter $x = \angle ACN$. Da er $C = 4x$, og i ΔACN fås umiddelbart $A = 90° - x$ og derefter i ΔABC, at $B = 90° - 3x$. Derfor skal vi blot bestemme x for at løse opgaven.

Vi finder frem til en ligning, der kun involverer x ved at lave to forskellige arealbetragtninger. Først bemærkes, at da $\angle CLN = 90° - x = A$, er ΔACL ligebenet og $AC = CL$.

Arealet af ΔABC er summen af arealerne af ΔACL og ΔBLC. Derved får vi ligningen

$$\tfrac{1}{2} \cdot AC \cdot BC \cdot \sin 4x = \tfrac{1}{2} \cdot AC^2 \cdot \sin 2x + \tfrac{1}{2} \cdot AC \cdot BC \cdot \sin 2x$$

$$\Leftrightarrow \quad BC \cdot \sin 4x = (AC + BC) \cdot \sin 2x \quad \Leftrightarrow \quad 2\cos 2x = 1 + \frac{AC}{BC} \text{ -}$$

På den anden side deler medianen CM ΔABC i to trekanter med samme areal. Dermed får vi ligningen

$$\tfrac{1}{2} \cdot AC \cdot CM \cdot \sin 3x = \tfrac{1}{2} \cdot BC \cdot CM \cdot \sin x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{AC}{BC} = \frac{\sin x}{\sin 3x} .$$

Her er $\sin 3x \neq 0$, da $0° < x < 30°$, fordi $B > 0$. Indsætter vi dette i ovenstående ligning, får vi følgende ligning i x:

$$2\cos 2x = 1 + \frac{\sin x}{\sin 3x} .$$

For at løse denne ligning bruger vi formlerne

$$\sin x \cdot \cos y = \tfrac{1}{2}(\sin(x+y) + \sin(x-y)) \quad \text{og} \quad \sin x - \sin y = 2\cos\tfrac{x+y}{2} \cdot \sin\tfrac{x-y}{2} .$$

Derved får vi

$$2\cos 2x = 1 + \frac{\sin x}{\sin 3x} \quad \Leftrightarrow \quad 2 \cdot \sin 3x \cdot \cos 2x = \sin 3x + \sin x$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin 5x + \sin x = \sin 3x + \sin x \quad \Leftrightarrow \quad \sin 5x - \sin 3x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2\cos 4x \cdot \sin x = 0 .$$

Da $0° < x < 30°$, er eneste mulighed at $4x = 90°$, dvs. $x = 22\tfrac{1}{2}°$, hvilket giver vinklerne $A = 67\tfrac{1}{2}°$, $B = 22\tfrac{1}{2}°$ og $C = 90°$.

3. metode.

Lad x være gradtallet for $\angle ACN$ og lad os vælge linjestykket CN som længdeenhed. Vi finder da, at

$$AN = NL = \tan x \quad , \quad NM = \tan 2x \quad , \quad NB = \tan 3x ,$$

og dermed, idet M er midtpunkt af linjestykket AB, at

$$2(\tan 2x + \tan x) = \tan 3x + \tan x \quad \Leftrightarrow \quad 2\tan 2x = \tan 3x - \tan x . \qquad (1)$$

Af additionsformlerne for tangens fremgår, at

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x} \quad \text{og} \quad \tan 3x = \tan 3x = \frac{\tan 2x + \tan x}{1 - \tan 2x \cdot \tan x} = \tan x \cdot \frac{3 - \tan^2 x}{1 - 3\tan^2 x} .$$

Ved indsættelse i (1) og bortforkortning af $\tan x$ fremgår, at

$$4(1 - 3\tan^2 x) = (1 - \tan^2 x)(3 - \tan^2 x - 1 + 3\tan^2 x) \quad \Leftrightarrow \quad \tan^4 x - 6\tan^2 x + 1 = 0\ . \qquad (2)$$

Vi bemærker, at der tydeligvis gælder $0 < \tan x < 1$, så af (2) får vi at

$$\tan^2 x = 3 - 2\sqrt{2} = (\sqrt{2} - 1)^2 \quad \Leftrightarrow \quad \tan x = \sqrt{2} - 1\ ,$$

og dermed

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x} = \frac{2(\sqrt{2} - 1)}{2\sqrt{2} - 2} = 1\ .$$

Med andre ord gælder det, at $2x = 45°$ og dermed, at der for vinklerne i ΔABC gælder:

$$A = 67\tfrac{1}{2}° \ ,\ B = 22\tfrac{1}{2}° \ ,\ C = 90°\ .$$

Omvendt indses let, at for en trekant med disse vinkler er opgavens betingelser opfyldt.

Til opgaven er der er indkommet svar fra 10 løsere.