Svar på opgave 210 (Maj 2004)

Vi skal inden for de *reelle* tal løse ligningssystemet

$$\begin{aligned} x^3 - 4x^2 - 16x + 60 &= y \\ y^3 - 4y^2 - 16y + 60 &= z \\ z^3 - 4z^2 - 16z + 60 &= x\ . \end{aligned}$$

Opgaveredaktøren beklager en fatal trykfejl i opgavens formulering. Opgaven skulle have bedt om *heIe* løsninger.

Lad os imidlertid alligevel først se på formuleringen med reelle løsninger. Udtrykket for y i den første ligning indsættes i den midterste:

$$(x^3 - 4x^2 - 16x + 60)^3 - 4(x^3 - 4x^2 - 16x + 60)^2 - 16(x^3 - 4x^2 - 16x + 60) + 60 = z\ .$$

Dette udtryk for z indsættes i den sidste ligning, som derefter bliver en ligning af 27. grad.
Et par indsendere angiver de 27 løsninger. Her kommer et par stykker:

(x,y,z) = (-3,99798539 , -3,87112976 , 3,98411518)
(x,y,z) = (-3,99797709 , -3,87059951 , 4,01588591)
(x,y,z) = (-3,88885998 , 2,91670019 , 4,11701380)

Nogle anfører vanskeligheder med afrundingsfejl, men benytter grafregnerens (TI-89) faciliteter til regning med store tal.

Men som sagt var det ikke meningen at opgaven skulle være så svær. Hvis vi leder efter *hele* løsninger bliver det hele meget enklere.
Vi har at

$$x^3 - 4x^2 - 16x + 60 = y \quad \Leftrightarrow \quad x^3 - 4x^2 - 16x + 64 = y + 4 \quad \Leftrightarrow \quad (x + 4)(x - 4)^2 = y + 4\ ,$$

så ligningssystemet bliver ensbetydende med

$$\begin{aligned} (x + 4)(x - 4)^2 &= y + 4 \\ (y + 4)(y - 4)^2 &= z + 4 \\ (z + 4)(z - 4)^2 &= x + 4\ . \end{aligned}$$

Ved multiplikation af disse ligninger fås

$$(x + 4)(y + 4)(z + 4)(x - 4)^2(y - 4)^2(z - 4)^2 = (x + 4)(y + 4)(z + 4) .$$

Her er $(x,y,z) = (-4,-4,-4)$ en løsning. Derefter er

$$(x - 4)^2(y - 4)^2(z - 4)^2 = 1 ,$$

og de eneste løsninger er her

$$(x,y,z) = (3,3,3) \quad \text{og} \quad (x,y,z) = (5,5,5) .$$

Der er modtaget 5 besvarelser af denne opgave.
Navnene offentliggøres ikke på nettet, men kan ses i *MatematikMagasinet.*