Kap. 1: Trigonometriske funktioner og grader.

Grader som vinkelmål.

Inden vi går i gang med at omtale de trigonometriske funktioner: sinus, cosinus og tangens, vil vi først minde om, hvordan en given vinkel kan måles i grader:

Vi tager en vilkårlig cirkel, som har centrum i vinklens toppunkt, og inddeler den i 360 lige store dele. Størrelsen af vinklen er da f.eks. 35° (35 grader), hvis vinklens ben "afskærer" 35 af disse dele (se figur 1.1). Cirkelbuen AB på figuren har altså længden $\frac{35}{360}$ af hele cirkelperiferien.

Hvis vinklen (dvs. vinkelstørrelsen) er v^o, så er længden af den tilsvarende cirkelbue imellem de to vinkelben lig med $\frac{v}{360}$ af cirkelperiferien.

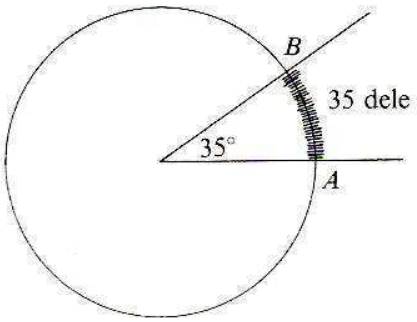


Fig. 1.1

Øvelse 1.1.
Prøv at undersøge – f.eks. via Internettet –, hvilke teorier, der findes til forklaring af, at man netop har valgt at dele cirkelperiferien i 360 dele (og ikke f.eks. i 100 dele). ♥

Som anført ovenfor kan vi bruge en vilkårlig cirkel med centrum i vinklens toppunkt. Dette skyldes, at hvis vi tager to forskellige cirkler med radius r_1 og r_2 (se figur 1.2), hvor længden af buestykkerne A_1B_1 og A_2B_2 er s_1 og s_2, så er cirkeludsnittene OA_1B_1 og OA_2B_2 ligedannede figurer, hvormed vi har, at: $\frac{s_2}{s_1} = \frac{r_2}{r_1}$.

Og hvis s_1 er $\frac{v}{360}$ af den lille cirkels omkreds, dvs.

$$s_1 = \frac{v}{360} \cdot 2\pi r_1,$$

så er: $$s_2 = s_1 \cdot \frac{r_2}{r_1} = \frac{v}{360} \cdot 2\pi r_1 \cdot \frac{r_2}{r_1} = \frac{v}{360} \cdot 2\pi r_2,$$

dvs. s_2 er $\frac{v}{360}$ af den store cirkels omkreds.
Vinklens størrelse vil derfor i begge tilfælde kunne angives som v^o.

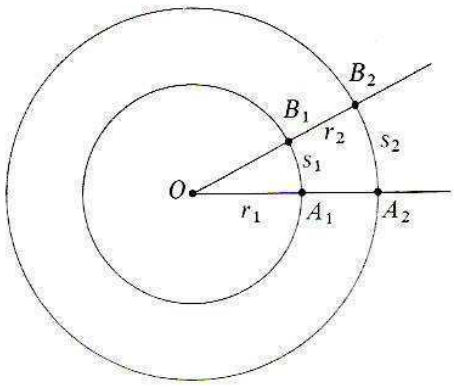


Fig. 1.2

I resten af kapitel 1 vil vi blot anføre vinklens størrelse som v (eller u osv.) uden gradtegnet ^{o}, idet det er underforstået, at vinklerne måles i grader. Vi vil dog fortsat anvende gradtegnet, når der er givet en bestemt talværdi, altså f.eks. 35^o som ovenfor.

Sinus og cosinus.

Ordet trigonometri betød oprindeligt trekantsberegning, men det er efterhånden blevet synonymt med en bestemt form for beregninger i trekanter, nemlig anvendelse af de såkaldte trigonometriske funktioner: sinus, cosinus og tangens til at bestemme vinkler og sider mm. i trekanter. (Vi skal senere i denne bog se på andre anvendelser af disse funktioner, men i dette kapitel drejer det sig kun om trekanter og lignende).
Når funktionerne sinus, cosinus og tangens bruges i beregninger mm., forkortes de hhv. sin, cos og tan. (Tangens blev tidligere forkortet tg, men med regnemaskinernes udbredelse blev denne forkortelse erstattet af tan, idet dette anvendtes på de udenlandsk producerede regnemaskiner).
Alle tre funktioner: sin, cos og tan er funktioner af vinkler, eller rettere: af vinkelstørrelser.
De indføres på følgende måde:

I et koordinatsystem betragtes to halvlinier *l* og *m*, som udgår fra samme punkt A, og dermed danner en vinkel med toppunkt A. Lad v være vinklen (vinkelstørrelsen) imellem *l* og *m* (se figur 1.3 a)).
De to halvlinier flyttes, så A placeres i koordinatsystemets begyndelsespunkt O, og så halvlinien *l* falder sammen med den positive del af 1. aksen (som vi i denne sammenhæng vil kalde l_1). Hermed falder halvlinien *m* oven i den på figur 1.3 b) viste halvlinie m_1.
Vi ser, at vinklen mellem l_1 og m_1 er den samme som imellem *l* og *m*, dvs. v.
Vi indtegner nu en cirkel med radius 1 og med centrum i O ("Enhedscirklen") (Se figur 1.3 c)).
Halvlinien m_1 skærer enhedscirklen i et punkt P, som kaldes retningspunktet for vinklen v, og hvis koordinater pr. definition sættes til at være: (cos v, sin v). (læses: "cosinus til v komma sinus til v").

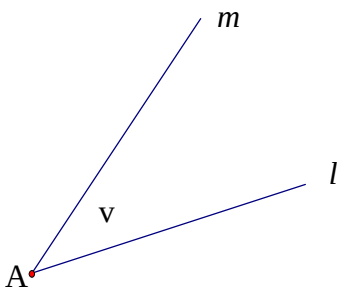


Fig. 1.3 a)

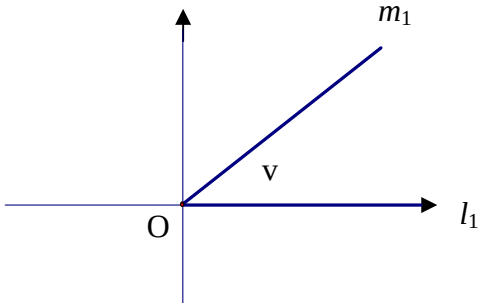


Fig. 1.3 b)

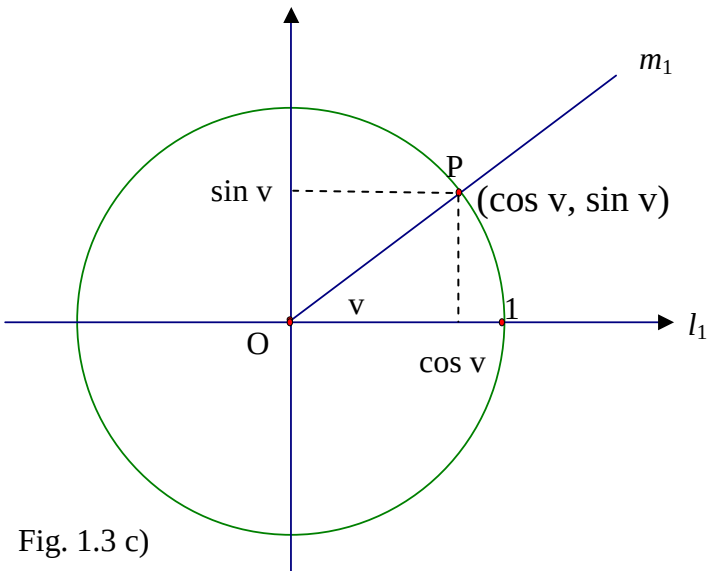


Fig. 1.3 c)

cos v og sin v skrives også som cos(v) og sin(v). Disse parenteser ("funktionsparenteser") anvendes ofte, når der står mere end blot et bogstav som v efter "cos" eller "sin" – f.eks. sin(2·v).
Hvis A er navnet på en vinkelspids (vinklens toppunkt), så anføres cosinus og sinus til denne vinkel som: cos(∠A) og sin(∠A). Men undertiden skrives blot cos(A) eller cos A, og tilsvarende sin(A) eller sin A.

Vedrørende værdien af tallene sin(v) og cos(v) gælder der følgende vigtige sætning:

Sætning 1.2.
a) Hvis v er en vinkel i en trekant, er $0^o < v < 180^o$, hvormed $-1 < \cos v < 1$ og $0 < \sin v \leq 1$.
b) Der gælder, at: $\cos(180^o - v) = -\cos v$ og $\sin(180^o - v) = \sin v$

Øvelse 1.3.
Argumentér for sætning 1.2. (Brug enhedscirklen). ♥

Vinkler større end 180^o kan nemt tænkes/konstrueres og dermed indtegnes i forbindelse med enhedscirklen (hvordan ?). Der findes altså vinkler i intervallet $[0^o, 360^o]$.
Om sådanne vinkler gælder (overvej !), at: $-1 \leq \cos v \leq 1$ og $-1 \leq \sin v \leq 1$

Hvis vi indfører begreberne positiv omløbsretning (mod uret) og negativ omløbsretning (med uret), så kan vi også operere med negative vinkler. Det overlades til læseren at forklare dette nærmere, og at prøve at indtegne en vinkel på f.eks. -30^o i forbindelse med enhedscirklen.
I resten af kapitel 1 vil vi imidlertid nøjes med at se på vinkler i intervallet $[0^o, 360^o]$.

Eksempel 1.4.
cos- og sin-værdier til givne vinkler kan findes på regnemaskinen/grafregneren. F.eks. har vi: $\cos(21^o) = 0{,}93358$. Det skal her fremhæves, at man også kan definere cosinus og sinus til almindelige tal (disse kaldes i den sammenhæng for "radianer" – se kapitel 2). Og dette er regnemaskinen/grafregneren også i stand til at håndtere. Det er derfor vigtigt, at den bliver indstillet til at regne med grader !! På TI-83/84-serien foregår dette ved at taste [MODE], v.hj.a. piletasterne gå ned i linien "Radian Degree", her markere "Degree" v.hj.a. piletasterne, og taste [ENTER]. ♥

Øvelse 1.5.
Bestem $\cos(38{,}3^o)$, $\cos(90^o)$, $\cos(119{,}4^o)$, $\sin(51{,}8^o)$, $\sin(30^o)$, $\sin(150^o)$ og $\sin(90^o)$ ♥

Eksempel 1.6.
Grafregneren kan også "gå den modsatte vej", altså bestemme vinklen, når vi kender cos- eller sin-værdien. Dette gøres ved at taste $\cos^{-1}$ (dvs. [2nd] [cos]) eller $\sin^{-1}$ (dvs. [2nd] [sin]).
Hvis vi antager, at vinklen v opfylder: $0^o < v < 180^o$ – som det bl.a. er tilfældet med vinkler i en trekant –, så løses ligninger som: a) $\sin v = 0{,}5788$ eller b) $\cos v = -0{,}1251$ på følgende måde:

Ad a): Ved at trykke $\sin^{-1}(0{,}5788)$ på regnemaskinen får vi: $v = 35{,}366^o$. Og så skulle man tro, at alt var fint og godt, og at den ukendte vinkel v var fundet. Men hvis vi taster $\sin(144{,}634^o)$, så opdager vi, at det også giver 0,5788, så vinklen $v = 144{,}634^o$ er også en løsning.

Dette kan vi forklare ved at betragte den følgende figur samt henvise til sætning 1.2 b).

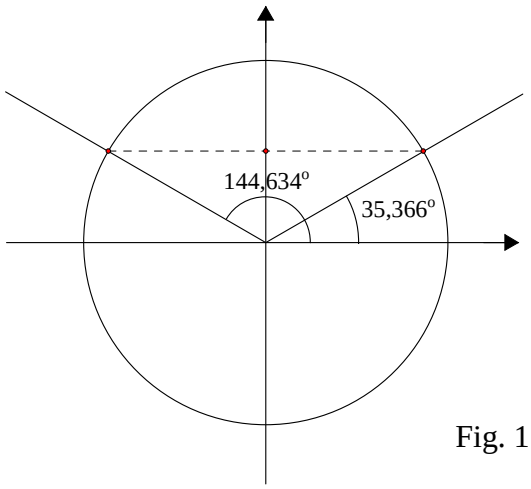


Fig. 1.4

Vi ser, at $180^o - 35{,}366^o = 144{,}634^o$, hvormed formlen: $\sin(180^o - v) = \sin v$ giver, at de to vinkler har samme sinusværdi. (Retningspunkterne for de to vinkler ligger symmetrisk om 2.aksen)

For ligningen $\sin v = 0{,}5788$ under forudsætningen: $0^o < v < 180^o$ kan vi dermed i alt svare:

$$\sin v = 0{,}5788 \;\Leftrightarrow\; v = 35{,}366^o \;\vee\; v = 144{,}634^o$$

Ad b): Ved at trykke $\cos^{-1}(-0{,}1251)$ på regnemaskinen får vi (kontrollér), at: $v = 97{,}186^o$.
Og da v ligger imellem 0^o og 180^o er der ikke flere løsninger. (Overvej !!). ♥

Øvelse 1.7.
Bestem vinkler $v \in [0^o ; 360^o]$, der er løsninger til hver af de følgende ligninger:
$\cos v = 0{,}125$, $\cos v = 0{,}8$, $\cos v = -0{,}63$, $\cos v = 0$, $\sin v = 0{,}32$, $\sin v = 0{,}88$, $\sin v = 1$ ♥

Øvelse 1.8:
a) Hvilke værdier kan tallet a antage, hvis ligningen $\cos(v) = a$ skal have mindst én løsning v ?
b) Hvilke værdier kan tallet b antage, hvis ligningen $\sin(v) = b$ skal have mindst én løsning v ? ♥

Tangens.

Tangens til vinklen v defineres på følgende måde: $\tan v = \dfrac{\sin v}{\cos v}$.

Heraf ses straks, at $\tan v$ ikke er defineret, hvis $\cos v = 0$.
Tangens til v er således hverken defineret for $v = 90^o$ eller $v = 270^o$

Øvelse 1.9.
Tangens findes også på grafregneren. Bestem tallene:
$\tan(22^o)$, $\tan(45^o)$, $\tan(71{,}3^o)$, $\tan(89{,}9^o)$, $\tan(179^o)$, $\tan(135^o)$, $\tan(92{,}5^o)$, $\tan(300^o)$, $\tan(269^o)$.
Kommentér resultaterne. ♥

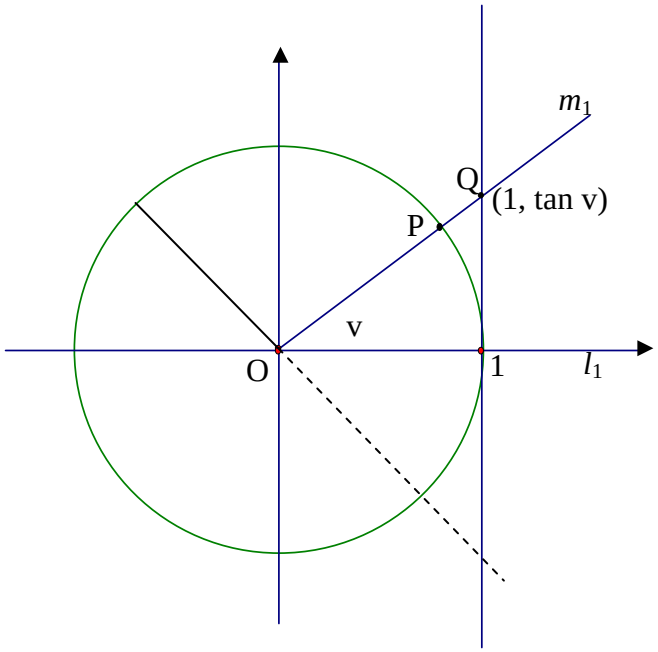


Fig. 1.5

tan v kan findes i forbindelse med enhedscirklen på følgende måde:
Tegn linien med ligningen x = 1, dvs. tangenten til enhedscirklen i punktet (1,0).
Skæringspunktet Q mellem vinklens venstre ben m_1 og denne linie har da koordinaterne (1, tan v).

Bevis:
Linien m_1 går igennem punkterne O og P og har derfor hældningskoefficienten:

$$a = \frac{\sin v - 0}{\cos v - 0} = \tan v$$

– og dermed ligningen: $y = \tan v \cdot x$.
Hvis vi i denne ligning sætter x = 1, får vi punktet: Q = (1, tan v), hvormed det ønskede er bevist. ♥

Bemærk, at hvis vinklen er større end 90^o, så skal vinklens venstre ben forlænges til skæring med linien x = 1 som vist på figur 1.5 for at få punktet (1, tan v).

Øvelse 1.10.
Løs ligningerne: tan v = 0,6, tan v = 125, tan v = – 1,6 og tan v = – 38,9.
Illustrér og kommentér resultaterne. ♥

Øvelse 1.11.
For hvilke c har ligningen tan(v) = c en løsning ? Hvad er Vm(tan) ? ♥

Eksempel 1.12.
Opsummerende kan vi vedrørende regnemaskinetasterne $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$ og $\tan^{-1}$ anføre, at:

$\sin^{-1}$ giver et resultat i intervallet $[-90^o ; 90^o]$
$\cos^{-1}$ giver et resultat i intervallet $[0^o ; 180^o]$
$\tan^{-1}$ giver et resultat i intervallet $]-90^o ; 90^o[$

Men om det så er det korrekte svar, man får, må afhænge af en nærmere analyse af det givne problem. (Se f.eks. eksempel 1.6 a)). ♥

Retvinklede trekanter.

Funktionerne sinus, cosinus og tangens kan bl.a. anvendes til at beregne ukendte sider eller vinkler i retvinklede trekanter.
Lad ΔABC være en retvinklet trekant (se figur 1.6 a)), hvor $\angle C = 90^o$, og hvor a er længden af siden overfor vinkel A, b er længden af siden overfor vinkel B og c er længden af siden overfor vinkel C.
Da afstanden imellem to punkter S og T (dvs. længden af liniestykket fra S til T) som bekendt betegnes med $|ST|$, kan vi også skrive, at: $a = |BC|$, $b = |AC|$ og $c = |AB|$.
a og b kaldes den retvinklede trekants kateter, og c kaldes dens hypotenuse.

Vi anbringe denne trekant i forbindelse med enhedscirklen som vist på figur 1.6 b), dvs. så A falder sammen med (0,0) og liniestykket AC sammen med den positive del af 1. aksen:

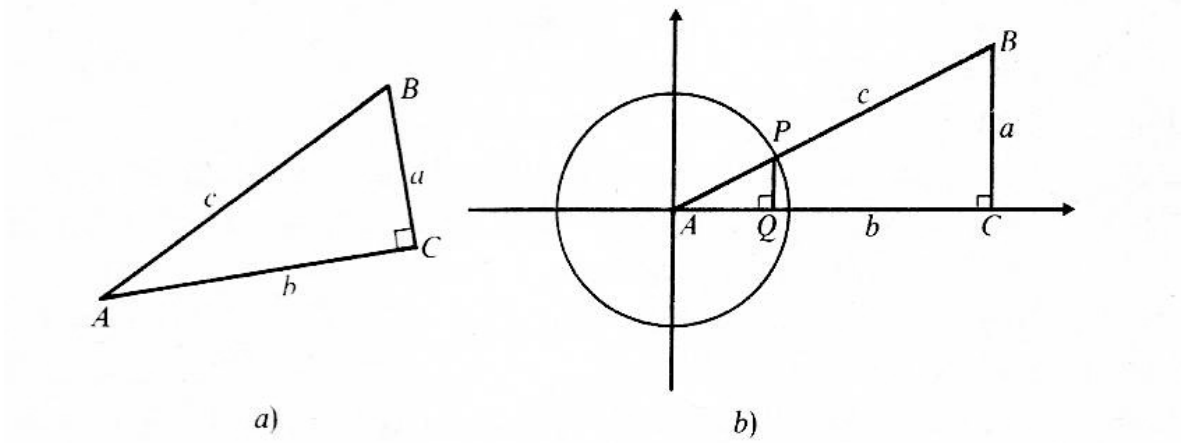


Fig. 1.6

Hvis vi lader P og Q være de på figur 1.6 b) angivne punkter, så ser vi, at ΔABC og ΔAPQ er ensvinklede. Da der som bekendt gælder i ensvinklede trekanter, at forholdet mellem ensliggende sider er lige store, ser vi (overvej !), at:

$$\frac{|PQ|}{|BC|} = \frac{|AP|}{|AB|} \Leftrightarrow \frac{\sin(\angle A)}{a} = \frac{1}{c} \Leftrightarrow \sin(\angle A) = \frac{a}{c}$$

og

$$\frac{|AQ|}{|AC|} = \frac{|AP|}{|AB|} \Leftrightarrow \frac{\cos(\angle A)}{b} = \frac{1}{c} \Leftrightarrow \cos(\angle A) = \frac{b}{c}$$

Da vi desuden ved, at $\tan(\angle A) = \frac{\sin(\angle A)}{\cos(\angle A)}$ får vi:

$$\tan(\angle A) = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{c} \cdot \frac{c}{b} = \frac{a}{b}$$

I alt har vi hermed bevist følgende sætning:

Sætning 1.13.
I en retvinklet trekant ΔABC, hvor $\angle C = 90^o$, gælder der:

$$\sin(\angle A) = \frac{a}{c} = \text{(modstående katete) / (hypotenusen)}$$

$$\cos(\angle A) = \frac{b}{c} = \text{(hosliggende katete) / (hypotenusen)}$$

$$\tan(\angle A) = \frac{a}{b} = \text{(modstående katete) / (hosliggende katete)}$$

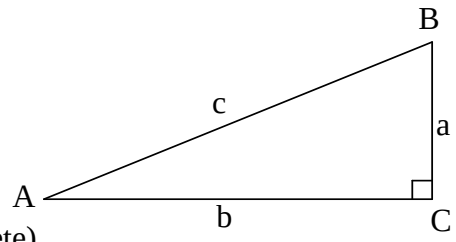


Fig. 1.7

Denne sætning kan bruges til beregning af ukendte sider eller ukendte vinker i en retvinklet trekant. Bemærk, at der naturligvis gælder tilsvarende formler for vinkel B i trekanten !!

Eksempel 1.14.
I en retvinklet trekant ΔABC er $\angle A = 28{,}4^o$, $\angle C = 90^o$ og $c = 2{,}6$. Vi vil finde $|BC|$ og $|AC|$, dvs. kateterne a og b.

Af sætning 1.13 ser vi, at $\sin(28{,}4^o) = \frac{a}{2{,}6}$ og dermed:

$$a = 2{,}6 \cdot \sin(28{,}4^o) = 2{,}6 \cdot 0{,}4756 = 1{,}2366$$

Altså: $\underline{a = 1{,}2366}$

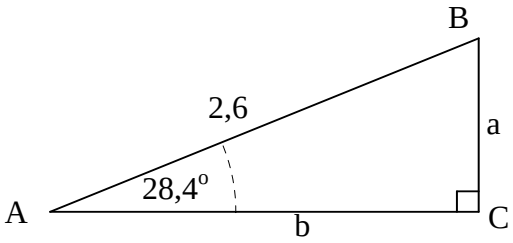


Fig. 1.8

Siden b kan nu findes på tre forskellige måder:

1) Ifølge sætning 1.13 har vi, at $\cos(28{,}4^o) = \frac{b}{2{,}6}$ og dermed: $b = 2{,}6 \cdot \cos(28{,}4^o)$

2) Ifølge sætning 1.13 har vi, at $\tan(28{,}4^o) = \frac{1{,}2366}{b}$ og dermed: $b = \frac{1{,}2366}{\tan(28{,}4^o)}$

3) Ifølge Pythagoras har vi: $1{,}2366^2 + b^2 = 2{,}6^2$ og dermed: $b = \sqrt{2{,}6^2 - 1{,}2366^2}$

Det overlades til læseren at kontrollere, at vi alle tre tilfælde får: $\underline{b = 2{,}2871}$. ♥

Eksempel 1.15.
I en retvinklet trekant ΔDEF er $\angle D = 90^o$, $|DE| = 3{,}7$ og $|EF| = 6{,}9$, og vi ønsker at bestemme de to ukendte vinkler og den ukendte side.

Ifølge sætning 1.13 ser vi, at: $\sin(\angle F) = \frac{3{,}7}{6{,}9} = 0{,}5362$

Da $\sin^{-1}(0{,}5362) = 32{,}43^o$, er dette en mulig værdi for $\angle F$. Men ifølge eksempel 1.6 a) skal vi også undersøge muligheden $180^o - 32{,}43^o = 147{,}57^o$. Da vi imidlertid arbejder med en retvinklet trekant, og da vinkelsummen i en trekant er 180^o, er der kun 90^o tilbage til de to ikke-rette vinkler. Muligheden $147{,}57^o$ kan derfor ikke bruges, så svaret bliver: $\angle F = 32{,}43^o$.

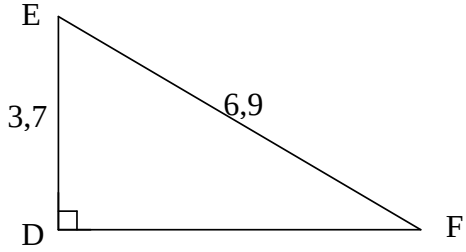


Fig. 1.9

Herefter kan den sidste vinkel, dvs. $\angle E$ nemt bestemmes: $\angle E = 90^o - 32{,}43^o$, dvs. $\angle E = 57{,}57^o$

Endelig kan den ukendte side findes bl.a. v.hj.a. Pythagoras. Det overlades til læseren at kontrollere, at $|DF| = 5{,}824$. ♥

Øvelse 1.16.
I en retvinklet trekant ΔPQR, er $\angle P = 90^o$ og $\angle Q = 18{,}3^o$.
Beregn siderne $|RP|$ og $|QP|$, idet det oplyses, at $|RQ| = 3$. ♥

Øvelse 1.17.
I en retvinklet trekant ΔABC, hvor $\angle A = 90^o$, er $|AB| = 7{,}34$ og $|AC| = 2{,}63$.
Beregn de ukendte vinkler og sider. ♥

Vilkårlige trekanter.

De trigonometriske funktioner sinus og cosinus kan også anvendes til at bestemme ukendte vinkler og sider i vilkårlige trekanter, dvs. trekanter, som ikke forudsættes af have nogle specielle egenskaber som f.eks., at de er retvinklede.
Der er i denne sammenhæng to formelsæt: sinus-relationerne og cosinus-relationerne.

Vi starter med at se på sinus-relationerne. Der gælder her følgende sætning:

Sætning 1.18.
I en vilkårlig trekant ΔABC (på figur 1.10 er tegnet to forskellige muligheder) gælder der:

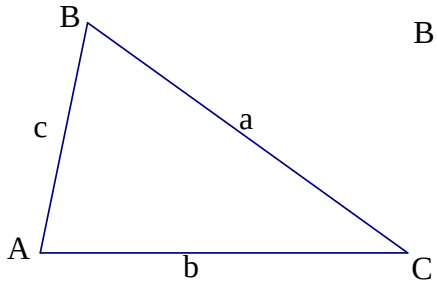


Fig. 1.10 a)

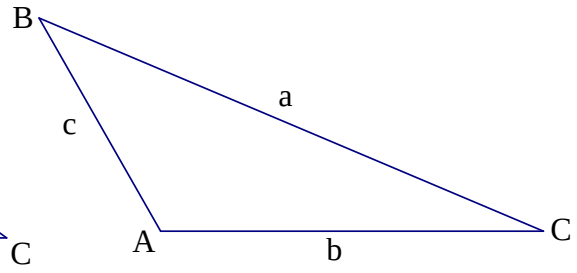


Fig. 1.10 b)

1) Arealet af trekanten er givet ved:

$$\text{Areal}(\Delta ABC) = \tfrac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin C = \tfrac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin A = \tfrac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin B$$

2) Forholdet mellem sinus til en vinkel og den modstående side er ens (**sinusrelationerne**),dvs.:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

Bevis:

Ad 1): Som bekendt (ellers se Appendix 1) gælder der for en vilkårlig trekant ΔABC, at

$$\text{Areal}(\Delta ABC) = \tfrac{1}{2}\cdot \text{Grundlinie}\cdot\text{Højde}$$

hvor en vilkårlig af siderne kan være grundlinien, og hvor højden så er liniestykket, som står vinkelret på grundlinien (eller dennes forlængelse) og som går igennem det modsat liggende punkt.

For trekanter som vist på figur 1.10 er arealet således givet ved:

$$\text{Areal}(\Delta ABC) = \tfrac{1}{2}\cdot a\cdot h_A = \tfrac{1}{2}\cdot b\cdot h_B = \tfrac{1}{2}\cdot c\cdot h_C$$

hvor h_A, h_B og h_C er (længden af) højderne fra hhv. A, B og C (Se figur 1.11 a) og b))

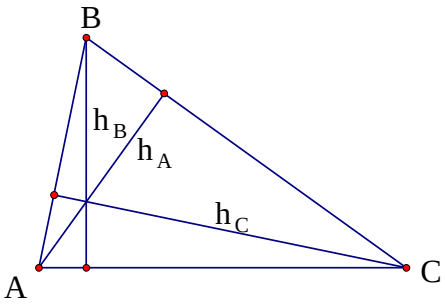


Fig. 1.11 a)

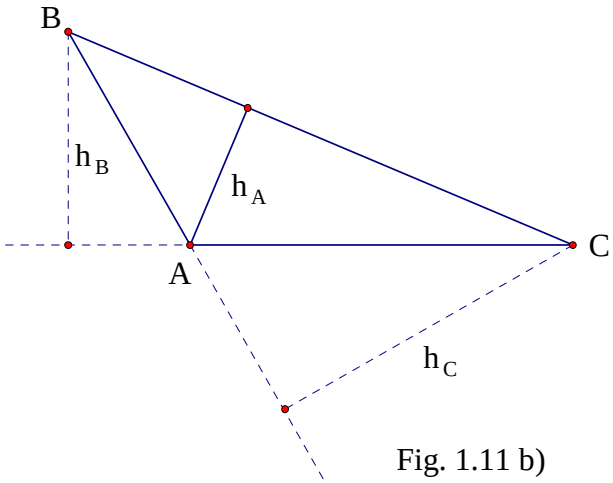


Fig. 1.11 b)

For at bevise formlerne i pkt. 1) i sætningen, skal vi altså bevise (overvej !), at:

$$h_A = b\cdot\sin C \quad , \quad h_B = c\cdot\sin A \quad \text{og} \quad h_C = a\cdot\sin B$$

For en højde, der falder inden i trekanten som f.eks. h_B på figur 1.11 a), følger dette af sætning 1.13 anvendt på ΔABD, hvor D er fodpunktet for højden h_B på siden AC (se figur 1.12). Vi ser her, at

$$\sin(A) = \frac{h_B}{c} \qquad \text{og dermed, at:} \qquad h_B = c\cdot\sin A$$

Og tilsvarende gøres med de øvrige højder.

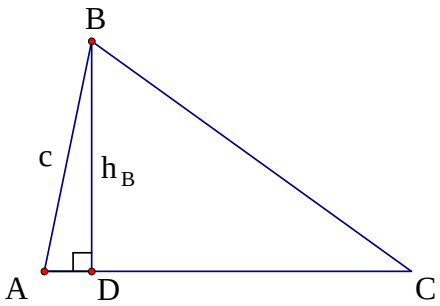


Fig. 1.12

For en højde, der falder udenfor trekanten som f.eks. h_B på figur 1.11 b), anvender vi også sætning 1.13 på ΔABD (se figur 1.13). Vi ser her, at

$$\sin(\angle BAD) = \frac{h_B}{c} \quad \text{og dermed, at:} \quad h_B = c\cdot\sin(\angle BAD)$$

hvor ∠BAD er vinklen ved punktet A i ΔABD (bemærk skrivemåden !).

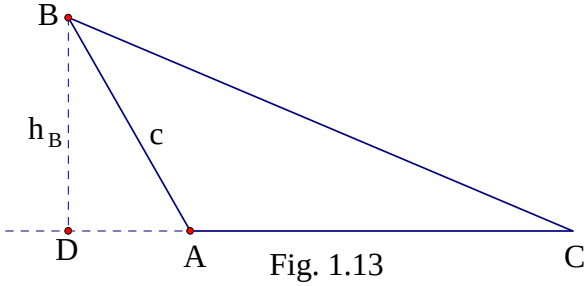


Fig. 1.13

Da $\angle BAD = 180^o - \angle A$ (overvej !), ser vi, at $h_B = c \cdot \sin(180^o - \angle A)$, og ved anvendelse af sætning 1.2 b) får vi endelig, at $h_B = c \cdot \sin(\angle A)$ eller kortere anført: $h_B = c \cdot \sin A$.
Og tilsvarende gøres med andre højder, der falder udenfor trekanten.
Hermed er beviset for punkt 1) gennemført.

Ad 2): Hvis vi i ligningssystemet

$$\tfrac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin C \;=\; \tfrac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin A \;=\; \tfrac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin B$$

fra punkt 1) dividerer overalt med $\tfrac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot c$, så får vi (overvej!): $\dfrac{\sin A}{a} = \dfrac{\sin B}{b} = \dfrac{\sin C}{c}$

Hermed er sætning 1.18 bevist. ♥

Bemærk:

a) Sinusrelationerne gælder også for retvinklede trekanter, men det kan for sådanne bedre betale sig at anvende sætning 1.13 !

b) Sinusrelationerne kan også skrives: $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$

Eksempel 1.19:

Betragt ΔABC, hvor $a = 3$, $b = 5$ og $\angle B = 55^o$. (Læseren opfordres til at lave en skitse).
Vi vil bestemme de ukendte sider og vinkler.

Ud fra sinusrelationen: $\dfrac{\sin A}{a} = \dfrac{\sin B}{b}$ får vi (kontrollér !):

$$\frac{\sin A}{3} = \frac{\sin(55^o)}{5} \;\Leftrightarrow\; \sin A = \frac{3 \cdot \sin(55^o)}{5} \;\Leftrightarrow\; \sin A = 0{,}49149$$

Da $\sin^{-1}(0{,}49149) = 29{,}44^o$ er der ifølge eksempel 1.6 a) to mulige værdier for $\angle A$:

$$\angle A = 29{,}44^o \;\vee\; \angle A = 150{,}56^o$$

I dette tilfælde giver det tvetydige svar dog ikke anledning til problemer, idet vi ved, at $\angle B = 55^o$ og at vinkelsummen i en trekant er 180^o, hvormed muligheden $\angle A = 150{,}56^o$ kan udelukkes.
Vi finder altså: $\underline{\angle A = 29{,}44^o}$ og dermed $\angle C = 180^o - (29{,}44^o + 55^o)$, dvs. $\underline{\angle C = 95{,}56^o}$.

Vi mangler nu kun at finde den ukendte side c. Ud fra sinusrelationen: $\dfrac{\sin C}{c} = \dfrac{\sin B}{b}$ får vi:

$\dfrac{\sin(95{,}56^o)}{c} = \dfrac{\sin(55^o)}{5}$, hvilket giver os (kontrollér !), at: $\underline{c = 6{,}075}$. ♥

Eksempel 1.20.

Om ΔPQR oplyses, at $p = 4$, $q = 5$ og $\angle P = 42^o$.

Ud fra sinusrelationen: $\dfrac{\sin P}{p} = \dfrac{\sin Q}{q}$ får vi: $\dfrac{\sin(42^o)}{4} = \dfrac{\sin Q}{5}$ og dermed: $\sin Q = 0{,}8364$

Da $\sin^{-1}(0{,}8364) = 56{,}76^o$ er der to mulige værdier for $\angle Q$: $\angle Q = 56{,}76^o \;\vee\; \angle Q = 123{,}24^o$

I modsætning til i eksempel 1.18, kan ingen af disse muligheder udelukkes (kontrollér), hvormed der er to mulige trekanter PQR, der passer til de opgivne informationer (kontrollér resultaterne !):
1) $\angle P = 42^o$, $\angle Q = 56{,}76^o$ og $\angle R = 81{,}24^o$, samt $r = 5{,}908$
2) $\angle P = 42^o$, $\angle Q = 123{,}24^o$ og $\angle R = 14{,}76^o$, samt $r = 1{,}523$

På figur 1.14 er vist, hvordan disse løsninger hænger sammen. Det ses, at en cirkel med centrum i R og med radius 4 skærer $\angle P$'s venstre ben to forskellige steder, svarende til to forskellige mulige placeringer af punktet Q – og dermed til de to forskellige sæt værdier af $\angle Q$ og r.

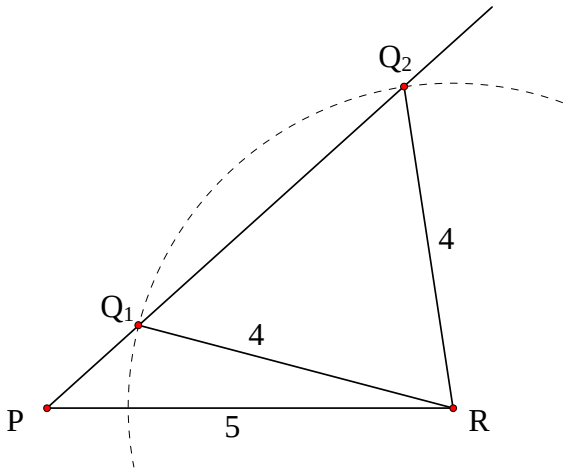


Fig. 1.14

Vi kalder de to mulige placeringer af punktet Q for Q_1 og Q_2 , hvormed de to mulige trekanter, der opfylder betingelserne er: ΔPRQ_1 og ΔPRQ_2 . Sammenlign med resultaterne for r og for $\angle R$. ♥

Øvelse 1.21.
Find de ukendte sider og vinkler for ΔPQR i eksempel 1.20, idet længden af p ændres til: $p = 6$. ♥

Øvelse 1.22.
Betragt ΔDEF, hvor $d = 5{,}2$, $f = 6{,}9$ og $\angle F = 38{,}6^o$.
Beregn de ukendte sider og vinkler i trekanten. ♥

Ukendte sider og vinkler i trekanter kan også beregnes ved hjælp de såkaldte **cosinus-relationer**, idet der gælder følgende sætning:

Sætning 1.23.
I en vilkårlig trekant ΔABC (på figur 1.15 er tegnet to forskellige muligheder) gælder der:

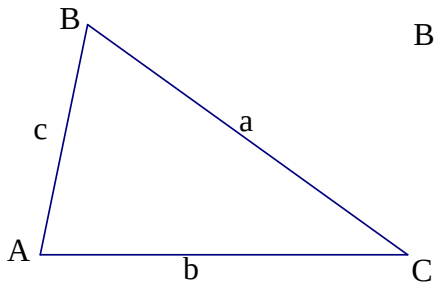


Fig. 1.15 a)

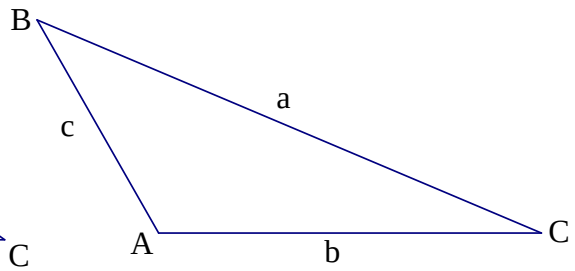


Fig. 1.15 b)

Cosinusrelationerne:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$$

der også kan formuleres således:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Bevis:
I beviset skal vi se på højden fra punkterne i trekanten, og som i beviset for sætning 1.18 skelner vi imellem om højden falder indenfor eller udenfor trekanten (jfr. figur 1.15 og 1.11). .

Lad os først se på den situation, der er givet ved figur 1.16
Vi ser, at højden h_B deler trekanten i to retvinklede trekanter ΔADB og ΔCDB.
Hvis vi ser på ΔADB, så har vi ifølge sætning 1.13, at

$$\cos A = \frac{|AD|}{|AB|} = \frac{|AD|}{c} \text{ og dermed, at: } |AD| = c \cdot \cos A$$

Da $|AC| = b$ og $|DC| = |AC| - |AD|$, ser vi at:
$|DC| = b - c \cdot \cos A$ (jfr. figuren).

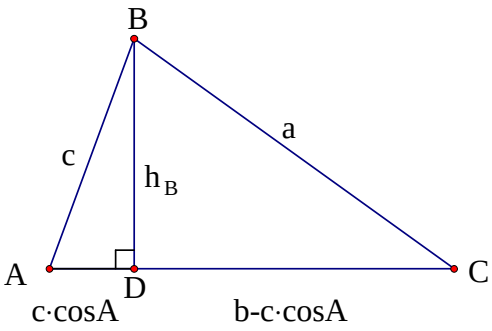


Fig. 1.16

Ved at anvende Pythagoras på ΔADB får vi:
$c^2 = (c \cdot \cos A)^2 + (h_B)^2$ og dermed: $(h_B)^2 = c^2 - (c \cdot \cos A)^2$

Ved at anvende Pythagoras på ΔCDB får vi:
$a^2 = (b - c \cdot \cos A)^2 + (h_B)^2$ og dermed: $(h_B)^2 = a^2 - (b - c \cdot \cos A)^2$

Ved at sætte de to udtryk for $(h_B)^2$ lig med hinanden får vi: $c^2 - (c \cdot \cos A)^2 = a^2 - (b - c \cdot \cos A)^2$
På højre side af lighedstegnet forekommer kvadratet på en toleddet størrelse $(b - c \cdot \cos A)^2$ og ved at udregne dette på sædvanlig måde (en af kvadratsætningerne) får vi i alt (kontrollér detaljerne):

$$c^2-(c\cdot\cos A)^2 = a^2-(b-c\cdot\cos A)^2 \quad \Leftrightarrow$$
$$c^2-(c\cdot\cos A)^2 = a^2-(b^2+(c\cdot\cos A)^2-2bc\cdot\cos A) \quad \Leftrightarrow$$
$$c^2-(c\cdot\cos A)^2 = a^2-b^2-(c\cdot\cos A)^2+2bc\cdot\cos A \quad \Leftrightarrow$$
$$c^2 = a^2-b^2+2bc\cdot\cos A \quad \Leftrightarrow$$
$$a^2 = b^2+c^2-2bc\cdot\cos A$$

hvormed den ønskede formel i relation til cos(A) er fremkommet. På samme måde udledes de øvrige formler, så længe den tilsvarende højde falder indenfor trekanten.

Hvis højden falder udenfor trekanten, kan vi f.eks. have en situation som vist på figur 1.17 (jfr. figur 1.11 b)). Vi ser, at vi her har to retvinklede trekanter, som indeholder højden h_B, nemlig: ΔABD og ΔCBD. Som før vil vi anvende Pythagoras på disse to trekanter, men først vil vi finde et udtryk for $|AD|$ og for $|CD|$.

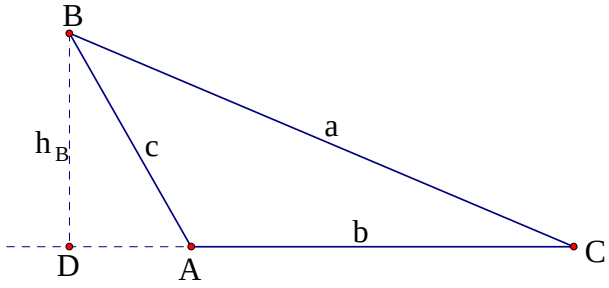


Fig. 1.17

I ΔABD har vi ifølge sætning 1.13, at $\cos(\angle DAB) = \dfrac{|AD|}{c}$ og dermed: $|AD| = c\cdot\cos(\angle DAB)$,

hvor vi har anvendt benævnelsen $\angle DAB$ for at få vinklen ved punktet A i denne trekant.
Vi ser hermed også, at $|CD| = b + c\cdot\cos(\angle DAB)$.

I ΔABD får vi v.hj.a. Pythagoras og omskrivning, at: $h_B^2 = c^2-(c\cdot\cos(\angle DAB))^2$

Og i ΔCBD får vi tilsvarende, at: $h_B^2 = a^2-(b+c\cdot\cos(\angle DAB))^2$

Ved at sætte de to udtryk for $(h_B)^2$ lig med hinanden og foretagende omskrivninger som ovenfor får vi:

$$c^2-(c\cdot\cos(\angle DAB))^2 = a^2-(b+c\cdot\cos(\angle DAB))^2 \quad \Leftrightarrow$$
$$c^2-(c\cdot\cos(\angle DAB))^2 = a^2-(b^2+(c\cdot\cos(\angle DAB))^2+2bc\cdot\cos(\angle DAB)) \quad \Leftrightarrow$$
$$c^2-(c\cdot\cos(\angle DAB))^2 = a^2-b^2-(c\cdot\cos(\angle DAB))^2-2bc\cdot\cos(\angle DAB) \quad \Leftrightarrow$$
$$c^2 = a^2-b^2-2bc\cdot\cos(\angle DAB) \quad \Leftrightarrow$$
$$a^2 = b^2+c^2+2bc\cdot\cos(\angle DAB)$$

Dette ligner ikke helt det rigtige resultat. Men vi må her huske på, at der i den sidste formel står cosinus til $\angle DAB$, som ligger i ΔABD, mens vi i sætningen skal have fat på $\angle A$ i ΔABC.
Som det fremgår af figur 1.17 har vi: $\angle DAB = 180^o - \angle A$, hvormed vi ifølge sætning 1.2 b) får:

$$\cos(\angle DAB) = \cos(180^o-\angle A) = -\cos(\angle A)$$

Hvis vi indsætter dette i den netop beviste formel: $a^2 = b^2+c^2+2bc\cdot\cos(\angle DAB)$, så får vi:

$$a^2 = b^2+c^2+2bc\cdot(-\cos(\angle A)) \quad \text{dvs.} \quad a^2 = b^2+c^2-2bc\cdot\cos A$$

hvormed det ønskede resultat er opnået.
På samme måde udledes de øvrige formler, hvor den tilsvarende højde falder udenfor trekanten.
De alternative formler i cosinus-relationerne fremkommer ved at isolere cosinus til vinklen. Dette overlades til læseren som en øvelse. Hermed er sætning 1.23 bevist. ♥

Eksempel 1.24.

Betragt ΔABC, hvor a = 3, b = 6 og c = 4 (se figur 1.18).
Vi vil gerne bestemme trekantens vinkler.
Vi bemærker, at der ikke er opgivet nogen vinkel, hvormed sinusrelationerne ikke kan bringes i anvendelse. Men cosinus-relationerne redder situationen idet vi har:

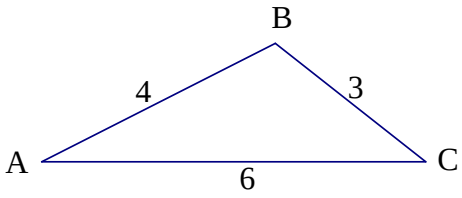


Fig. 1.18

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{6^2 + 4^2 - 3^2}{2 \cdot 6 \cdot 4} = 0{,}89583$$

hvoraf vi ser, at $\angle A = 26{,}38^o$.

Tilsvarende ser vi, at: $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{3^2 + 4^2 - 6^2}{2 \cdot 3 \cdot 4} = -0{,}45833 \Rightarrow \angle B = 117{,}28^o$

Endelig kan vinkel C findes enten ved endnu en anvendelse af cosinus-relationerne (kontrollér) eller ud fra, at vinkelsummen i trekant er 180^o. Vi får: $\angle C = 36{,}34^o$. ♥

Eksempel 1.25.

Lad os prøve at se på problemstillingen fra eksempel 1.20 og se, hvordan cosinus-relationerne virker i denne sammenhæng:
Om ΔPQR oplyses, at p = 4, q = 5 og $\angle P = 42^o$.
Ifølge cosinus-relationerne får vi (overvej !):

$$4^2 = r^2 + 5^2 - 2 \cdot r \cdot 5 \cdot \cos(42^o) \Leftrightarrow r^2 - 7{,}43145 \cdot r + 9 = 0$$

dvs. vi skal løse en andengradsligning for at finde den ukendte side r.
Da diskriminanten er 19,2264 ser vi, at der er to løsninger. Der er altså tale om et tvetydigt tilfælde.
Disse løsninger findes (kontrollér !): r = 5,908 ∨ r = 1,523, altså præcis de samme værdier som vi fandt i eksempel 1.20.
For at finde vinklerne, kan vi herefter anvende cosinus-relationerne:

1) $\cos(Q_1) = \frac{1{,}523^2 + 4^2 - 5^2}{2 \cdot 1{,}523 \cdot 4} \Leftrightarrow \cos(Q_1) = -0{,}5483 \Leftrightarrow \angle Q_1 = 123{,}25^o$

2) $\cos(Q_2) = \frac{5{,}908^2 + 4^2 - 5^2}{2 \cdot 5{,}908 \cdot 4} \Leftrightarrow \cos(Q_2) = 0{,}5481 \Leftrightarrow \angle Q_2 = 56{,}76^o$

altså præcis de samme resultater som i eksempel 1.20 (på nær en afrundingsforskel på sidste ciffer).
Den ukendte vinkel ∠R kan herefter findes ud fra, at vinkelsummen i en trekant er 180^o. ♥

Øvelse 1.26.

I ΔABC gælder der, at $\angle C = 102^o$, a = 4,14 og b = 6,65. Beregn de ukendte sider og vinkler. ♥

Øvelse 1.27.

I ΔDEF gælder der, at d = 6,97, e = 4,81 og f = 5,62. Beregn de ukendte sider og vinkler. ♥

Øvelse 1.28.

I ΔABC gælder der, at $\angle C = 38{,}6^o$, a = 5,9 og b = 7,2. Beregn de ukendte sider og vinkler. ♥

Øvelse 1.29.
Løs problemstillingen i eksempel 1.18 v.hj.a. cosinus-relationerne. ♥

Bemærk, at hvis det er muligt at bruge cosinus-relationerne i forbindelse med bestemmelse af en ukendt vinkel, så kan det almindeligvis bedst betale sig at bruge disse i stedet for sinus-relationerne, idet man da undgår tvetydighed om vinklens størrelse, hvor der ikke er grund til det.

Kap. 2: Trigonometriske funktioner og radianer.

Radianer som vinkelmål.

I begyndelsen af kapitel 1 så vi på, hvordan grader som mål for en vinkels størrelse defineres.
Vi vil nu indføre endnu et vinkelmål. Vi betragter denne gang en speciel cirkel med centrum i vinklens toppunkt, nemlig en cirkel med radius 1 (en enhedscirkel). Vinklens størrelse sættes da lig med længden af den cirkelbue, som vinklen afskærer (se figur 2.1). Vi siger da, at vi har angivet radiantallet for vinklen. Vi kan således angive følgende definition:

Definition 2.1.

Ved radiantallet v for en vinkel forstås længden af den cirkelbue, som vinklen afskærer på en enhedscirkel med centrum i vinklens toppunkt.

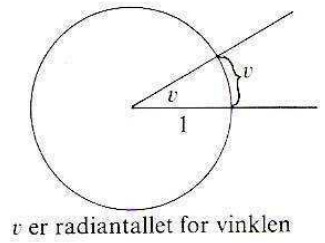


Fig. 2.1 *v* er radiantallet for vinklen

Eksempel 2.2.

a) Radiantallet for en ret vinkel er $\frac{\pi}{2}$, idet en ret vinkel afskærer $\frac{1}{4}$ af cirkelperiferien (som på en enhedscirkel har længden 2π).

b) På nedenstående figur 2.2 er afsat vinkler med radiantallene 1, 2, 3, 4 og 5.

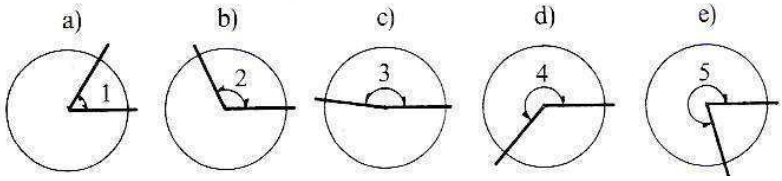


Fig. 2.2 ♥

Hvis vi vender tilbage til figur 1.2, hvorom der gjaldt udtrykket: $\frac{s_2}{s_1} = \frac{r_2}{r_1}$, og hvis vi her specielt ser på den situation, hvor $r_1 = 1$ (dvs. hvis vi betragter en enhedscirkel), så får vi: $s_2 = s_1 \cdot r_2$. Og hvis radiantallet for den pågældende vinkel er v, så har vi ifølge definition 2.1, at $s_1 = v$, og dermed i alt, at $s_2 = v \cdot r_2$. Vi har dermed bevist følgende sætning:

Sætning 2.3.

En vinkel med radiantallet v, som anbringes med toppunkt i centrum af en cirkel med radius r, vil afskære et buestykke s på denne cirkel med længden: $s = v \cdot r$

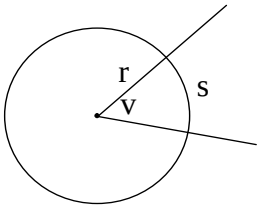


Fig. 2.3

Vi vil nu finde en omregningsfaktor mellem vinkler angivet i "grader" og vinkler angivet i "radianer".
En vinkel på 180^o afskærer halvdelen af cirkelperiferien på en enhedscirkel med centrum i vinklens toppunkt (se figur 2.4).
Da enhedscirklens periferi har længden $2\pi \cdot r = 2\pi$ (idet r = 1), får vi: $180^o = \pi$ radianer, og dermed:

$$1^o = \frac{\pi}{180} \text{ radianer} \quad \text{og tilsvarende:} \quad 1 \text{ radian} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^o$$

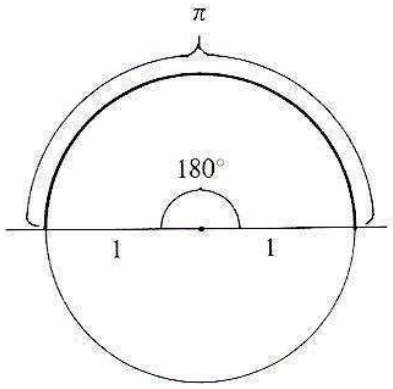


Fig. 2.4

Heraf ser vi, at der gælder følgende sætning:

Sætning 2.4.

a) En vinkel på v^o har radiantallet: $\frac{\pi}{180} \cdot v$

b) En vinkel med radiantallet w har gradtallet: $\left(\frac{180}{\pi} \cdot w\right)^o$

Eksempel 2.5.
Der gælder følgende sammenhæng mellem nogle bestemte "pæne" vinklers gradtal og radiantal:

Grader	0^o	30^o	45^o	60^o	90^o	120^o	135^o	150^o	180^o
Radiantal	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

Dette ses v.hj.a. sætning 2.4, idet vi f.eks. har:

$$30^o = \frac{\pi}{180} \cdot 30 \text{ radianer} = \frac{\pi}{6} \text{ radianer} \qquad \text{og} \qquad \frac{3\pi}{4} = \left(\frac{180}{\pi} \cdot \frac{3\pi}{4}\right)^o = 135^o. \quad \heartsuit$$

Det skal bemærkes, at de fleste af de regnemaskiner, der anvendes i undervisningen (herunder TI 83/84–serien) har en speciel tast til angivelse af π med et vist (stort) antal decimaler. π er et irrationalt tal, men med 9 decimalers nøjagtighed er π cirka givet ved: $\pi = 3{,}141592654$.

Eksempel 2.6.
Ifølge sætning 2.4 har vi, at

- hvis en vinkel er $28{,}31^o$, så er radiantallet: $\frac{\pi}{180} \cdot 28{,}31 = 0{,}4941$
- hvis en vinkel har radiantallet 2,18, så er gradtallet: $\left(\frac{180}{\pi} \cdot 2{,}18\right)^o = 124{,}9^o$ ♥

Øvelse 2.7.
a) Omregn følgende vinkler, som er angivet i grader, til radiantal: 1^o , $49{,}6^o$, $172{,}4^o$, 341^o
b) Omregn følgende vinkler, som er angivet i radiantal, til grader: 1 , 2 , 0,64 , 1,893 , 5,2 ♥

Sinus og cosinus.

Sinus og cosinus til en vinkel angivet i radianer defineres på præcis samme måde, som da vinklen var angivet i grader (jfr. kapitel 1):
Hvis vi har en vinkel af størrelsen v, så placeres vinklens toppunkt i et koordinatsystem i punktet (0,0), således at vinklens højre ben falder sammen med den positive del af 1.aksen (se figur 2.5). Vinklens venstre ben vil da skære enhedscirklen (med centrum i (0,0)) i et punkt P, som kaldes retningspunktet for vinklen.
Punktet P's koordinater er pr. definition lig med $(\cos v, \sin v)$, dvs. $\cos v$ er den værdi, der fremkommer på 1.aksen, når P projiceres ned på 1.aksen; og tilsvarende med $\sin v$.

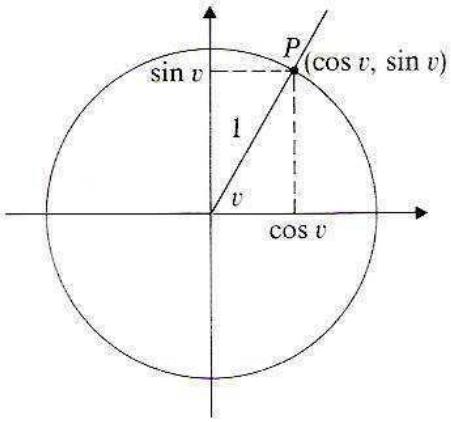


Fig. 2.5

I forhold til at finde sinus-værdien eller cosinus-værdien af en given vinkel, er det altså underordnet, om vi måler vinklen i radianer eller i grader. $\sin v$ og $\cos v$ bliver de samme tal. Dermed gælder de sætninger, der er vist i kapitel 1 i relation til trekanter, også, hvis vinklerne måles i radianer.

Øvelse 2.8.

a) Argumentér for, at der gælder følgende formler: $\sin(\pi - v) = \sin v$ og $\cos(\pi - v) = -\cos v$

b) Vis (v.hj.a. a) samt Pythagoras anvendt på passende trekanter ved enhedscirklen), at der gælder:

v	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
sin(v)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
cos(v)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	–1

Vejledning til $\frac{\pi}{3}$: Afsætn retningspunktet P for $\frac{\pi}{3}$. Forbind P med punktet O =(0,0) og E = (1,0) Gør rede for, at ΔOPE er ligesidet, og at P's projektion på OE er midtpunktet af OE. Brug dette.

Vejledning til $\frac{\pi}{6}$: Afsætn retningspunktet P for $\frac{\pi}{6}$. Forbind P med punktet O =(0,0) og P's spejlbillede Q i 1.aksen. Gør rede for, at ΔOPQ er ligesidet, og at 1.aksen skærer PQ i midtpunktet. Brug dette. ♥

Det skal bemærkes, at når vi beskæftiger os med trigonometriske funktioner (som sinus og cosinus), så udelades betegnelsen "radianer" oftest ved vinkelangivelser. Vi taler således blot om "sinus til 2" (sin(2)) i stedet for "sinus til 2 radianer".
Dette stemmer også fint overens med det følgende, hvor det forklares, hvordan vi kan finde sinus og cosinus til et vilkårligt tal $x \in R$.

Vi forestiller os en tallinie anbragt vinkelret på 1.aksen i punktet E = (1,0), således at talliniens nulpunkt falder sammen med punktet E (se figur 2.6 a)). Derefter "vikles" tallinien rundt om enhedscirklen, således at den positive del drejes mod urets omløbsretning – denne retning kaldes den positive omløbsretning –, medens den negative del af tallinien drejes med uret – dette kaldes den negative omløbsretning. (Se figur 2.6 b) og c)).

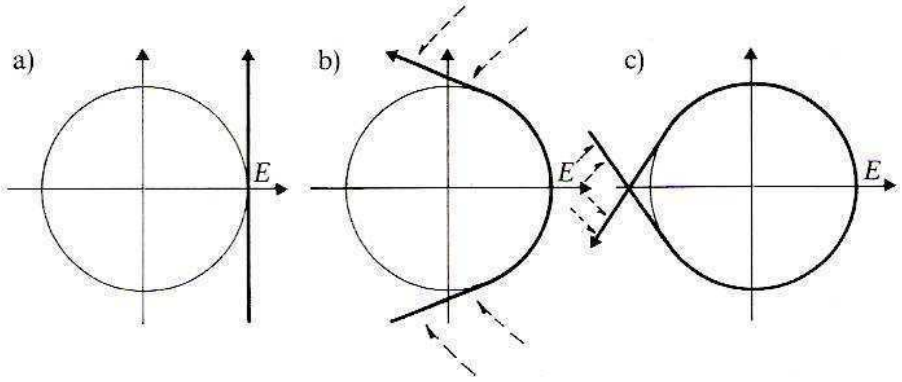


Fig. 2.6

Der vil dermed for alle tal $x \in R$ være en entydig bestemt placering på enhedscirklen. Denne placering kaldes retningspunktet for tallet x, og $\cos x$ og $\sin x$ defineres ud fra retningspunktet på præcis samme måde som vist på figur 2.5.
Det ses hermed (overvej !), at: $Dm(\cos) = Dm(\sin) = R$ og $Vm(\cos) = Vm(\sin) = [-1;1]$
Når vi v.hj.a. grafregneren skal finde sinus eller cosinus til et tal, skal regnemaskinen være indstillet på "radianer", idet dette netop stemmer overens med at finde værdierne til et tal (overvej dette !).

Øvelse 2.9.

a) Find placeringen af følgende tal på enhedscirklen (tegn en enhedscirkel og markér punkterne):
-30000 , -23 , $-5{,}7$, $0{,}21$, 10 , 234567

b) Find sin(x) for hver af følgende værdier at tallet x: -507, -8, 2, $\frac{\pi}{2}$, 2088, $0{,}0123456$

c) Skitser grafen for cos(x) , $x \in [0;7]$ (v.hj.a. en lang række støttepunkter for grafen !!). ♥

Det ses (overvej !), at tallene

..... $x - 3\cdot 2\pi$, $x - 2\cdot 2\pi$, $x - 2\pi$, x , $x + 2\pi$, $x + 2\cdot 2\pi$, $x + 3\cdot 2\pi$, ...

alle har samme retningspunkt (bliver placeret i samme punkt på enhedscirklen), idet enhedscirklens omkreds er 2π.
Dette kan skrives således: Retningspunkterne for tallene: $x + p\cdot 2\pi$, $p \in Z$, er sammenfaldende.

Vi ser derfor, at der for alle $p \in Z$ gælder, at

$$\sin(x + p \cdot 2\pi) = \sin x$$
$$\cos(x + p \cdot 2\pi) = \cos x$$

I denne forbindelse siger vi, at sin og cos er periodiske (dvs. gentager sig selv) med perioden 2π.

Sinus og cosinus får således følgende grafiske billeder (hvor vi også har anvendt øvelse 2.9):

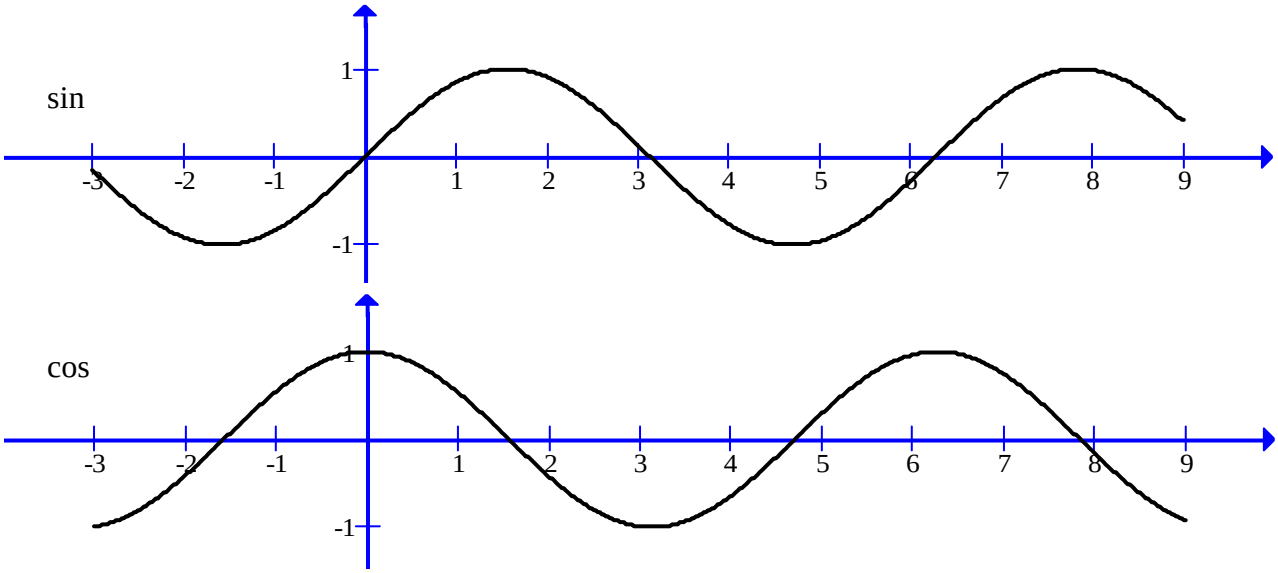


Fig. 2.7

Afslutningsvist skal det omtales, at vi (som allerede gjort) kan skrive $\sin x$ eller sin(x) efter behag. Det samme gælder f.eks. $\sin 3x$ eller sin(3x). Men jo mere "komplekst" et udtryk vi har stående som den variable til funktionen sinus (eller cosinus), desto mere nødvendige bliver funktionsparenteserne. Se f.eks. $\sin(x + p \cdot 2\pi)$ i det ovenstående. Her kan parenteserne ikke undværes.

Det skal ligeledes bemærkes, at vi skriver f.eks. $\sin^3 x$ i stedet for $(\sin x)^3$, dvs. $\sin^3 x = (\sin x)^3$, og f.eks. $\cos^2(4x)$ i stedet for $(\cos(4x))^2$, dvs. $\cos^2(4x) = (\cos(4x))^2$.

Harmoniske funktioner.

Funktioner af typen:

$$f(x) = A \cdot \sin(bx + c) \quad \text{og} \quad g(x) = A \cdot \cos(bx + c)$$

hvor A, b og c er givne tal ($A \neq 0$ og $b \neq 0$) kaldes harmoniske funktioner.
Funktioner af denne type bruges bl.a. til at beskrive svingninger af forskellig slags (se kap. 4), og i den sammenhæng siges funktionerne at beskrive harmoniske svingninger.

Vi vil undersøge betydningen af hvert af tallene A, b og c. Men inden vi gør dette, skal det først bemærkes, at:

- vi i det følgende får brug for at foretage parallelforskydninger og rette affiniteter for funktioners grafer. Der henvises i denne sammenhæng til den generelle teori herom i Appendix 2.

- da $\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ (jfr. den nedenstående øvelse 2.35), er $\cos(bx + c) = \sin\left(bx + c + \frac{\pi}{2}\right)$

  Hvis vi sætter $c_1 = c + \frac{\pi}{2}$, så ser vi, at $A \cdot \cos(bx + c) = A \cdot \sin(bx + c_1)$. Funktionen g(x) er altså af typen f(x), hvorfor vi i det følgende kun vil undersøge denne type funktioner.
- hvis vi ser på funktionen $h(x) = A \cdot \sin(bx + c) + d$, hvor d er et givet tal, så vil grafen for h(x) fremkomme af grafen for f(x) ved en parallelforskydning i 2.aksens retning (der lægges tallet d til alle funktionsværdier).
  Måden h(x) og f(x) svinger på er imidlertid den samme, så vi vil i det følgende kun se på f(x).
- i praktiske anvendelser er tiden oftest den variable. Vi vil derfor i modeleksempler benævne den variable med et t i stedet for x, hvormed vi da ser på funktioner af typen: $f(t) = A \cdot \sin(b \cdot t + c)$

Øvelse 2.10.
Tegn (v.hj.a. grafregneren eller et graftegningsprogram) graferne for de tre funktioner:

$$f_1(x) = 0{,}5 \cdot \sin(2x) \quad , \quad f_2(x) = 2 \cdot \sin(3x) \quad , \quad f_3(x) = \sin(3x - 1)$$

i samme koordinatsystem – og prøv at kommentere resultatet. ♥

1. tilfælde: A = 1 og c = 0.
I dette tilfælde er funktionsforskriften givet ved: $f(x) = \sin(b \cdot x)$.
Det er altså betydningen af b, vi vil se nærmere på her.

Vi vil først se på et eksempel: $f(x) = \sin(2x)$. Lad (x_o, y_o) være et vilkårligt punkt på grafen for f (se figur 2.8). Da der om et punkt på grafen gælder, at $f(x_o) = y_o$, ser vi, at $y_o = \sin(2x_o)$. Dette betyder også, at punktet $(2x_o, y_o)$ ligger på grafen for sin. Vi får således, at grafen for funktionen f fremkommer ved at halvere 1.koordinaten og beholde 2.koordinaten for punkterne på grafen for funktionen sin. Denne operation kaldes (som omtalt i Appendix 2) for en ret affinitet i 2.aksen med forvandlingstallet $\frac{1}{2}$. Grafen for f(x) = sin(2x) ser dermed ud som vist på figur 2.8.
Det skal bemærkes, at f(x) = sin(2x) er periodisk med perioden π, idet:

$$f(x + \pi) = \sin(2(x + \pi)) = \sin(2x + 2\pi) = \sin(2x) = f(x)$$

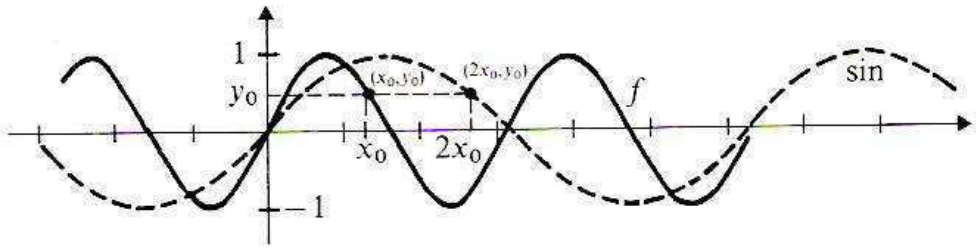


Fig. 2.8

På samme måde fås eksempelvis graferne for sin(0,7x) og sin(4x):

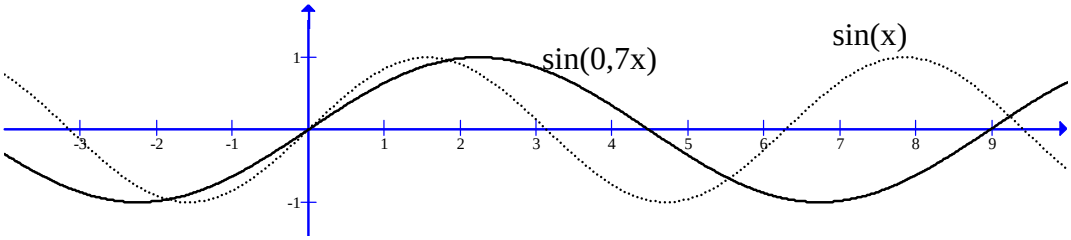


Fig. 2.9

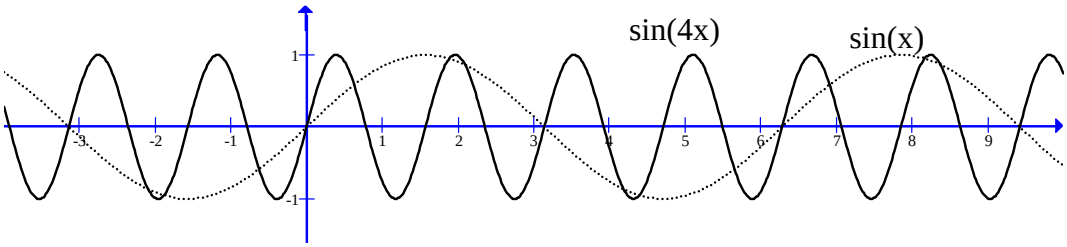


Fig. 2.10

Vi ser, at sin(4x) svinger 4 gange så hurtigt som sin(x), og at sin(0,7x) svinger 0,7 gange så hurtigt som sin(x) – svarende til, at graferne for de to funktioner fremkommer ved rette affiniteter om 2.aksen med forvandlingstallene $\frac{1}{4}$ hhv. $\frac{1}{0,7} = \frac{10}{7}$ $(=1,4286)$

Øvelse 2.11.

Vis, at sin(4x) er periodisk med perioden $\frac{\pi}{2}$, og at sin(0,7x) er periodisk med perioden $\frac{2\pi}{0,7}$ ♥

Generelt gælder der følgende sætning:

Sætning 2.12

sin(bx) svinger b gange så hurtigt som sin(x), og sin(bx) er periodisk med perioden $\frac{2\pi}{b}$

Bevis:

Ifølge sætning A.2.5 , har vi, at grafen for f(x) = sin(bx) fremkommer af grafen for sin(x) v.hj.a. en ret affinitet i 2.aksen med forvandlingstallet $\frac{1}{b}$. Dette fremgår af, at $bx = \frac{1}{\frac{1}{b}} \cdot x = \frac{x}{\frac{1}{b}}$, hvoraf det ses, at størrelsen h i sætning A.2.5 er lig med $\frac{1}{b}$. Længden af én hel svingning for sin(bx) er altså $\frac{1}{b}$ af længden af én hel svingning for sin(x), hvormed det ses, at sin(bx) svinger b gang så hurtigt som sin(x). Af samme årsag bliver perioden for sin(bx) lig med $\frac{1}{b}$ af perioden for sin(x) – og den er som tidligere omtalt 2π.

At funktionen f(x) = sin(bx) er periodisk med perioden $\frac{2\pi}{b}$ kan også indses på følgende måde:

$$f(x+\frac{2\pi}{b}) \;=\; \sin(b(x+\frac{2\pi}{b})) \;=\; \sin(bx+2\pi) \;=\; \sin(bx) \;= f(x).$$

Idéen til størrelsen af perioden P kan man i øvrigt også få gennem følgende betragtning: Da sin er periodisk med perioden 2π, skal der gælde, at når 1.koordinaten forøges med P, så forøges det man tager sinus til med 2π. Der skal altså gælde: $b\cdot(x+P) \;=\; bx+2\pi$, hvoraf vi finder, at $P = \frac{2\pi}{b}$

Hermed er sætningen bevist. ♥

Bemærk, at hvis tiden er den variable, (f.eks. hvis vi ser på en bølge i et givet punkt), så kaldes perioden for svingningstiden T, og der gælder, at $T \;=\; \frac{2\pi}{b}$. Svingningstiden er det stykke tid, der går, fra bølgen er f.eks. i toppen til den igen er i toppen.

2. tilfælde: c = 0.

I dette tilfælde er funktionsforskriften givet ved: $f(x) \;=\; A\cdot\sin(b\cdot x)$.

Da betydningen af b er gennemgået ovenfor, er det altså betydningen af A, vi vil se nærmere på her. Tallet A kaldes amplituden for svingningen.

Vi vil først se på et eksempel: $g(x) = 2\sin(x)$, dvs. A = 2 (og b = 1). Lad (x_o,y_o) være et punkt på grafen for g (se figur 2.11). Da der om et punkt på grafen gælder, at $g(x_o) \;=\; y_o$, ser vi, at $y_o = 2\sin(x_o)$. Dette betyder også, at punktet $(x_o, \frac{1}{2}y_o)$ ligger på grafen for sin.

Vi får således, at grafen for funktionen g fremkommer ved at beholde 1.koordinaten og fordoble 2.koordinaten for punkterne på grafen for funktionen sin. Denne operation kaldes (som omtalt i Appendix 2) for en ret affinitet i 1.aksen med forvandlingstallet 2. Grafen for g(x) = 2sin(x) ser dermed ud som vist på figur 2.11.

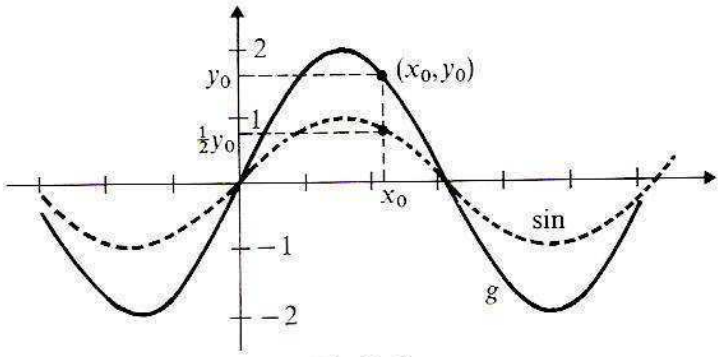


Fig. 2.11

På samme måde fås eksempelvis graferne for $-0{,}5\sin(0{,}7x)$ og $2{,}5\sin(4x)$:

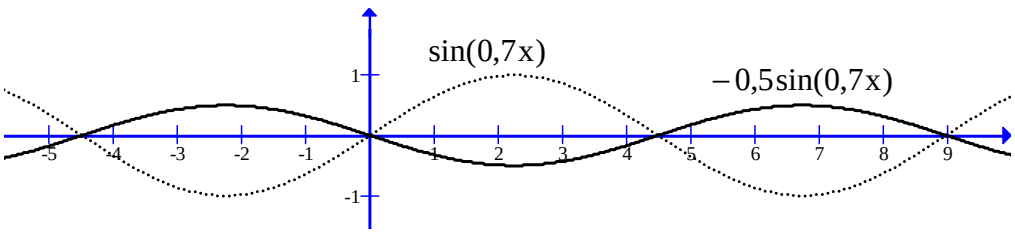


Fig. 2.12

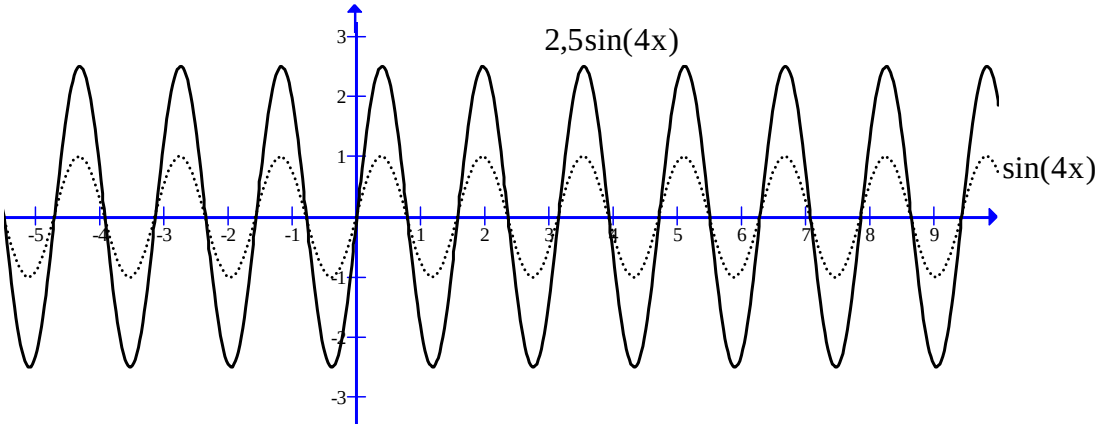


Fig. 2.13

Øvelse 2.13.
Tegn graferne for følgende funktioner (v.hj.a. et graftegningsprogram):
1) $1{,}3\sin(3x)$ 2) $-\frac{3}{2}\cos(0{,}5x)$ 3) $0{,}2\sin(10x)$ 4) $5\cos(3\pi x)$
Kommentér resultaterne – og angiv perioden for hver af funktionerne. ♥

3. tilfælde: $c \neq 0$.
I dette tilfælde er forskriften givet ved: $f(x) = A \cdot \sin(bx + c)$. Da betydningen af A og b er gennemgået ovenfor, er det betydningen af c, der skal omtales. Men som det skal vise sig, spiller værdien af b også en rolle for betydningen af c. Tallet c kaldes startfasen eller begyndelsesfasen for svingningen.

Eksempel 2.14.
Vi vil bestemme udseendet af grafen for funktionen: $f(x) = 3\sin(2x+1)$.
Vi starter med at se på funktionen $h(x) = 3\sin(2x)$, hvis udseende er velkendt ifølge ovenstående beskrivelse af 1. og 2. tilfælde. Det ses, at $f(x) = h(x-(-\frac{1}{2}))$, idet:

$$h(x-(-\tfrac{1}{2})) = 3\sin(2(x-(-\tfrac{1}{2})) = 3\sin(2(x+\tfrac{1}{2})) = 3\sin(2x+1) = f(x)$$

Ifølge sætning A.2.1 får vi dermed, at grafen for f fremkommer af grafen for h ved at parallelforskyde grafen for h stykket $-\frac{1}{2}$ langs 1.aksen. Se figur 2.14.

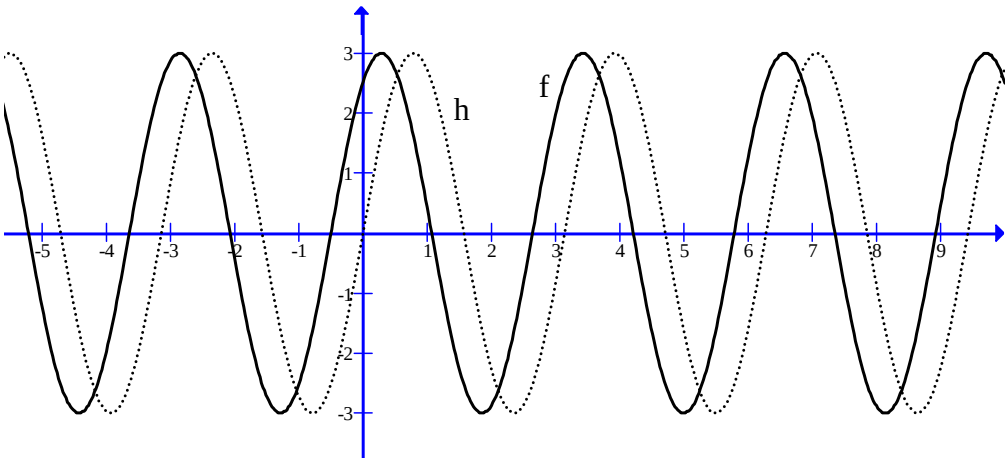


Fig. 2.14 ♥

På samme måde som i eksempel 2.14 indses (overvej/kontrollér), at:

Grafen for f(x) = $A \cdot \sin(bx + c)$ fremkommer ved at parallelforskyde grafen for h(x) = $A \cdot \sin(bx)$ stykket $-\frac{c}{b}$ langs 1.aksen.

Øvelse 2.15.
Tegn graferne for følgende funktioner (v.hj.a. et graftegningsprogram) (Jfr. øvelse 2.13):
1) $1{,}3\sin(3x-3)$ 2) $-\frac{3}{2}\cos(0{,}5x+10)$ 3) $0{,}2\sin(10x-25)$ 4) $5\cos(3\pi x+2\pi)$
Kommentér resultaterne. ♥

Tangens.

Funktionen tangens er som omtalt i kapitel 1 defineret ved: $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, og dette gælder uanset om x er en vinkel målt i grader eller radianer, eller om x er et tal.

$\tan x$ er defineret for alle de tal x, hvor $\cos x \neq 0$, dvs. Dm(tan) = $\left\{x \in R \,\middle|\, x \neq \frac{\pi}{2} + p \cdot \pi,\ p \in Z\right\}$
(Læseren opfordres til at finde placeringen på enhedscirklen af de tal, hvor tan ikke er defineret!).

V.hj.a. en enhedscirkel kan vi, som omtalt og bevist i kapitel 1, få et indtryk af, hvordan $\tan x$ varierer, når x varierer. På figur 2.15 er vist retningspunkterne P_x og P_y for to tal x og y, samt hvordan $\tan x$ hhv. $\tan y$ findes v.hj.a. linien, der går parallelt med 2.aksen igennem punktet E =(1,0).

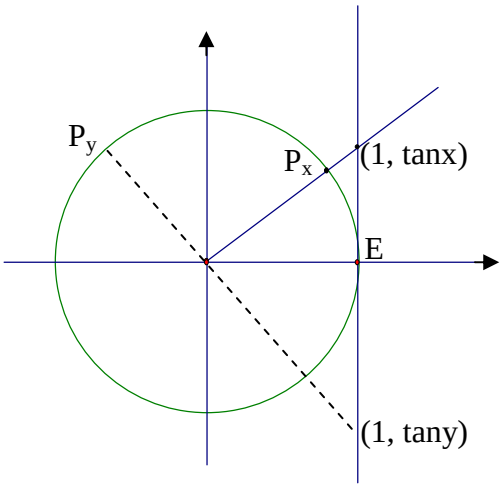


Fig. 2.15

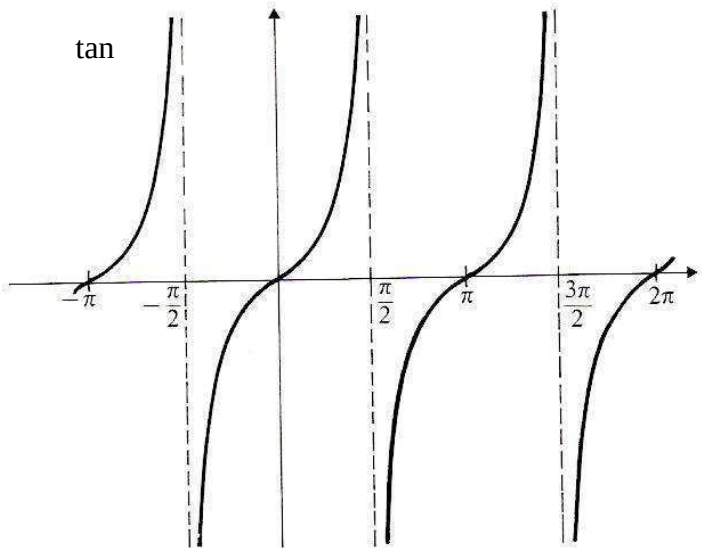


Fig. 2.16

Også $\tan x$ kan findes på grafregneren (husk at indstille den til "radianer"). Ved at udregne en passende mængde støttepunkter, samt ved anvendelse af kendskab til Dm(tan) og metoden på figur 2.15, ser vi, at grafen for tan har et udseende som vist på figur 2.16.
Vi ser også (overvej!), at Vm(tan) = R.

Det ser af grafen ud til, at tan er periodisk med perioden π, dvs. at der for alle $x \in Dm(tan)$ gælder, at $\tan(x+\pi) = \tan x$. At dette rent faktisk er tilfældet indses ved at løse nedenstående øvelse 2.33 i afsnittet om omskrivningsformler for sinus, cosinus og tangens.

Øvelse 2.16.
Vis v.hj.a. øvelse 2.8, at følgende tabel over tangens-værdier er korrekt:

v	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
tan(v)	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	i.d.	$-\sqrt{3}$	–1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

(i.d. betyder: ikke defineret). ♥

Øvelse 2.17.

Der findes en trigonometrisk funktion cotangens (cot), som er defineret ved: $\cot(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$

a) Argumentér for, at $Dm(\cot) = \{x \in R \mid x \neq p \cdot \pi,\ p \in Z\}$

b) Argumentér for, at $\cot(x) = \frac{1}{\tan(x)}$

c) Argumentér for, at cot(v) for et givet tal eller en given vinkel v kan findes som vist på figur 2.17

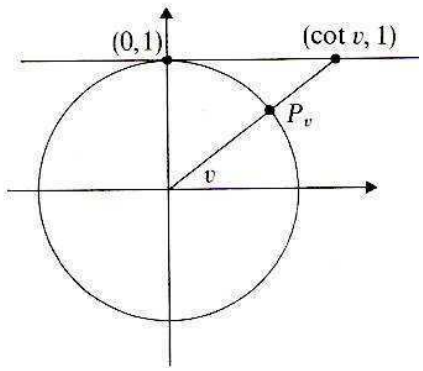


Fig 2.17

d) Find cot(x) for hver af følgende værdier at tallet x: –5, 8, 2, $\frac{\pi}{2}$, 2088, 0,0123456

e) Skitsér grafen for cot(x), $x \in]0;\pi[\cup]\pi;2\pi[$ ♥

Trigonometriske grundligninger og uligheder.

Ved en trigonometrisk grundligning forstås en ligning af typen:

$\sin(x) = a$, $\cos(x) = b$, $\tan(x) = c$

eller skrevet uden funktionsparenteser: $\sin x = a$, $\cos x = b$, $\tan x = c$, hvor a, b og c er givne tal.

Da Vm(sin) = $[-1;1]$, har ligningen: sin(x) = a kun (én eller flere) løsninger, hvis $a \in [-1;1]$.
Da Vm(cos) = $[-1;1]$, har ligningen: cos(x) = b kun (én eller flere) løsninger, hvis $b \in [-1;1]$.
Da Vm(tan) = R, har ligningen: tan(x) = c (én eller flere) løsninger for alle $c \in R$.

For alle tre ligninger gælder, at en begrænsning i definitionsmængden (dvs. krav til værdien af x) kan ændre på såvel eksistensen som på antallet af løsninger (ses i det følgende).

Eksempel 2.18.

Lad os se på ligningen: $\cos x = \frac{1}{2}$. Da $\frac{1}{2} \in [-1;1]$ ser vi, at der må findes en løsning til denne ligning, og fra øvelse 2.8 ved vi da også, at $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$, hvorfor tallet $\frac{\pi}{3}$ er en løsning til ligningen.
Da cos er periodisk med perioden 2π, vil der imidlertid være mange andre løsninger (hvis der ikke er sat begrænsninger på x, f.eks. at $x \in [0;2\pi]$).

Vi ser således, at alle tallene: $\frac{\pi}{3} + p \cdot 2\pi$, $p \in Z$ er løsninger til ligningen.
På nedenstående figur 2.18 a) ses disse løsninger afmærket med et kryds.

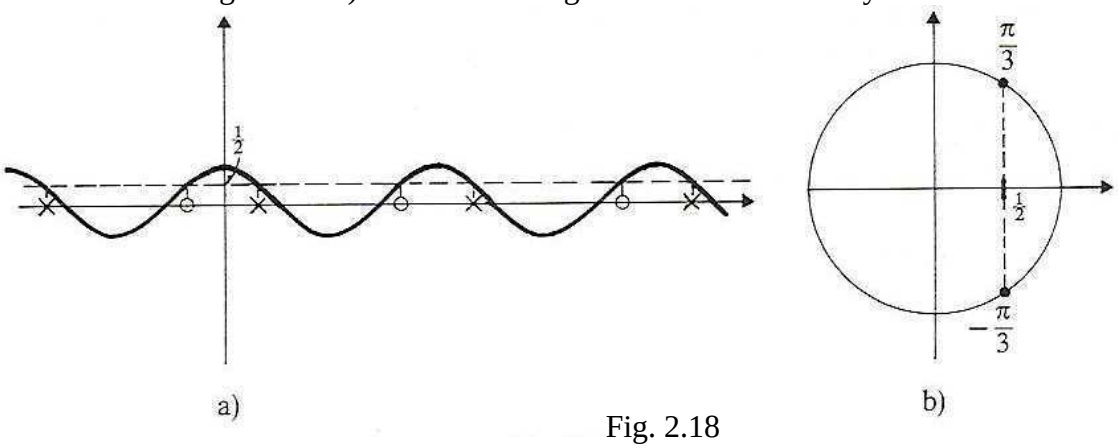


Fig. 2.18

Men vi ser, at linien: $y = \frac{1}{2}$ også skærer grafen for cos i en række af punkter, hvis førstekoordinat x er markeret med en bolle. Disse punkter svarer til – som vist på figur 2.18 b) –, at $x = -\frac{\pi}{3}$ også er en løsning til ligningen, og dermed, at alle tallene $-\frac{\pi}{3} + p \cdot 2\pi$, $p \in Z$ er løsninger til ligningen.
Vi ser altså i alt, at ligningen $\cos x = \frac{1}{2}$ har løsningsmængden:

$$L = \left\{ x \in R \,\middle|\, x = \frac{\pi}{3} + p \cdot 2\pi \ \vee \ x = -\frac{\pi}{3} + p \cdot 2\pi \ ; \ p \in Z \right\}$$

Bemærk, at det naturligvis er nemmest at finde løsningerne v.hj.a. enhedscirklen som antydet på figur 2.18 b), når man samtidig husker på, at cos er periodisk med perioden 2π.

Hvis der er en begrænsning på x, så der f.eks. forudsættes, at $x \in [0;2\pi]$, så får vi (overvej !) følgende løsningsmængde L til ligningen: $\cos x = \frac{1}{2}$, $x \in [0;2\pi]$: $L = \left\{ \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right\}$ ♥

Øvelse 2.19.
Anvend øvelse 2.8 samt metoden i eksempel 2.18 til at løse følgende ligninger:

a) $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\cos x = 1$ c) $\sin x = \frac{1}{2}$ d) $\sin(x) = 0$

e) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x \in [0; 4\pi]$ f) $\cos(x) = -\frac{1}{2}$, $x \in [-\pi; \pi]$ ♥

Øvelse 2.20.
Den trigonometriske grundligning tan(x) = c løses på principielt samme måde som ligningerne: cos(x) = b og sin(x) = a, idet man med fordel kan anvende "markeringen" af tan ved enhedscirklen som omtalt i relation til figur 2.15. Man skal her blot huske på, at tan er periodisk med perioden π.
Løs v.hj.a. øvelse 2.16 følgende ligninger:

a) $\tan x = 1$ b) $\tan(x) = \sqrt{3}$, $x \in [-2\pi; \pi]$ c) $\tan x = -\sqrt{3}$, $x \in [0; 2\pi]$ ♥

I eksempel 2.18, øvelse 2.19 og øvelse 2.20 så vi på situationer, hvor de trigonometriske grundligninger, der skulle løses, alle havde "pæne" resultater, som kunne findes v.hj.a. øvelse 2.8 og 2.16. Principielt set løses andre trigonometriske grundligninger som f.eks. sin x = 0,4 på fuldstændig samme måde – bortset fra at vi bliver nødt til at bruge en regnemaskine/grafregner for at finde en løsning. Dette giver imidlertid anledning til nogle afgørende kommentarer om omvendte funktioner. Umiddelbart ville man måske sige: $\sin x = 0{,}4 \Leftrightarrow x = \sin^{-1}(0{,}4)$, som så kan findes på regnemaskinen. **Men dette er forkert !!**

Lad os først repetere, hvornår en given funktion f har en omvendt funktion:
Betingelsen er, at f er injektiv, dvs. at der gælder: for ethvert $y \in Vm(f)$ findes netop ét $x \in Dm(f)$, så f(x) = y. Og hvis f er injektiv, findes den omvendte funktion ud fra følgende: $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$
(Vedrørende omvendte funktioner generelt: Se Appendix 3).

Som det fremgår af det ovenstående (jfr. bl.a. figur 2.18 a), figur 2.16 og figur 2.7), er hverken sin, cos eller tan injektive, så vi kan altså fastslå:

Ingen af funktionerne sin, cos og tan har en omvendt funktion !

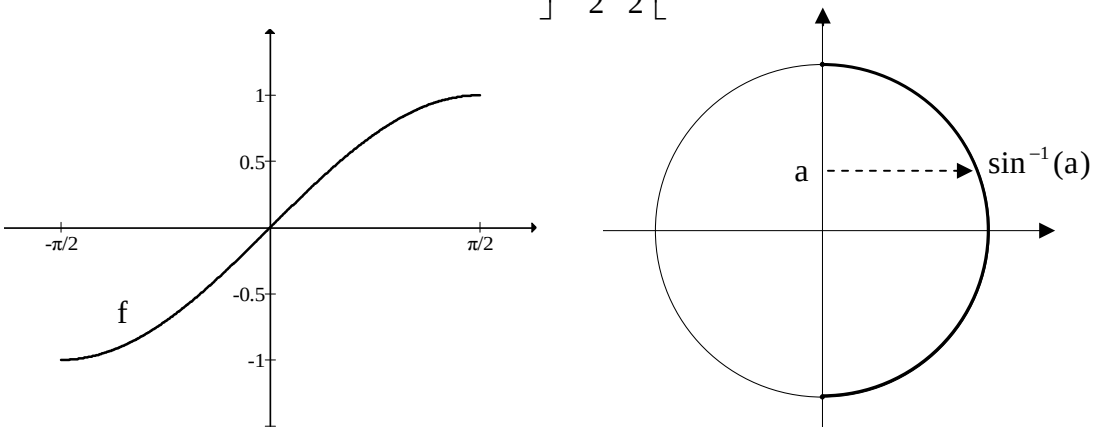
Alligevel kan man på enhver regnemaskine og grafregner til brug i gymnasiet se, at der er taster, hvorpå der står $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$ og $\tan^{-1}$.
Dette ofte forvirrende forhold har sin begrundelse i primært praktiske forhold, som vi straks skal se.

Ingen af funktionerne sin, cos eller tan har som netop omtalt en omvendt funktion. Men hvis vi indskrænker definitionsmængderne og ser på følgende funktioner:

$f(x) = \sin(x)$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, $g(x) = \cos(x)$, $x \in [0; \pi]$, $h(x) = \tan(x)$, $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$

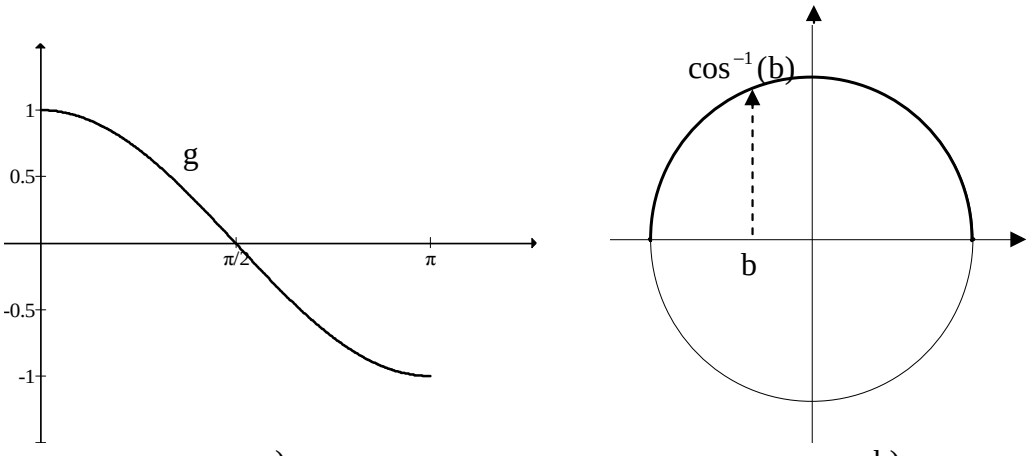
så har både f, g og h en omvendt funktion (jfr. bl.a. de følgende figurer 2.19 a), 2.20 a) og 2.21 a), som viser graferne af f, g og h). Og det er de omvendte funktioner til f, g og h, der "gemmer sig" bag tasterne $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$ og $\tan^{-1}$ på regnemaskinen !

Da $Vm(f^{-1}) = Dm(f)$ ses, at tasten benævnt $\sin^{-1}$ giver værdier i intervallet $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ (jfr. figur 2.19). På samme måde ses, at tasten benævnt $\cos^{-1}$ giver værdier i intervallet $[o;\pi]$, og at tasten benævnt $\tan^{-1}$ giver værdier i intervallet $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ (jfr. figur 2.20 og 2.21).



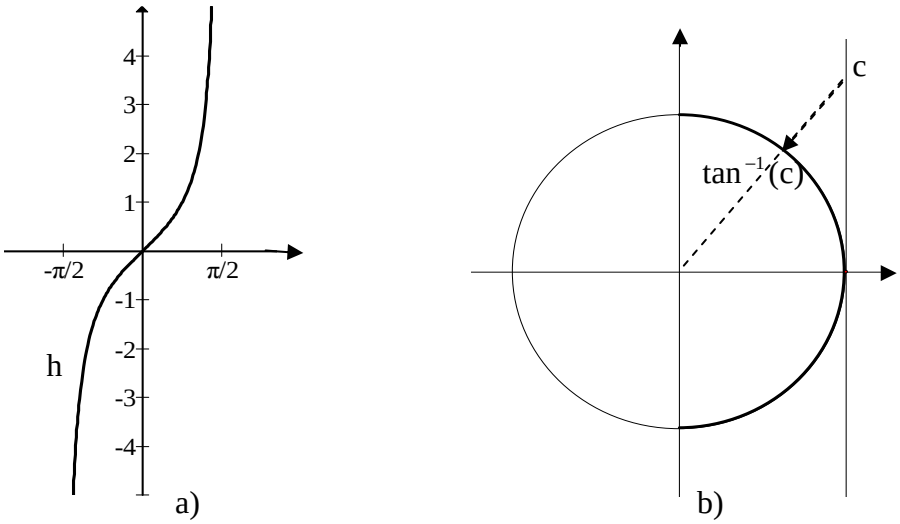
a) b)

Fig. 2.19



a) b)

Fig. 2.20



a) b)

Fig. 2.21

Eksempel 2.21.

Vi vil i dette eksempel løse ligningen: $\sin x = 0{,}4$.

Ved indtegning på en enhedscirkel (se figur 2.22) ser vi, at der i intervallet $[0;2\pi]$ er to løsninger x_1 og x_2.

Når x_1 og x_2 er bestemt, får vi de øvrige løsninger ved at lægge $p \cdot 2\pi$ til (hvor p er et helt tal, dvs. $p \in Z$).

Ved anvendelse af figur 2.19 og den hertil hørende tekst ses, at løsningen x_1 findes v.hj.a. regnemaskinen som:

$$x_1 = \sin^{-1}(0{,}4) = 0{,}412$$

Løsningen x_2 findes ud fra, at $x_2 = \pi - x_1$, hvilket giver:

$x_2 = 2{,}730$ (Kontrollér !).

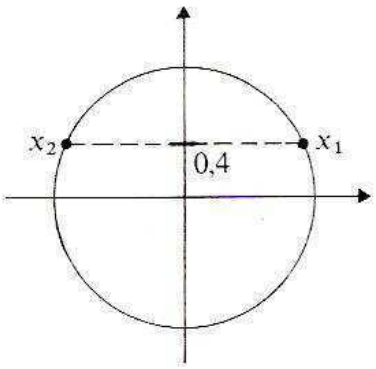


Fig. 2.22

Ligningen $\sin x = 0{,}4$ har således i alt løsningsmængden:

$$L = \{x \in R \mid x = 0{,}412 + p \cdot 2\pi \vee x = 2{,}730 + p \cdot 2\pi \ , \ p \in Z\}$$

Hvis der er en begrænsning på x, som f.eks. i følgende ligning: $\sin x = 0{,}4$, $x \in [0;2\pi]$, så får vi løsningsmængden: $L = \{0{,}412; 2{,}730\}$

Afslutningsvist skal det bemærkes, at man undertiden ser en opskrivning/beregning som følgende:

$$\sin x = 0{,}4 \iff x = \sin^{-1}(0{,}4) \iff x = 0{,}412$$

hvor regnemaskine-tasten $\sin^{-1}$ anvendes til at finde værdien af x.

Dette er – som tidligere nævnt – generelt set **forkert.** Problemet er, at der i almindelighed **ikke** gælder ensbetydende imellem den første og den anden ligning, idet dette **kun** korrekt, hvis x er begrænset til intervallet $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. Hvis x kan antage værdier ud over dette interval, skal der altså følges andre veje til løsning af ligningen (som vist ovenfor !).

Hvis man derfor i sine beregninger kommer til en trigonometrisk grundligning, så skal man tænke: "STOP, skriv ikke mere her! Undersøg hvilke begrænsninger der er på den variable, og bestem herefter de relevante løsninger v.hj.a enhedscirkel og regnemaskine". ♥

Øvelse 2.22.

Løs ligningerne:

a) $\cos(x) = 0{,}14$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ b) $\sin(x) = -1{,}13$ c) $\cos(x) = -0{,}62$ ♥

Øvelse 2.23.

Løs ligningerne:

a) $\tan x = 1{,}54$ b) $\tan(x) = -0{,}8$ c) $\tan(x) = 23{,}47$, $x \in [-\pi;\pi]$ ♥

Eksempel 2.24.

Vi vil i dette eksempel løse ligningen: $\cos(0{,}7x - 4) = 0{,}8$, $0 \le x \le 15$

Vi bemærker straks to ting: For det første er der ikke tale om en trigonometrisk grundligning, idet der ikke står cosinus til en variabel, men cosinus til et udtryk indeholdende en variabel (der er altså tale om en sammensat funktion). For det andet er der en "særlig" begrænsning på denne variable. Dette problem kan løses ved at indføre en hjælpevariabel $y = 0{,}7x - 4$, og så først beregne hvilke begrænsninger der er på denne nye variable. Der gælder her følgende:

$$0 \le x \le 15 \;\Leftrightarrow\; 0 \le 0{,}7x \le 0{,}7\cdot 15 \;\Leftrightarrow\; -4 \le 0{,}7x - 4 \le 0{,}7\cdot 15 - 4 \;\Leftrightarrow\; -4 \le y \le 6{,}5$$

Vi skal altså i første omgang løse den trigonometriske grundligning: $\cos(y) = 0{,}8$, $y \in [-4;6{,}5]$
Det overlades som en øvelse til læseren at vise, at denne ligning har løsningerne:

$$y = -0{,}6435 \;\vee\; y = 0{,}6435 \;\vee\; y = 5{,}6397$$

samt i forbindelse hermed at tegne en enhedscirkel, der både viser indtegning af de relevante retningspunkter for ligningen og af begrænsningsintervallet $[-4;6{,}5]$ for værdien af y.
Ved at vende tilbage til den variable x får vi dermed følgende resultater:

$$0{,}7x - 4 = -0{,}6435 \;\vee\; 0{,}7x - 4 = 0{,}6435 \;\vee\; 0{,}7x - 4 = 5{,}6397$$

hvoraf vi får (kontrollér !), at:

$$x = 4{,}7950 \;\vee\; x = 6{,}6336 \;\vee\; x = 13{,}7710$$

Det skal bemærkes, at beregningen af såvel begrænsningen på y som bestemmelse af x ud fra de fundne y-værdier også kan gennemføres ved først at konstatere, at: $y = 0{,}7x - 4 \;\Leftrightarrow\; x = \dfrac{y+4}{0{,}7}$

idet vi da f.eks. har (overvej !), at: $0 \le x \le 15 \;\Leftrightarrow\; 0 \le \dfrac{y+4}{0{,}7} \le 15 \;\Leftrightarrow\; -4 \le y \le 6{,}5.$ ♥

Øvelse 2.25.
Løs ligningen: $\tan(5 - 0{,}6x) = 27{,}4$, $x \in [-10;10]$ ♥

V.hj.a. løsningerne til de trigonometriske grundligninger kan vi nu løse uligheder af typen:

$$\cos x \le a \;,\quad \sin x > a \;,\quad \tan(x) < b$$

og lignende trigonometriske grunduligheder.

Eksempel 2.26.
Lad os prøve at løse uligheden:

$$\sin x > \frac{\sqrt{2}}{2} \quad , \quad x \in [0;2\pi]$$

Det gør vi ved først at løse ligningen:

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad , \quad x \in [0;2\pi]$$

Som vist på figur 2.23 er løsningerne til denne ligning lig med $\dfrac{\pi}{4}$ og $\dfrac{3\pi}{4}$. Og som det fremgår af figuren, er løs-

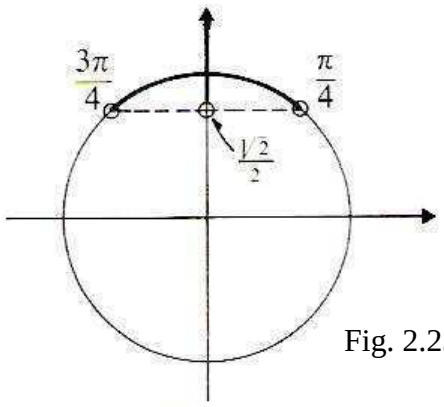


Fig. 2.23

ningsmængden til uligheden dermed givet ved: $\left]\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right[$

Hvis vi ikke har restriktionen $x\in[0;2\pi]$ med, kan løsningsmængden L f.eks. anføres således:

$$L = \left\{x+p\cdot 2\pi \,\middle|\, p\in Z \wedge x\in\left]\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right[\right\} \quad \text{eller}$$

$$L = \left\{x\in R \,\middle|\, \frac{\pi}{4}+p\cdot 2\pi < x < \frac{3\pi}{4}+p\cdot 2\pi,\ p\in Z\right\}$$

(Overvej såvel opskrivning som resultat nærmere !). ♥

Eksempel 2.27.

Vi vil løse uligheden: $0 \le \tan x \le 2 \quad , \quad x\in[0;2\pi]$

Ligningen $\tan x = 2$, $x\in[0;2\pi]$ har løsningerne: 1,107 og 4,249, og ligningen $\tan x = 0$, $x\in[0;2\pi]$ har løsningerne 0 og π.

Ved hjælp af disse løsninger og figur 2.24 ser vi, at løsningsmængden L til uligheden er:

$$L = [0;1{,}107]\cup[\pi;4{,}249] \qquad ♥$$

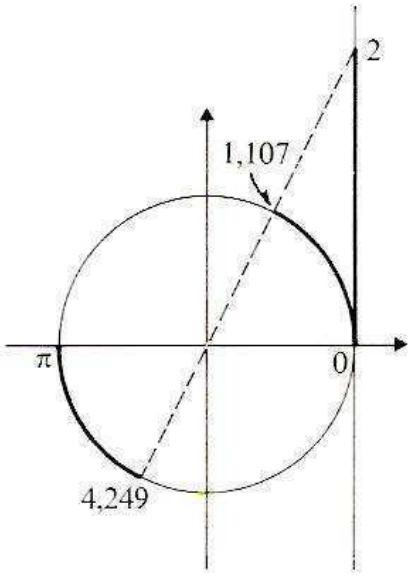


Fig. 2.24

Øvelse 2.28.

Løs følgende uligheder:

a) $\cos x \le \frac{1}{2}$

b) $-\frac{1}{2} < \sin x < 0 \quad , \quad x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

c) $\sin x \le -0{,}3 \quad , \quad x\in[0;2\pi]$

d) $\tan(x) > -0{,}64 \quad , \quad x\in\left]-\pi;\pi\right[$

Øvelse 2.29.

Løs følgende uligheder:

a) $\cos(2x) \ge \frac{1}{2} \quad , \quad x\in[0;2\pi]$

b) $\sin(3x+5) > 0{,}74 \quad , \quad x\in[-2;2{,}5]$

Omskrivningsformler for sinus, cosinus og tangens.

Der findes mange omskrivningsformler for de trigonometriske funktioner, herunder såkaldte overgangsformler, grundformler, additionsformler, formler med dobbelt variabel, logaritmiske formler. I denne sammenhæng anfører vi først følgende oversigtssætning for sinus og cosinus:

Sætning 2.30. (Omskrivningsformler for sinus og cosinus)

Overgangsformler:

1) $\sin(-x) = -\sin x$ 2) $\cos(-x) = \cos x$

3) $\sin(\pi - x) = \sin x$ 4) $\cos(\pi - x) = -\cos x$

5) $\sin(\pi + x) = -\sin x$ 6) $\cos(\pi + x) = -\cos x$

7) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$ 8) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

Grundformel:

9) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

Additionsformler:

10) $\cos(u - v) = \cos u \cdot \cos v + \sin u \cdot \sin v$ 11) $\cos(u + v) = \cos u \cdot \cos v - \sin u \cdot \sin v$

12) $\sin(u - v) = \sin u \cdot \cos v - \cos u \cdot \sin v$ 13) $\sin(u + v) = \sin u \cdot \cos v + \cos u \cdot \sin v$

Formler med dobbelt variabel:

14) $\cos(2u) = \cos^2 u - \sin^2 u = 2\cos^2 u - 1 = 1 - 2\sin^2 u$

15) $\sin(2u) = 2\sin u \cdot \cos u$

Logaritmiske formler:

16) $\sin x + \sin y = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$ 17) $\sin x - \sin y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$

18) $\cos x + \cos y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$ 19) $\cos x - \cos y = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$

Det skal bemærkes, at formlerne 9-19 også gælder, når vinklerne regnes i grader !!

Bevis:

Overgangsformlerne 1)–6):

Da retningspunkterne for x og –x ligger symmetrisk omkring 1.aksen (se figur 2.25 a)), ser vi, at

$\sin(-x) = -\sin x$ og $\cos(-x) = \cos x$

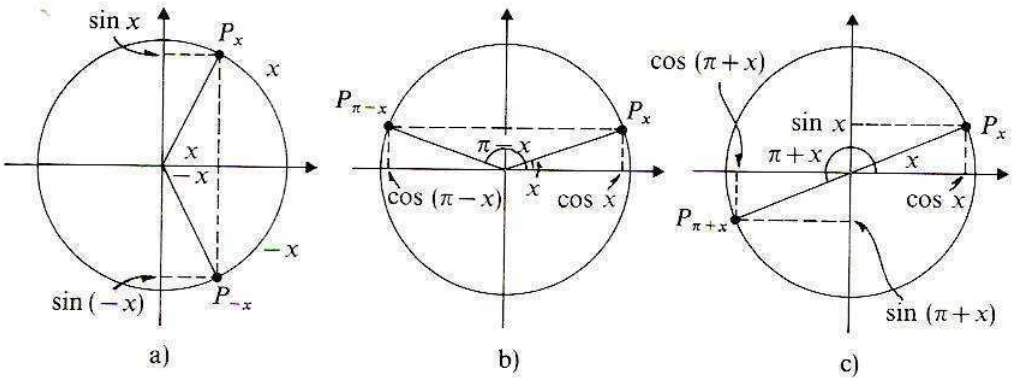


Fig. 2.25

Da retningspunkterne for x og π–x ligger symmetrisk omkring 2.aksen (se figur 2.25 b)), ser vi, at

$$\sin(\pi - x) = \sin x \qquad \text{og} \qquad \cos(\pi - x) = -\cos x$$

Da retningspunkterne for x og π+x ligger symmetrisk omkring (0,0) (se figur 2.25 c)), ser vi, at

$$\sin(\pi + x) = -\sin x \qquad \text{og} \qquad \cos(\pi + x) = -\cos x$$

Overgangsformlerne 7) og 8):

Lad P være retningspunktet for x, og lad P′ være spejlbilledet af P ved en spejling i linien y = x. Som det fremgår af figur 2.26, er P′ retningspunkt for $\frac{\pi}{2} - x$. (Overvej, at dette også er tilfældet med punkterne P_1 og P_1' på figuren).

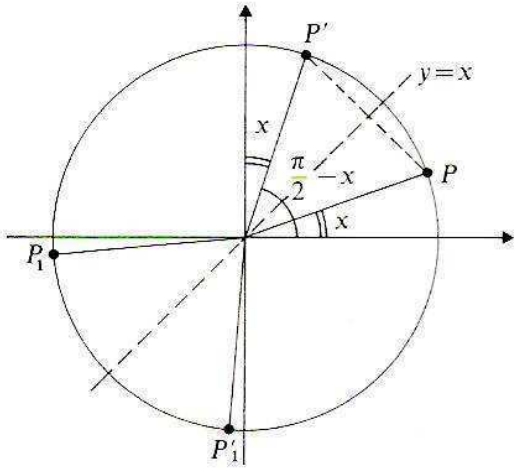


Fig. 2.26

Koordinaterne til P og P′ er således givet ved:

$$P = (\cos x, \sin x) \qquad \text{og} \qquad P' = (\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right))$$

Som bekendt (ellers se Appendix 4) bytter en spejling i linien y = x om på 1. og 2. koordinaterne til det punkt der spejles. Vi har derfor, at

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \qquad \text{og} \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

Da der ifølge omskrivningsformel 2) gælder, at: $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$, har vi hermed alt i alt vist formlerne 7) og 8).

Bemærk, at formlen: $\sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ beskriver, at grafen for sinus er forskudt $\frac{\pi}{2}$ langs 1.aksen i forhold til grafen for cosinus, hvilket stemmer fint overens med figur 2.6. (Jfr. Appendix 2).

Grundformlen 9):

Som bekendt (ellers se Appendix 5) er afstanden mellem to punkter A og B med koordinaterne: $A = (x_1, y_1)$ og $B = (x_2, y_2)$ givet ved formlen: $|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Afstanden mellem retningspunktet P = $(\cos x, \sin x)$ for x og enhedscirklens centrum O = (0,0) er radius i enhedscirklen (overvej, lav en figur), dvs. vi har: 1 = $|OP| = \sqrt{(\cos x - 0)^2 + (\sin x - 0)^2}$, hvoraf vi ser, at: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

Additionsformlerne 10) – 13):
Additionsformlen 10): $\cos(u - v) = \cos u \cdot \cos v + \sin u \cdot \sin v$ bevises ved at løse nedenstående øvelse 2.31. (Læsere, der har lært om vektorer, kan se et alternativt bevis for formlen i Appendix 6). De tre øvrige additionsformler bevises herefter ved passende omskrivninger af formel 10):

Ved at betragte tallet –v i stedet for v, får vi således:
$\cos(u + v) = \cos(u - (-v)) = \cos u \cdot \cos(-v) + \sin u \cdot \sin(-v) = \cos u \cdot \cos v - \sin u \cdot \sin v$
hvor vi har anvendt overgangsformlerne 1) og 2).

Ved at betragte tallet $\frac{\pi}{2} - u$ i stedet for u, får vi herefter:

$$\cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - u\right) + v\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) \cdot \cos v - \sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right) \cdot \sin v = \sin u \cdot \cos v - \cos u \cdot \sin v$$

hvor vi har anvendt overgangsformlerne 7) og 8).
Da vi desuden har, at

$$\cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - u\right) + v\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (u - v)\right) = \sin(u - v)$$

ser vi alt i alt, at: $\sin(u - v) = \sin u \cdot \cos v - \cos u \cdot \sin v$.

Hvis endelig vi heri indsætter –v i stedet for v, så får vi (overvej), at
$\sin(u + v) = \sin u \cdot \cos v + \cos u \cdot \sin v$
hvormed additionsformlerne 10) – 13) er bevist.

Formler med dobbelt variabel 14) og 15):
Formlen: $\cos(2u) = \cos^2 u - \sin^2 u$ fremkommer af additionsformel 11), hvor der anvendes v = u samt den omtalte skrivemåde, at $(\cos u)^2 = \cos^2 u$ og $(\sin u)^2 = \sin^2 u$ (Overvej !)
Formlen: $\cos^2 u - \sin^2 u = 2\cos^2 u - 1 = 1 - 2\sin^2 u$ fremkommer ved at anvende grundformel 9) til at finde hhv. $\sin^2 u$ og $\cos^2 u$. (Detaljerne overlades til læseren !).
Formlen: $\sin(2u) = 2\sin u \cdot \cos u$ fremkommer af additionsformel 13) ved at anvende v = u.

De logaritmiske formler 16) – 19):
Hvis vi sætter $u = \frac{x + y}{2}$ og $v = \frac{x - y}{2}$, hvor x og y er vilkårligt, givne tal, så ser vi, at:

$$u + v = \frac{x + y}{2} + \frac{x - y}{2} = \frac{x + y + x - y}{2} = \frac{2x}{2} = x$$

og

$$u - v = \frac{x + y}{2} - \frac{x - y}{2} = \frac{x + y - (x - y)}{2} = \frac{2y}{2} = y$$

Ved anvendelse af additionsformlerne 12) og 13) får vi hermed:

$$\begin{aligned}\sin x+\sin y &= \sin(u+v)+\sin(u-v)\\ &= \sin u\cdot\cos v+\cos u\cdot\sin v+\sin u\cdot\cos v-\cos u\cdot\sin v\\ &= 2\sin u\cdot\cos v\\ &= 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)\end{aligned}$$

Og tilsvarende kan vi finde udtrykkene for $\sin x-\sin y$, $\cos x+\cos y$ og $\cos x-\cos y$.
Hermed er sætning 2.30 bevist. ♥

Øvelse 2.31.
Formålet med denne øvelse er at bevise additionsformlen 10) i sætning 2.30.

a) Tegn en enhedscirkel og afsæt retningspunkterne P_u og P_v for to (vilkårligt valgte) tal u og v.
b) Afsæt det tilsvarende retningspunkt P_{u-v} for tallet u–v
c) Angiv koordinaterne til punkterne P_u, P_v og P_{u-v}
d) Overvej, at cirkelbuen fra P_u til P_v er lig med cirkelbuen fra P_{u-v} til punktet E = (1,0), og at vi dermed har: $|P_uP_v|^2 = |P_{u-v}E|^2$
e) Angiv v.hj.a. formlen for afstanden imellem to punkter (jfr. Appendix 5) et udtryk for hver af de to afstande $|P_uP_v|$ og $|P_{u-v}E|$
f) Anvend resultaterne i d) og e), samt grundformlen 9) i sætning 2.30, til at udlede den ønskede formel: $\cos(u-v) = \cos u\cdot\cos v+\sin u\cdot\sin v$ ♥

Øvelse 2.32.

a) Gennemfør alle detaljer i beviset for formlerne 14) og 15) i sætning 2.30.
b) Gennemfør alle detaljer i beviset for formlerne 17), 18) og 19) i sætning 2.30. ♥

Øvelse 2.33.
Vis v.hj.a. overgangsformlerne 5) og 6) i sætning 2.30, at funktionen tangens er periodisk med perioden π, dvs. at: $\tan(x+\pi) = \tan x$ ♥

Øvelse 2.34.

a) Vis v.hj.a. omskrivningen: $\cos(3x) = \cos(2x+x)$, at: $\cos(3x) = 4\cos^3 x-3\cos x$
b) Vis tilsvarende, at: $\sin(3x) = 3\sin x-4\sin^3 x$ ♥

Øvelse 2.35.

Vis, at: $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos x$ og $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$ ♥

Sætning 2.36. (Omskrivningsformler for tangens)

Overgangsformler:

1) $\tan(-x) = -\tan x$ 2) $\tan(\pi - x) = -\tan x$ 3) $\tan(\pi + x) = \tan x$

Additionsformler:

4) $\tan(u - v) = \dfrac{\tan u - \tan v}{1 + \tan u \cdot \tan v}$ 5) $\tan(u + v) = \dfrac{\tan u + \tan v}{1 - \tan u \cdot \tan v}$

Formel med dobbelt variabel:

6) $\tan(2u) = \dfrac{2\tan u}{1 - \tan^2 u}$

Kombinationsformler med tangens og cosinus:

7) $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

Det skal bemærkes, at formlerne 4-7 også gælder, når vinklerne regnes i grader !

Bevis for sætningen:
Vi viser formel 1) og 4). Vedr. de øvrige formler: Se øvelse 2.37.

1): $\tan(-x) = \dfrac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \dfrac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$

hvor vi har anvendt definitionen på tan samt formel 1) og 2) i sætning 2.30.

4): $\tan(u - v) = \dfrac{\sin(u - v)}{\cos(u - v)} = \dfrac{\sin u \cdot \cos v - \cos u \cdot \sin v}{\cos u \cdot \cos v + \sin u \cdot \sin v}$

hvor vi har anvendt definitionen på tan samt formel 10) og 12) i sætning 2.30.
Hvis vi forkorter dette udtryk med $\cos u \cdot \cos v$, får vi:

$$\tan(u - v) = \frac{\dfrac{\sin u \cdot \cos v}{\cos u \cdot \cos v} - \dfrac{\cos u \cdot \sin v}{\cos u \cdot \cos v}}{1 + \dfrac{\sin u \cdot \sin v}{\cos u \cdot \cos v}} = \frac{\tan u - \tan v}{1 + \tan u \cdot \tan v}$$

Hermed er de omtalte formler bevist. ♥

Øvelse 2.37.

a) Bevis formlerne 2), 3) og 5) i sætning 2.36 efter samme princip som i ovenstående bevis.
b) Bevis formel 6) i sætning 2.36 ved anvendelse af formel 5) i sætningen.
c) Bevis formel 7) i sætning 2.36 ved anvendelse af grundformlen 9) i sætning 2.30. ♥

Øvelse 2.38.

Bevis, at

$$\cos(2x) = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} \quad \text{og} \quad \sin(2x) = \frac{2\tan x}{1 + \tan^2 x} \qquad ♥$$

Kap. 3: Trigonometriske funktioner og infinitesimalregning.

Infinitesimalregning dækker over begreberne kontinuitet, differentiation og integration. Og når vi ser på trigonometriske funktioner i relation til disse begreber, er den variable reelle tal.
Det betyder bl.a. også, at i problemstillinger, hvortil der skal anvendes differentiation eller integration af de trigonometriske funktioner, angives vinkler i radianer !! (Så kan man altid, hvis det er relevant og ønskes, omregne det endelige resultat til grader, jfr. f.eks. eksempel 4. 13).

Kontinuitet og differentiabilitet.

Der gælder følgende sætning:

Sætning 3.1.

Funktionerne sin, cos og tan er kontinuerte.

Bevis:
Vi minder om, at en given funktion f er kontinuert i et punkt x_o, hvis f er defineret i en omegn (et symmetrisk interval) omkring x_o og hvis der gælder, at: $f(x) \to f(x_o)$ for $x \to x_o$.
Hvis vi betragter et vilkårligt valgt tal x_o, så ser vi, at efterhånden som x nærmer sig til x_o, så vil retningspunktet P_x for x nærme sig til retningspunktet P_{x_o} for x_o (se figur 3.1).

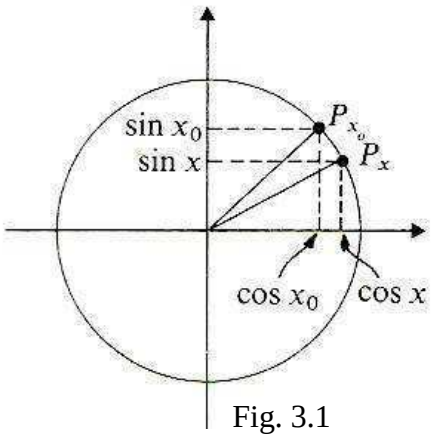


Fig. 3.1

Og dermed vil sin(x) nærme sig til $\sin(x_o)$ og cos(x) vil tilsvarende nærme sig til $\cos(x_o)$. Der gælder altså:

$$\sin(x) \to \sin(x_o) \quad \text{for} \quad x \to x_o$$

og

$$\cos(x) \to \cos(x_o) \quad \text{for} \quad x \to x_o$$

hvormed vi ser, at både sinus og cosinus er kontinuerte i x_o.
(Bemærk, at da både sinus og cosinus er defineret overalt, er der ingen problemer med definitionsmængden).

Kontinuiteten af tangens følger af, at der generelt gælder, at en brøk imellem to kontinuerte funktioner er kontinuert, og af at vi ved, at $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$. Hermed er sætningen bevist. ♥

Øvelse 3.2.
Indtegn grafen for funktionen $\sin x$, $x \in]-1:7[$ i et fininddelt koordinatsystem. (Brug f.eks. et helt ark mm-papir, hvor 1 enhed sættes lig med 2 cm, eller brug et graftegningsprogram, der kan vise et fininddelt "gitter").
Tegn tangenterne og find deres hældningskoefficient svarende til følgende x-værdier:

$$-\tfrac{1}{2}\ ,\ 0,\ \tfrac{1}{2}\ ,\ 1\ ,\ \tfrac{\pi}{2}\ ,\ 2\ ,\ \tfrac{5}{2}\ ,\ \pi\ ,\ 4\ ,\ \tfrac{3\pi}{2}\ ,\ \tfrac{11}{2}\ ,\ 6$$

Tegn ved hjælp af de fundne værdier en kurve (i et nyt koordinatsystem), der angiver hældningskoefficienten for tangenten som funktion af x-værdien.
Indtegn desuden grafen for funktionen cosinus i det sidstnævnte koordinatsystem.
Kommentér resultatet ! ♥

Inspireret af øvelse 3.2 vil vi nu opstille og bevise følgende sætning:

Sætning 3.3.

Funktionerne sin og cos er differentiable overalt, og der gælder:

$$\sin'(x_o) = \cos x_o \quad \text{og} \quad \cos'(x_o) = -\sin x_o$$

Bevis:

En funktion f siges at være differentiabel i et punkt x_o, hvis differenskvotienten $\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$ er defineret i en omegn (et symmetrisk interval) omkring x_o og hvis den har en grænseværdi for x gående mod x_o. Og i givet fald er grænseværdien lig med differentialkvotienten $f'(x_o)$.

Da sinus er defineret overalt, skal vi altså vise, at hvis $x_o \in R$ er et vilkårligt valgt tal, så har differenskvotienten $\frac{\sin(x)-\sin(x_o)}{x-x_o}$ en grænseværdi for x gående mod x_o. Og for at bestemme differentialkvotienten af sin i tallet x_o, så skal vi bestemme størrelsen af denne grænseværdi.

Ifølge sætning 2.30 17) har vi: $\sin x - \sin x_o = 2\cos\left(\frac{x+x_o}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{x-x_o}{2}\right)$

hvoraf vi ser (overvej omskrivningen !), at:

$$\frac{\sin(x)-\sin(x_o)}{x-x_o} = \frac{2\cos\left(\frac{x+x_o}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{x-x_o}{2}\right)}{x-x_o} = \cos\left(\frac{x+x_o}{2}\right)\cdot\frac{\sin\left(\frac{x-x_o}{2}\right)}{\frac{x-x_o}{2}}$$

Da cos er kontinuert har vi: $\cos\left(\frac{x+x_o}{2}\right) \to \cos(x_o)$ for $x \to x_o$

idet $\frac{x+x_o}{2} \to x_o$ for $x \to x_o$

Problemet er derfor at finde grænseværdien af størrelsen: $\frac{\sin\left(\frac{x-x_o}{2}\right)}{\frac{x-x_o}{2}}$

Hvis vi kan vise, at: $\frac{\sin y}{y} \to 1$ for $y \to 0$

så har vi også, at: $\frac{\sin\left(\frac{x-x_o}{2}\right)}{\frac{x-x_o}{2}} \to 1$ for $x \to x_o$

idet der gælder, at $y = \frac{x-x_o}{2} \to 0$ for $x \to x_o$

I alt vil vi dermed få, at:

$$\frac{\sin(x)-\sin(x_o)}{x-x_o} \to \cos(x_o) \quad \text{for} \quad x \to x_o$$

hvormed vi vil have bevist, at sin er differentiabel, og at $\sin'(x_o) = \cos x_o$

Vi skal altså bevise, at: $\frac{\sin y}{y} \to 1$ for $y \to 0$.

Bevis:
Vi bemærker først, at hvis vi har et fast liniestykke af længden k, som er korde i en cirkel med radius r (se figur 3.2 a)), så vil længden b(r) af det buestykke, som korden afskærer på cirklen, nærme sig til k, når r bliver uendelig stor (se figur 3.2 a), b) og c)).

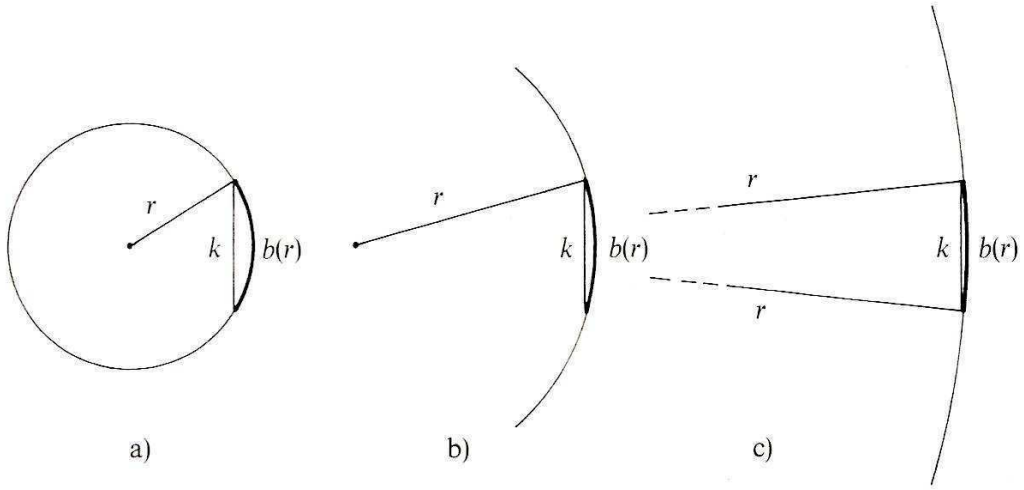


Fig. 3.2

Vi kan skrive dette på følgende måde: $b(r) \to k$ for $r \to \infty$
Og heraf ser vi, at

$$\frac{k}{b(r)} \to 1 \quad \text{for} \quad r \to \infty$$

Lad nu AB være et givet liniestykke af længden k. Vi placerer en cirkel med radius r (hvor 2r > k) således, at AB bliver korde i cirklen (se figur 3.3).

Hvis vi kalder ∠AOC for y, hvor C er midtpunktet af AB og O er cirklens centrum, så har vi – idet ΔAOC er retvinklet –, at

$$\sin y = \frac{|AC|}{r} = \frac{\frac{k}{2}}{r} \quad \text{og dermed, at}$$

$$\frac{k}{r} = 2\sin y$$

Hvis vi som ovenfor sætter $b(r) = \left|\overset{\frown}{AB}\right|$, hvor $\left|\overset{\frown}{AB}\right|$ betegner længden af buen $\overset{\frown}{AB}$, så får vi ifølge sæt-

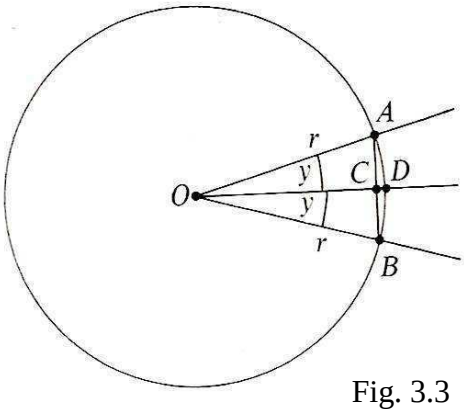


Fig. 3.3

ning 2.3, at $b(r) = 2y \cdot r$, idet $\angle AOB = 2y$. Dette giver os, at: $\frac{b(r)}{r} = 2y$

I alt ser vi derfor, at

$$\frac{\sin y}{y} = \frac{2\sin y}{2y} = \frac{\frac{k}{r}}{\frac{b(r)}{r}} = \frac{k}{b(r)}$$

Da der som omtalt ovenfor gælder, at: $\frac{k}{b(r)} \to 1$ for $r \to \infty$, og da der desuden gælder, at $r \to \infty$ for $y \to 0$, får vi, at

$$\frac{\sin y}{y} = \frac{k}{b(r)} \to 1 \quad \text{for} \quad y \to 0$$

hvormed det ønskede er bevist.
Hermed er beviset for differentiation af sinus fuldført.

At cos er differentiabel, og at $\cos'(x_o) = -\sin x_o$ ses på tilsvarende måde v.hj.a. omskrivningen:

$$\frac{\cos(x) - \cos(x_o)}{x - x_o} = \frac{-2\sin\left(\frac{x + x_o}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x - x_o}{2}\right)}{x - x_o} = -\sin\left(\frac{x + x_o}{2}\right) \cdot \frac{\sin\left(\frac{x - x_o}{2}\right)}{\frac{x - x_o}{2}}$$

Hermed er sætning 3.3 bevist. ♥

Eksempel 3.4.

At $\frac{\sin y}{y}$ går mod 1 for y gående mod 0 kan man få et indtryk af ved at betragte tallene i nedenstående tabel. (Vi har kun medtaget positive y-værdier, idet $\frac{\sin(-y)}{-y} = \frac{-\sin y}{-y} = \frac{\sin y}{y}$):

y	$\frac{\sin y}{y}$
1	0,841471
0,1	0,998334
0,01	0,999983
0,005	0,999995

♥

Eksempel 3.5.

Vi vil bestemme differentialkvotienten $g'(x)$ for funktionen: $g(x) = \cos^2 x \cdot \sin 2x$.
Ud fra reglen om differentiation af et produkt får vi:

$$g'(x) = (\cos^2 x)' \cdot \sin 2x + \cos^2 x \cdot (\sin 2x)'$$

Funktionen $\cos^2 x$ er sammensat af funktionerne x^2 og $\cos x$. Vi får dermed:

$$(\cos^2 x)' = 2\cos x \cdot (\cos x)' = 2\cos x \cdot (-\sin x)$$

Funktionen $\sin 2x$ er sammensat af funktionerne $\sin x$ og $2x$. Dette giver os:

$$(\sin 2x)' = \cos 2x \cdot (2x)' = \cos 2x \cdot 2$$

Ved hjælp af omregningsformlerne for $\sin 2x$ og $\cos 2x$ (sætning 2.30 14) og 15)), ser vi alt i alt, at

$$\begin{aligned} g'(x) &= -2\cos x \cdot \sin x \cdot \sin 2x + \cos^2 x \cdot 2 \cdot \cos 2x \\ &= -2\cos x \cdot \sin x \cdot 2\cos x \cdot \sin x + \cos^2 x \cdot 2 \cdot (1 - 2\sin^2 x) \\ &= -4\cos^2 x \cdot \sin^2 x + \cos^2 x \cdot (2 - 4\sin^2 x) \\ &= \cos^2 x \cdot (-4\sin^2 x + 2 - 4\sin^2 x) \\ &= \cos^2 x \cdot (2 - 8\sin^2 x) \end{aligned}$$

Resultatet er altså: $g'(x) = \cos^2 x \cdot (2 - 8\sin^2 x)$ ♥

Øvelse 3.6.
Find differentialkvotienten af følgende funktioner:

a) $f(x) = \cos(3x + 7)$ b) $f(x) = x^3 \cdot \sin x$ c) $f(x) = \dfrac{2\cos x + \sin x}{\sin x + 3}$ ♥

Vedrørende differentiation af tangens gælder der følgende sætning:

Sætning 3.7.

Funktionen tangens er differentiabel, og der gælder:

$$\tan'(x_o) = 1 + \tan^2 x_o = \frac{1}{\cos^2 x_o} \quad , \quad x_o \neq \frac{\pi}{2} + p \cdot \pi, \quad p \in Z$$

Øvelse 3.8.
Bevis sætning 3.7 v.hj.a. differentiationsreglen for brøker. ♥

Øvelse 3.9.
Find differentialkvotienterne af følgende funktioner:

a) $f(x) = \tan^2 x$ b) $f(x) = \cos(2x) \cdot \tan x$ c) $f(x) = \dfrac{\cos x + \sin x}{\tan x}$ ♥

V.hj.a. de trigonometriske ligninger og uligheder fra kapitel 2, samt v.hj.a. sætning 3.3 og 3.7 kan vi nu bestemme monotoniforhold, værdimængde o.lign. for en del funktoner, som i deres funktionsforskrift indeholder de trigonometriske funktioner.

Eksempel 3.10.

Lad funktionen f være givet ved: $f(x) = \frac{\sin x}{2+\cos x}$, $x \in [0;2\pi]$

Vi vil bestemme monotoniforhold og værdimængde for f.

Vi starter med at konstatere, at da $\cos x \in [-1;1]$, er f defineret for alle $x \in [0;2\pi]$.

Vi finder nu differentialkvotienten af f:

$$f'(x) = \frac{\cos x \cdot (2+\cos x) - \sin x \cdot (-\sin x)}{(2+\cos x)^2}$$

$$= \frac{2\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x}{(2+\cos x)^2}$$

$$= \frac{2\cos x + 1}{(2+\cos x)^2}$$

Heraf får vi:

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2\cos x + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos x = -\tfrac{1}{2}$$

For $x \in [0;2\pi]$ gælder der (kontrollér):

$$\cos x = -\tfrac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{2\pi}{3} \ \vee \ x = \frac{4\pi}{3}$$

Da den afledede funktion f' er kontinuert (idet den består af en brøk af to kontinuerte funktioner), kan den ikke skifte fortegn i et interval uden at antage værdien 0. Da der ikke er nogen nulpunkter for f' i intervallet $\left]0;\frac{2\pi}{3}\right[$, har $f'(x)$ samme fortegn i dette interval. Vi kan derfor bestemme fortegnet ved at udregne $f'(x)$ for et eller andet x i dette interval. Da $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{4} > 0$, ser vi at det søgte fortegn er positivt.

På samme måde indses, at $f'(x)$ er negativ i intervallet $\left]\frac{2\pi}{3};\frac{4\pi}{3}\right[$ og at $f'(x)$ er positiv i intervallet $\left]\frac{4\pi}{3};2\pi\right[$, idet $f'(\pi) = -1 < 0$ og $f'\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{1}{4} > 0$.

Fortegnsvariationen for f' kan derfor indtegnes enten ved en enhedscirkel (som vist på figur 3.4 a) øverst på næste side) eller ved en sædvanlig tallinie (som vist på figur 3.4 b))

Det skal bemærkes, at for funktionen i dette eksempel er det hurtigere at løse uligheden $f'(x) > 0$:

$$f'(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2\cos x + 1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos x > -\tfrac{1}{2}$$

hvorefter fortegnsvariationen for f' fremkommer v.hj.a. en enhedscirkel som vist på figur 3.4 a).

Da f er kontinuert i intervallet $\left[0;\frac{2\pi}{3}\right]$ og differentiabel i $\left]0;\frac{2\pi}{3}\right[$, og da $f'(x) > 0$ for alle $x \in \left]0;\frac{2\pi}{3}\right[$, får vi, at f er voksende i $\left[0;\frac{2\pi}{3}\right]$ – og vi kan derfor ud for dette interval tilføje den viste tendenspil på figur 3.4 b). De øvrige tendenspile opnås på samme måde.

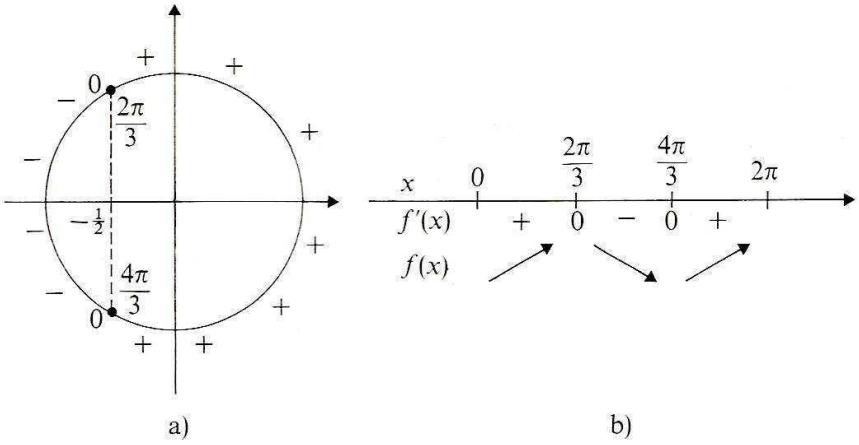


Fig. 3.4

Vi kan derfor konkludere, at f har følgende monotoniforhold:

f er voksende i $\left[\,0;\frac{2\pi}{3}\,\right]$, f er aftagende i $\left[\,\frac{2\pi}{3};\frac{4\pi}{3}\,\right]$ og f er voksende i $\left[\,\frac{4\pi}{3};2\pi\,\right]$

f har altså lokalt minimum i 0 og i $\frac{4\pi}{3}$, og lokalt maksimum i $\frac{2\pi}{3}$ og i 2π.

Vi har (kontrollér v.hj.a. øvelse 2.8), at : $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ og $f\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Da der desuden gælder, at $f(0) = f(2\pi) = 0$, ser vi, at f har (globalt) minimum i $\frac{4\pi}{3}$ og (globalt) maksimum i $\frac{2\pi}{3}$. Og da f er kontinuert i $[\,0;2\pi\,]$ får vi, at $Vm(f) = \left[\,-\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{\sqrt{3}}{3}\,\right]$.

Grafen for f ses på figur 3.5:

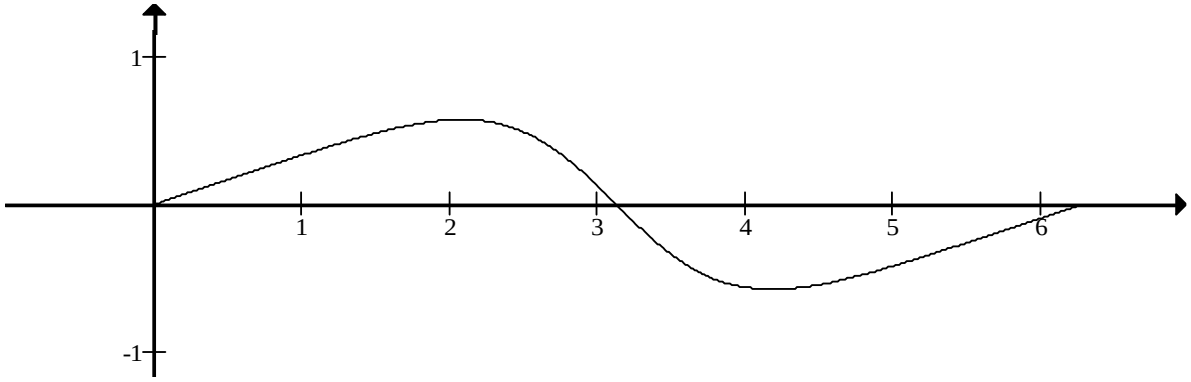


Fig. 3.5 ♥

Øvelse 3.11.

Bestem monotoniforhold, lokale ekstrema og værdimængde for funktionen g fra eksempel 3.5, idet vi forudsætter, at $x \in [\,0;2\pi\,]$. Tegn grafen for g.

Løs samme øvelse, idet det nu forudsættes, at $x \in [\,0;4\pi\,]$. ♥

Integration af trigonometriske funktioner.

Dette afsnit indledes af en kort generel introduktion til integration og regneregler herfor. Læsere, der allerede er bekendt med dette, kan blot springe introduktionen over, medens læsere, som ønsker en mere dybtgående behandling af emnet henvises til bogen "Matematik for Gymnasiet. Integralregning. Teori, anvendelse og modeller".

En funktion F siges at være stamfunktion til en funktion f i et interval I, hvis det for alle $x \in I$ gælder, at $F'(x) = f(x)$ (for et evt. venstre endepunkter $a \in I$ skal der gælde, at $F'_+(a) = f(a)$ og for et evt. højre endepunkt $b \in I$ skal der gælde, at $F'_-(b) = f(b)$).
Hvis F er en stamfunktion til f i et interval I, så skriver vi:

$$F(x) = \int f(x)dx$$

og vi siger, at F fremkommer ved af integrere f.
$\int f(x)dx$, der altså er en funktion (en stamfunktion til f), kaldes et ubestemt integrale.
At en given funktion F er en stamfunktion til f kan kontrolleres ved at undersøge, om $F' = f$.

Ved det bestemte integrale af f fra a til b, hvor $[a; b] \subseteq Dm(f)$, forstår vi tallet $F(b) - F(a)$, og det skrives således:

$$\int_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

Hvis f er en ikke-negativ funktion, er $\int_a^b f(x)dx$ lig med arealet under grafen for f imellem tallene a og b, og hvis f antager både positive og negative værdier, så er $\int_a^b f(x)dx$ lig med arealet under grafen for f, men over 1.aksen, minus arealet under 1. aksen, men over grafen – imellem tallene a og b.

I forbindelse med såvel ubestemte som bestemte integraler gælder der nogle regneregler, bl.a.
$\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$, $\int (f(x) - g(x))\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx$ og
$\int k \cdot f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$, hvor f og g er to funktioner og k er en konstant, og hvor reglerne her er formuleret for ubestemte integraler. Tilsvarende regler gælder for bestemte integraler.

I forbindelse med produkt af funktioner og sammensatte funktioner gælder følgende regneregler:

Delvis (eller Partiel) Integration:

$$\int f(x)g(x)\,dx = F(x)\cdot g(x) - \int F(x)\cdot g'(x)\,dx \quad \text{(ubestemt)}$$

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \left[F(x)g(x)\right]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)\,dx \quad \text{(bestemt)}$$

hvor F er en stamfunktion til f.

Denne metode kaldes delvis eller partiel integration, idet vi ikke får udregnet integralet helt, men får det udtrykt ved et nyt integrale (som så forhåbentlig er lettere at regne ud).

Integration ved substitution:

$$\int f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = F(g(x)), \quad \text{(ubestemt)}$$

$$\int_a^b f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = F(g(b)) - F(g(a)) \quad \text{(bestemt)}$$

hvor F er en stamfunktion til f.

Denne metode kaldes integration ved substitution, idet regnereglerne kan omskrives til:

Integration ved substitution:

$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = \int f(t)\,dt$, hvor t = g(x) og dt = g′(x)dx

$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,dt$, hvor t = g(x) og dt = g′(x)dx – og hvor grænserne ændres.

Vi har således substitueret (indsat, erstattet) t i stedet for g(x), og dermed bliver dt = g′(x)dx (i overensstemmelse med reglerne for differentialer).
I reglen for det bestemte integrale ses desuden, at når x går fra a til b, så går t fra g(a) til g(b).

I forbindelse med trigonometriske funktioner gælder der følgende sætning vedrørende stamfunktioner. I sætningen indgår en vilkårlig konstant c, som kan lægges til enhver af stamfunktionerne, idet denne forsvinder ved differentiation. En stamfunktion til en given funktion er altså ikke helt entydigt fastlagt. Værdien af konstanten kan i en konkret situation fastlægges ud fra kendskab til en funktionsværdi for stamfunktionen (se eksempel 3.13 og øvelse 3.14).

Sætning 3.12.

I de følgende regneregler er a, b og c vilkårlige konstanter (dog kræves at $a \neq 0$):

1) $\int \sin x\,dx = -\cos x + c$

2) $\int \cos x\,dx = \sin x + c$

3) $\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x| + c$

4) $\int \sin(ax+b)\,dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + c$

5) $\int \cos(ax+b)\,dx = \frac{1}{a} \cdot \sin(ax+b) + c$

6) $\int \tan(ax+b)\,dx = -\frac{1}{a}\ln|\cos(ax+b)| + c$

Bevis:
For at bevise sætningen kan vi – som omtalt ovenfor – i hvert tilfælde kontrollere, at når vi differentierer højresiden (dvs. udtrykket for stamfunktionen), så giver det funktionen inde under integraltegnet (dvs. funktionen som integreres). Men dette forklarer ikke hvor udtrykkene for stamfunktionerne kommer fra, så for formlerne 3) – 6) griber vi sagen lidt anderledes an.
Formel 2) følger direkte af, at vi ifølge sætning 3.3 ved, at $(\sin x)' = \cos x$, samt af at konstanten c som omtalt forsvinder ved differentiationen. Formel 1) følger tilsvarende af, at vi ifølge sætning 3.3 ved, at: $(\cos x)' = -\sin x$, hvormed vi ser, at: $(-\cos x)' = -(-\sin x) = \sin x$.
Formlerne 3) – 6) bevises v.hj.a. integration ved substitution. Vi viser her formel 3) og 5), medens formel 4) og 6) overlades til læseren som en øvelse.
Ad 3):

Ifølge definitionen på tangens har vi, at: $\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = \int \frac{1}{\cos x} \cdot \sin x\,dx$

Hvis vi sætter $t = \cos x$ får vi: $dt = (\cos x)'dx = -\sin x\,dx$. Ved først at omskrive det sidste integrale, så der kommer til at stå $-\sin x\,dx$ og derefter anvende formlen for integration ved substitution, får vi:

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = \int \frac{1}{\cos x}\cdot \sin x\,dx = -\int \frac{1}{\cos x}\cdot(-\sin x)\,dx = -\int \frac{1}{t}dt = -\ln|t| + c$$

hvor vi har anvendt, at $\ln|t|$ er en stamfunktion til funktionen $\frac{1}{t}$

Vi skal nu vende tilbage til den oprindelige variable x, som indgår i det første integrale. Dette kan gøres, idet vi ved, at $t = \cos x$. Vi får dermed i alt:

$$\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x| + c$$

Ad 5):

For at udregne $\int \cos(ax+b)\,dx$ benytter vi substitutionen: $t = ax + b$ og $dt = (ax+b)'dx = a\,dx$

Ved først at omskrive integralet (af hensyn til det manglende a under integrationstegnet) og derefter benytte den omtalte substitution får vi:

$$\int \cos(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\int \cos(ax+b)\cdot a\,dx = \frac{1}{a}\int \cos(t)\,dt = \frac{1}{a}\cdot \sin(t) + c$$

Ved at erstatte t med ax + b (for at vende tilbage til den oprindelige variable) får vi det ønskede resultat (formel 5)).

Hermed er sætningen bevist. ♥

Eksempel 3.13.

Som anført ovenfor er funktionen $F(x) = \sin x$ en stamfunktion til funktionen $f(x) = \cos x$ i hele R, idet der for alle x gælder, at $(\sin x)' = \cos x$

Men som ligeledes omtalt er funktionerne: $\sin(x) - 3$, $\sin(x) - \frac{1}{2}$ og $\sin(x) + 1001$ - og generelt $\sin(x) + c$ – også stamfunktioner til $\cos x$, idet det konstante led forsvinder ved differentiationen.

Vi vil nu finde den stamfunktion F til funktionen $f(x) = \cos x$, hvis graf går igennem punktet $(\frac{\pi}{2}, 5)$.

Vi ved, at F er af formen: $F(x) = \sin x + c$, så vi skal bestemme værdien af konstanten c. Dette kan foregå på følgende måde:

Da grafen for F går igennem punktet $(\frac{\pi}{2}, 5)$ gælder der: $5 = F(\frac{\pi}{2}) = \sin(\frac{\pi}{2}) + c = 1 + c$,

hvoraf vi ser, at c = 4. Den søgte stamfunktion er altså: $F(x) = \sin x + 4$ ♥

Øvelse 3.14.

Bestem til hver af de følgende funktioner en stamfunktion, hvis graf går igennem punktet: (2,13)

a) $f(x) = \sin x$ b) $f(x) = \tan x$ c) $f(x) = \cos(3x - 4)$ ♥

Øvelse 3.15.

Udregn følgende ubestemte integraler:

a) $\int \cos(2x)\,dx$ b) $\int (1 + \tan^2 x)\,dx$ c) $\int (2\cdot \sin(3x))\,dx$ d) $\int (2 + \sin(3x))\,dx$ ♥

Øvelse 3.16.
Bevis, at der gælder følgende formler:

a) $\int \sin^2(x)\,dx$	$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x) + c$
b) $\int \cos^2(x)\,dx$	$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x) + c$
c) $\int \tan^2(x)\,dx$	$= \tan x - x + c$

Vejledning: Til formel a) kan benyttes, at: $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$, til formel b) kan benyttes, at: $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$, og til formel c) kan benyttes, at: $\tan^2(x) = 1 + \tan^2(x) - 1$ ♥

Eksempel 3.17.
Vi vil bestemme arealet A under grafen for funktionen $f(x) = 2{,}5\sin(4x)$ i intervallet fra 0 til $\frac{\pi}{4}$ (jfr. figur 2.13). Vi har:

$$A = \int_0^{\pi/4} 2{,}5\sin(4x)\,dx = 2{,}5 \cdot \int_0^{\pi/4} \sin(4x)\,dx = 2{,}5 \cdot \left[-\tfrac{1}{4}\cos(4x) + c\right]_0^{\pi/4}$$
$$= 2{,}5 \cdot \left(-\tfrac{1}{4}\cos(4 \cdot \tfrac{\pi}{4}) + c - \left(-\tfrac{1}{4}\cos(4 \cdot 0) + c\right)\right) = 2{,}5 \cdot \left(-\tfrac{1}{4} \cdot (-1) + \tfrac{1}{4} \cdot 1\right) = 1{,}25$$

Det søgte areal er altså 1,25. Bemærk, at værdien af konstanten c er uden betydning, idet c forsvinder i beregningen. Dette gælder i udregningen af ethvert bestemt integrale. ♥

Eksempel 3.18.
Integralet $\int_1^2 x \cdot \cos x\,dx$ kan beregnes ved delvis integration på følgende måde:

$$\int_1^2 x \cdot \cos x\,dx = \left[x \cdot \sin x\right]_1^2 - \int_1^2 \sin x \cdot 1\,dx = 2 \cdot \sin 2 - 1 \cdot \sin 1 - \left[-\cos x\right]_1^2$$
$$= 2\sin 2 - \sin 1 + \cos 2 - \cos 1 = 0{,}020675$$ ♥

Eksempel 3.19.
Integralet $\int_0^{\pi/4} \sin^5(x) \cdot \cos x\,dx$ kan beregnes ved substitutionen: u = sin(x), du = cos(x)dx.

Vi får da: $\int_0^{\pi/4} \sin^5(x) \cdot \cos x\,dx = \int_{\sin(0)}^{\sin(\pi/4)} u^5\,du = \left[\frac{1}{6}u^6\right]_0^{\sqrt{2}/2} = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^6 = \frac{1}{48}$ ♥

Øvelse 3.20.
Udregn følgende bestemte integrale: $\int_{\pi/3}^{\pi/2} e^{\sin x} \cdot \cos x\,dx$ ♥

Øvelse 3.21.
Udregn følgende fire integraler:
a) $\int 5x \cdot \sin x\,dx$ b) $\int x \cdot \sin(2x^2 + 5)\,dx$ c) $\int_2^5 5x \cdot \sin x\,dx$ d) $\int_2^3 x \cdot \sin(2x^2 + 5)\,dx$ ♥

Kap. 4: Trigonometriske funktioner og modeller.

(Der er her kun medtaget større eksempler. En række mindre eksempler ses under modelopgaver i opgavesamlingen).

Harmoniske svingninger. Bølgebevægelse. – Uden differentialregning.

Eksempel 4.1.

Et lod hænger i en fjeder og svinger op og ned (se figur 4.1)

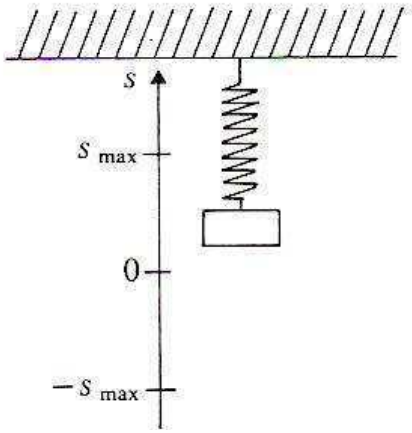


Fig 4.1

Hvis vi anbringer en tallinie (en s-akse) med nulpunkt i loddets ligevægtspunkt – dvs. i det punkt, hvor loddet kan hænge stille –, så kan udsvinget s beskrives ved:

$$s(t) = s_{max} \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right)$$

hvor s_{max} er loddets maksimale udsving (dvs. amplituden i svingningen), m er loddets masse (vægt), og k er en konstant, der angiver fjederens stivhed.
I denne formel forudsættes det, at tiden t = 0 er valgt (dvs. stopuret er startet), når loddet passerer ligevægtsstillingen på vej opad. (Denne forudsætning kan nemt fjernes ved at lægge en såkaldt startfase eller begyndelsesfase c til inde i funktionsparentesen for sinus. Jfr. side 26).
Vi kan ikke bevise dette udtryk her. Interesserede læsere henvises til bogen: ”Differentialligninger og matematiske modeller”, hvor emnet er gennemgået og formlen bevist.

Men vi kan finde svingningstiden T, dvs. den tid, der går, fra loddet er i det øverste punkt til det næste gang er i det øverste punkt. Dette kan gøres således: Hvis loddet er i det øverste punkt til tiden t_o , så er det næste gang i det øverste punkt til tiden $t_o + T$, og da sinus er periodisk med perioden 2π, må vi have:

$$\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot (t_o + T) = \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t_o + 2\pi \qquad \text{og dermed:} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad \blacktriangledown$$

Øvelse 4.2.

Formålet med denne øvelse er eksperimentelt at eftervise formlen for svingningstiden fra eksempel 4.1. Der skal bruges en fjeder og et ophæng hertil, nogle lodder, en vægt, et målebånd, et stopur.

a) Konstanten k (fjederens stivhed) bestemmes ved at måle det stykke s, som fjederen strækkes, når et lod hænges i fjederen (uden at svinge). Fjederen trækker da ifølge Hookes lov i loddet med en kraft, der har størrelsen: $F_{fj} = k \cdot s$, medens tyngdekraften trækker den modsatte vej med kraften $F_{ty} = m \cdot g$, hvor g er tyngdeaccelerationen (g = 9,82 N/kg).
Da loddet hænger stille, må de to kræfter på loddet være lige store, dvs. $F_{ty} = F_{fj}$, og dermed: $k \cdot s = m \cdot g$. Heraf kan k bestemmes.
Husk at måle strækningen i meter og massen i kg, hvormed k måles i N/m. Lav 2-3 målinger med forskellige masser og bestem gennemsnitsværdien af de fundne k-værdier. Dette gennemsnit bruges som k i det følgende.

b) Hæng et lod med en kendt masse m på fjederen, træk det en smule ned under ligevægtspunktet, start stopuret når loddet er højest oppe, og mål f.eks. 20 svingninger, hvorefter svingningstiden T kan bestemmes. Sammenlign denne værdi med den teoretiske værdi fundet v.hj.a. formlen i eksempel 4.1 – og kommentér resultatet. ♥

Eksempel 4.3.

Når et legeme udfører en periodisk bevægelse (som f.eks. loddet i fjederen fra eksempel 4.1, eller enden af 3m-vippen i en svømmehal umiddelbart efter et udspring), så vil bevægelsen efterhånden ophøre, idet den dæmpes af forskellige kræfter.
Man kan bevise (se bogen: "Differentialligninger og matematiske modeller"), at udsvinget s(t) til tiden t opfylder følgende ligning:

$$s(t) = e^{-\frac{\tau}{2m} \cdot t} \cdot s_{max} \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

hvor τ er dæmpningsfaktoren, m er legemets masse, s_{max} er det maksimale udsving der ville være, hvis bevægelsen ikke var dæmpet, og ω er en størrelse, der kaldes vinkelhastigheden for bevægelsen.

Hvis bevægelsen ikke var dæmpet, ville vi som i eksempel 4.1 have, at $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, men p.gr.a. dæmpningen bliver $\omega = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{-\frac{\tau^2 - 4km}{m^2}}$. (Bemærk, at de to udtryk bliver ens, hvis $\tau = 0$).

Da τ og m er positive, har vi, at: $e^{-\frac{\tau}{2m} \cdot t} \to 0$ for $t \to \infty$
og da $\sin(\omega \cdot t)$ svinger imellem 1 og –1 får vi i alt, at :

$$s(t) \to 0 \text{ for } t \to \infty$$

i overensstemmelse med det observerede.
På nedenstående figur 4.2 (se næste side) er vist en mulig graf for s(t). På den samme figur er der stiplet indtegnet de to "begrænsningskurver" $O(t) = e^{-\frac{\tau}{2m} \cdot t} \cdot s_{max}$ og $N(t) = -e^{-\frac{\tau}{2m} \cdot t} \cdot s_{max}$ for svingningen, der danner hhv. den øvre og den nedre grænse for svingningen og dermed beskriver dæmpningen.

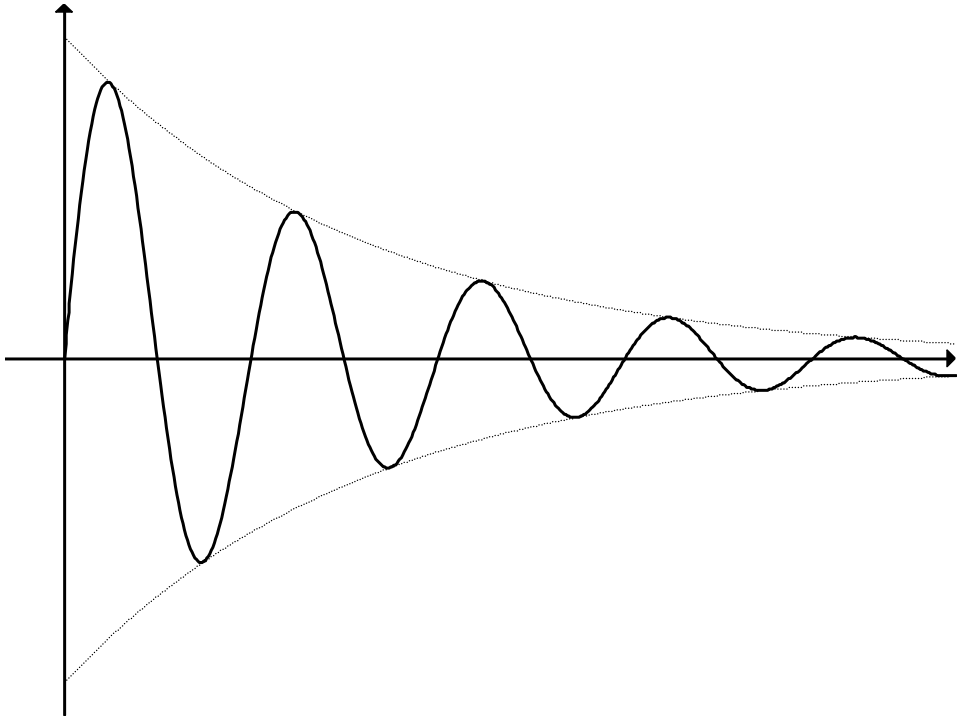


Fig. 4.2

Eksempel 4.4.
Når et øre opfanger lyden af en tone, så påvirkes trommehinden i virkeligheden af nogle ganske små trykvariationer i luften (som sætter trommehinden i svingninger). Disse trykvariationer udbredes fra lydgiveren med den pågældende tones frekvens (dvs. med et bestemt antal svingninger pr. sekund). Hvis man f.eks. hører den såkaldte "kammertone" a, så svarer dette til en frekvens på 440 svingninger pr. sekund. (Man siger kort: 440 Hz, hvor enheden Hz læses "Hertz").

Trykvariationen p(t) ved trommehinden kan for en ren tone med en given frekvens og styrke beskrives ved en harmonisk funktion af typen: $p(t) = p_{max} \cdot \sin(b \cdot t)$, hvor b er en konstant, t er tiden og p_{max} er amplituden (dvs. det maksimale trykudsving på stedet).
Størrelsen b afhænger af frekvensen. Og vi skal nu argumentere for, at $b = 880\pi$, når vi ser på den ovennævnte tone a med frekvensen 440 Hz:
De 440 svingninger pr. sekund svarer til en svingningstid på $\frac{1}{440}$ sekund. Da sinus er periodisk med perioden 2π, og da vi er tilbage i samme situation igen efter en svingning (dvs. efter $\frac{1}{440}$ sekund), må vi i udtrykket $p(t) = p_{max} \cdot \sin(b \cdot t)$ forlange, at: $b \cdot \left(t + \frac{1}{440}\right) = b \cdot t + 2\pi$, hvoraf vi finder, at $b = 440 \cdot 2\pi = 880\pi$. Vi ser således, at: $p(t) = p_{max} \cdot \sin(880\pi \cdot t)$.

Hvis frekvensen er f Hz (i stedet for de 440 Hz), så får vi på samme måde (overvej !), at:

$$p(t) = p_{max} \cdot \sin(2\pi \cdot f \cdot t)$$

Lydintensiteten (lydstyrken), dvs. hvor kraftig tonen er, afhænger af amplituden p_{max}. Lydintensiteten I svarer til den "lydenergi", som pr. sekund passerer en flade på 1 arealenhed anbragt vinkelret på lydens udbredelsesretning. Man kan bevise, at $I = k \cdot p_{max}^{\,2}$, hvor k er en konstant. ♥

Eksempel 4.5.
Lydbølger – og andre former for bølger – har den egenskab, at hvis to (eller flere) forskellige bølgesystemer mødes i et givet punkt, så vil dette punkts udsving (her: trykvariation) være summen af de udsving, som hvert af bølgesystemerne alene ville frembringe i punktet (regnet med fortegn). Dette fænomen kaldes interferens.

Vi vil prøve at undersøge den situation, der opstår, når man skal stemme en guitar, en bas, et klaver eller lign. Hvis to strenge slås an samtidig, og frekvenserne af de pågældende toner ikke er helt ens – men dog næsten ens – så høres én tone, som varierer periodisk i styrke. Dette fænomen kaldes svævninger eller stødtoner. Vi kan forklare det på følgende måde:
Hvis de to toner har frekvenserne f_1 og f_2, og hvis de to strenge slås lige kraftigt an, så vil trykvariationen p(t) ved ørets trommehinde kunne beskrives ved (jfr. eksempel 4.4):

$$p(t) = p_1(t) + p_2(t) = p_{max}\cdot\sin(2\pi\cdot f_1\cdot t) + p_{max}\cdot\sin(2\pi\cdot f_2\cdot t) = p_{max}\cdot(\sin(2\pi\cdot f_1\cdot t) + \sin(2\pi\cdot f_2\cdot t))$$

Ved anvendelse af formlen: $\sin x + \sin y = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$ (Nr.16 i sætning 2.30) får vi:

$$p(t) = 2p_{max}\cdot\cos\left(\frac{2\pi\cdot(f_1-f_2)\cdot t}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{2\pi(f_1+f_2)\cdot t}{2}\right)$$

Hvis vi f.eks. har, at f_1 = 800 Hz og f_2 = 799 Hz, så er:

$$p(t) = 2p_{max}\cdot\cos\left(2\pi\cdot\tfrac{1}{2}\cdot t\right)\cdot\sin\left(2\pi\cdot 799{,}5\cdot t\right) = a(t)\cdot\sin\left(2\pi\cdot 799{,}5\cdot t\right)$$

hvor

$$a(t) = 2p_{max}\cdot\cos\left(2\pi\cdot\tfrac{1}{2}\cdot t\right).$$

Vi ser således, at vi kan betragte den resulterende lydbølge som en lydbølge med frekvensen 799,5 Hz, hvis amplitude – og dermed styrke – varierer med tiden.

På figur 4.3 er grafen for p(t) skitseret (uden koordinatsystem). Bemærk variationen i amplituden.

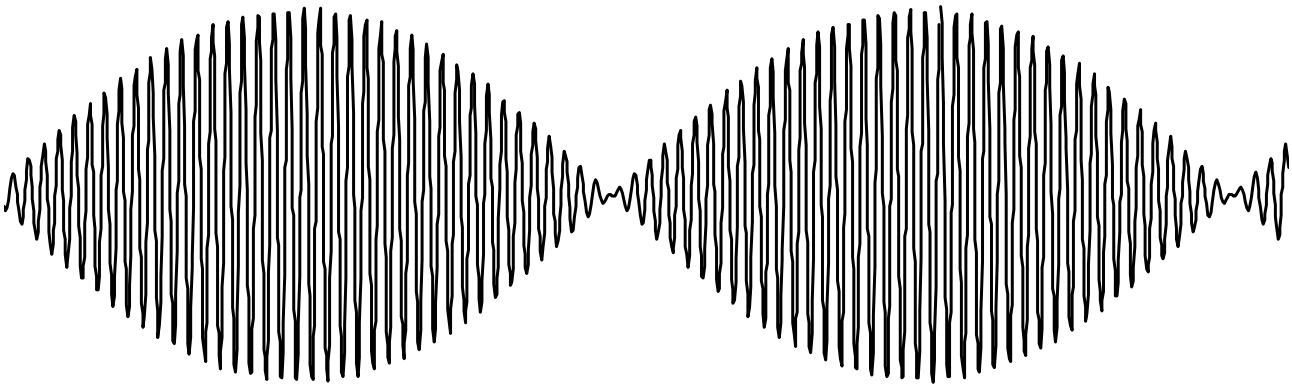


Fig. 4.3

På figur 4.4 (se næste side) er grafen for p(t) også skitseret, men nu i et koordinatsystem, og med grafen for funktionen $a(t) = 2p_{max}\cdot\cos\left(2\pi\cdot\tfrac{1}{2}\cdot t\right)$ (og for –a(t)) indtegnet som "ramme" om grafen for p(t). Af tegnetekniske årsager er der ikke vist så mange svingninger inden i hver "bule".

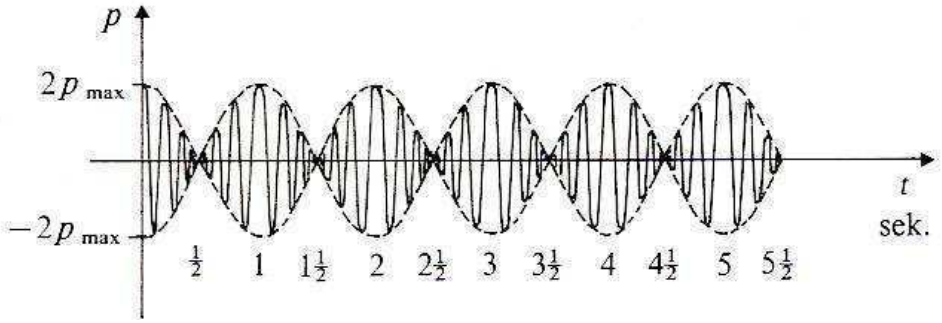


Fig. 4.4

Da lydintensiteten er proportional med kvadratet på amplituden, vil tonen lyde kraftigst, hver gang a(t) enten er maksimal eller minimal (dvs. hver gang a(t) er enten lig med $2p_{max}$ eller $-2p_{max}$).
Idet leddet $\cos\left(2\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot t\right)$ varierer med frekvensen $\frac{1}{2}$ Hz, ser vi, at frekvensen for en kraftig tone er $2 \cdot \frac{1}{2}$ Hz, dvs. lydstyrken svinger med frekvensen 1 Hz. (Jfr. figur 4.4).

I almindelighed ser vi, at hvis $f_1 = f_2 + \Delta f$, hvor forskellen Δf er lille, så har vi:

$$p(t) = 2p_{max} \cdot \cos\left(2\pi \cdot \frac{\Delta f}{2} \cdot t\right) \cdot \sin\left(2\pi \cdot (f_2 + \frac{\Delta f}{2}) \cdot t\right)$$

Idet lydintensiteten svinger med den dobbelte frekvens af amplituden, får vi altså, at:

Stødenes frekvens er lig med Δf, dvs. forskellen mellem de to toners frekvenser.

Når vi derfor er ved at stemme guitaren, så skal vi dreje på stemmeskruen således, at stødenes frekvens bliver mindre og mindre, dvs. der skal gå længere tid imellem hver stødtone.
De pågældende strenge stemmer først sammen, når stødene er helt væk. ♥

Øvelse 4.6.
Lav et forsøg til demonstration af indholdet i eksempel 4.5 – f.eks. med to tonegeneratorer, to højtalere og to frekvenstællere, eller med to ens stemmegafler, hvor der på den ene fastspændes et lille "lod", som nedsætter frekvensen en smule, men som kan forskydes nedad mod et knudepunkt på stemmegaflen, så de to frekvenser kommer tættere og tættere på hinanden. ♥

Eksempel 4.7.
Hvis vinden har blæst fra samme verdenshjørne i et stykke tid med en ikke alt for stor styrke, så kan havbølgerne med god tilnærmelse beskrives ved en harmonisk funktion.
Lad os betragte nogle bølger, som er 0,8 m "høje" (dvs. afstanden fra bund til top er 0,8 m), og hvor afstanden mellem to på hinanden følgende bølgetoppe er 4m. (Denne afstand kaldes bølgelængden).
Hvis vi indlægger en x-akse parallelt med bølgernes udbredelsesretning, så ser bølgen ud som skitseret på figur 4.5 (Se næste side):

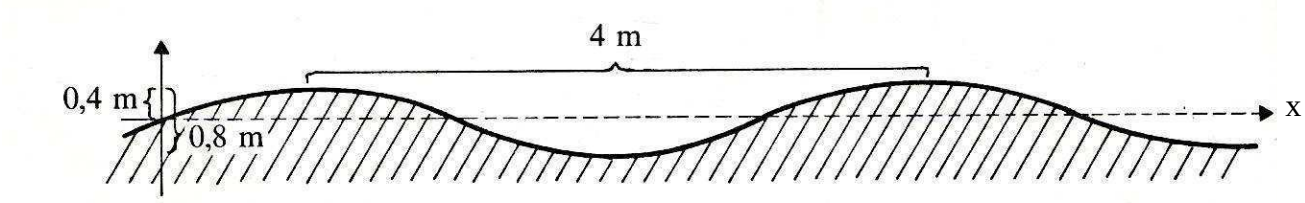


Fig. 4.5

Lad os antage, at bølgerne udbreder sig med hastigheden 0,5 m/s (meter pr. sekund). Dette foregår ved, at hele bølgesystemet "skubbes" som antydet på figur 4.6:

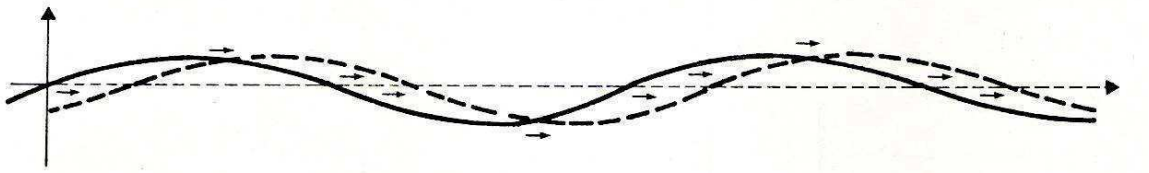


Fig. 4.6

Hvis vi derfor betragter en bøje, som er anbragt i nulpunktet, så vil denne bevæge sig op og ned med en svingningstid på 8 sekunder, idet der er 4 m imellem hver bølgetop, og disse bevæger sig af sted med 0,5 m pr. sekund, så det tager 8 sekunder fra en bølgetop møder bøjen til den næste bølgetop møder bøjen.
Da bølgernes "højde" er 0,8 m, så kan bøjens højde y over "gennemsnitshøjden" (svarende til x-aksen på figuren) beskrives ved: $y(t) = 0{,}4 \cdot \sin(b \cdot t + c)$, hvor b og c er konstanter.
Hvis vi for nemhed skyld sætter t = 0, når bøjen er i ligevægtsstillingen på vej opad, så bliver c = 0.
Værdien af konstanten b kan findes på følgende måde: Da sinus er periodisk med perioden 2π, og da det tager 8 sekunder fra bøjen er i en bølgetop til den igen er i en bølgetop, skal b opfylde, at

$$b \cdot (t + 8) = b \cdot t + 2\pi \qquad \text{og dermed:} \qquad b = \frac{2\pi}{8}$$

Bøjens højde over x-aksen kan dermed beskrives ved: $y(t) = 0{,}4 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{8} \cdot t\right)$.

Hvis vi betragter et andet "fast punkt" på x-aksen – f.eks. hvis vi betragter et markeringsflag for en ruse i punktet x_o – så ser vi, at også dette punkt bevæger sig op og ned med en svingningstid på 8 sekunder. Men da flagets højde ikke nødvendigvis er 0 til tiden 0, kan vi ikke direkte anvende udtrykket $y = 0{,}4 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{8} \cdot t\right)$ til at beskrive flagets højde over x-aksen. Vi kan imidlertid regne ud, at da bølgen bevæger sig med hastigheden 0,5 m/s, så har bølgen været $\frac{x_o}{0{,}5}$ sekunder om at bevæge sig fra bøjen og hen til flaget, dvs. flaget til tidspunktet t vil have samme udsving, som bøjen havde $\frac{x_o}{0{,}5}$ sekunder tidligere. Vi kan derfor beskrive flagets udsving ved: $y = 0{,}4 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{8} \cdot (t - \frac{x_o}{0{,}5})\right)$.
I almindelighed ser vi således, at udsvinget y i et vilkårligt punkt x til tiden t er givet ved:

$$y = 0{,}4 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{8} \cdot (t - \frac{x}{0{,}5})\right)$$

Hvis amplituden i svingningen ikke er 0,4 m, men y_{max} m, hvis svingningstiden ikke er 8 sek., men T sek., og hvis bølgernes udbredelseshastighed ikke er 0,5 m/s, men v m/s, så er udsvinget i et punkt x til tiden t givet ved:

$$y = y_{max} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot (t - \frac{x}{v})\right)$$

Bemærk, at udsvinget altså både er en funktion af tiden t og af stedet x.

Hvis vi ser på et bestemt sted – og dermed en bestemt x –værdi – får vi som omtalt ovenfor en svingning i dette punkt beskrevet ved de ovenfor angivne formler $y(t) = y_{max} \cdot \sin(b \cdot t + c)$.
Hvis vi derimod ser på et bestemt tidspunkt t_o, så får vi, at y som funktion af x ser således ud:

$$y = 0{,}4 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{8} \cdot (t_o - \frac{x}{0{,}5})\right) \qquad \text{eller generelt:} \qquad y = y_{max} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot (t_o - \frac{x}{v})\right)$$

Vi ser dermed, at y som funktion af x til det givne tidspunkt er givet på formen:

$$y(x) = y_{max} \cdot \sin(d \cdot x + q)$$

hvor d og q er konstanter.
Dette svarer altså til, at et "øjebliksbillede" af hele bølgesystemet vil være beskrevet ved den anførte sinus-funktion. Og dette stemmer fint overens med figur 4.5 og 4.6. ♥

Eksempel 4.8.
I eksempel 4.7 undersøgte vi havbølger og gjorde rede for, at hvis bølgens amplitude er A (i eksempel 4.7 blev den kaldt y_{max}), hvis dens svingningstid er T og dens udbredelseshastighed er v, så kan bølgens udsving y fra ligevægtspositionen (svarende til x-aksen) beskrives ved:

$$y = A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot (t - \frac{x}{v})\right)$$

Hvis vi specielt vil undersøge udsvinget i et bestemt punkt (f.eks. x = 0), så får vi: $y = A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$

I praksis forholder det sig imidlertid ofte således, at ikke alle bølger er lige høje. Der kan forekomme nogle særligt høje bølger efterfulgt af nogle mindre. Dette fænomen kan forklares ved begrebet interferens mellem to forskellige bølgesystemer med forskellig svingningstid. (Jfr. tilsvarende for lydbølger omtalt i eksempel 4.5).
Ved interferens sker der det, at når to bølgesystemer mødes i et give punkt, så vil udsvinget af dette punkt være summen af de udsving, som hvert af bølgesystemerne ville frembringe i punktet (regnet med fortegn). Dette sker også, når to forskellige bølgesystemer bevæger sig af sted i samme retning (eller stort set samme retning), hvilket ofte kan være tilfældet ved havet, idet udløbere af et bølgesystem fra et sted ude på havet kan mødes med et bølgesystem etableret på et andet sted på havet.

Hvis vi således betragter to bølgesystemer med forskellig svingningstid T_1 og T_2, så vil vi for det samlede udsving y(t) få:

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T_1} \cdot t\right) + A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T_2} \cdot t\right)$$

hvor vi vil for nemheds skyld har antaget, at de to bølgesystemer har samme amplitude A.

Lad os f.eks. prøve at se på 6 m høje bølger med T_1 = 16 sek. og T_2 = 20 sek. Vi får da:

$$y(t) = 3\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{16}\cdot t\right) + 3\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{20}\cdot t\right)$$

På figur 4.7 ses hvert af de to bølgesystemers udsving i det pågældende punkt. $y_1(t)$ er fuldt optrukket og $y_2(t)$ er stiplet.

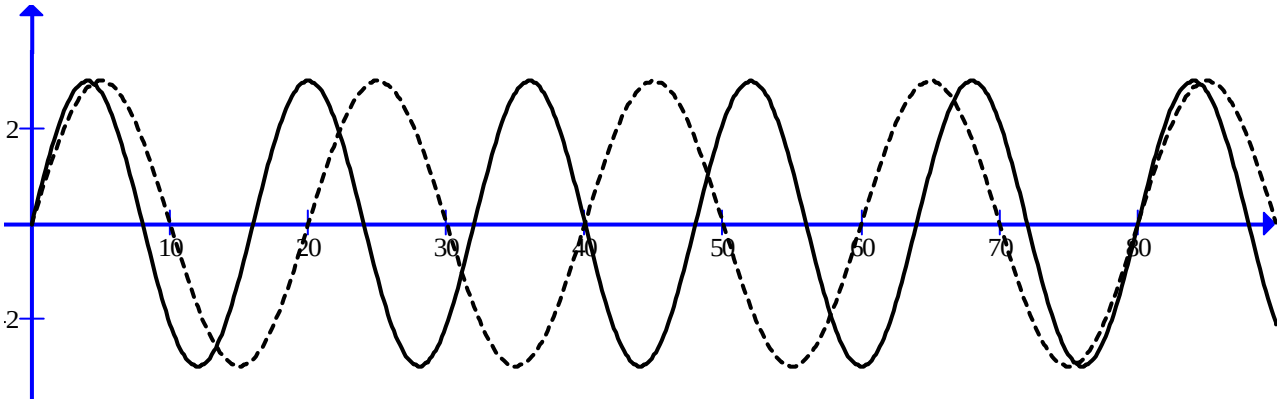


Fig. 4.7

På figur 4.8 ses summen af de to bølgesystemer, dvs. det samlede resultat (udsving) y(t):

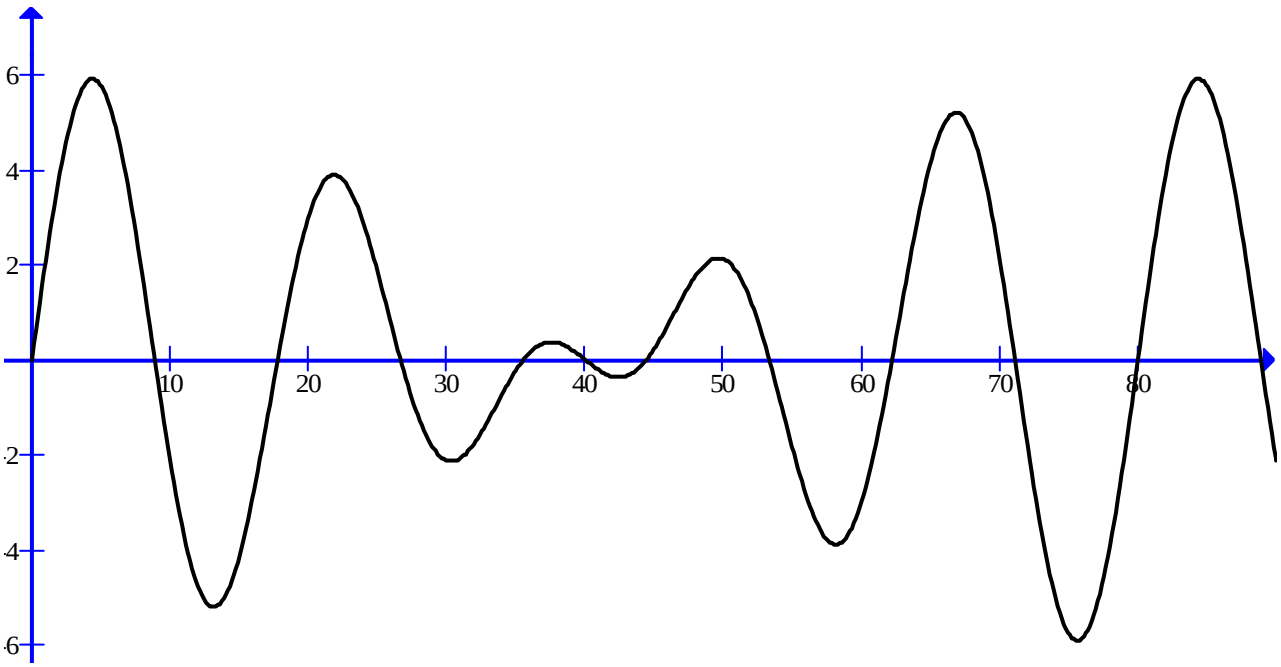


Fig. 4.8

Vi bemærker, at somme tider forstærker bølgerne hinanden, hvorved det givne punkt får et stort udsving, medens bølgerne til andre tider svækker hinanden – helt i overensstemmelse med, hvad man kan observere. ♥

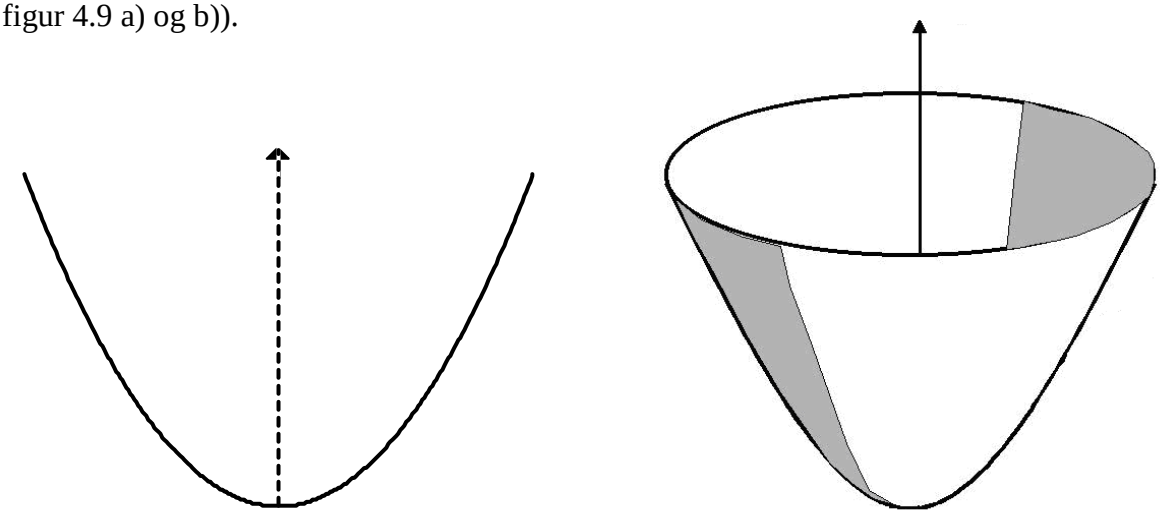
Øvelse 4.9.

Find – efter samme princip som blev anvendt i eksempel 4.5 – et udtryk for summen y(t) af de to interfererende bølger i eksempel 4.8 – og kommentér resultatet, bl.a. v.hj.a. figur 4.8. ♥

Øvelse 4.10.
Lav (v.hj.a. et graftegningsprogram) grafen for summen af de to interfererende bølger fra eksempel 4.8, hvis amplituden ikke er ens, men f.eks. 2 m for $y_1(t)$ og 3 m for $y_2(t)$.
Prøv med andre amplitudestørrelser – og kommentér resultaterne. ♥

Paraboloide som reflektor:

Eksempel 4.11
En paraboloide fremkommer, hvis en (del af en) parabel drejes rumligt 180^o omkring sin symmetriakse (Se figur 4.9 a) og b)).



a) b)

Fig. 4.9

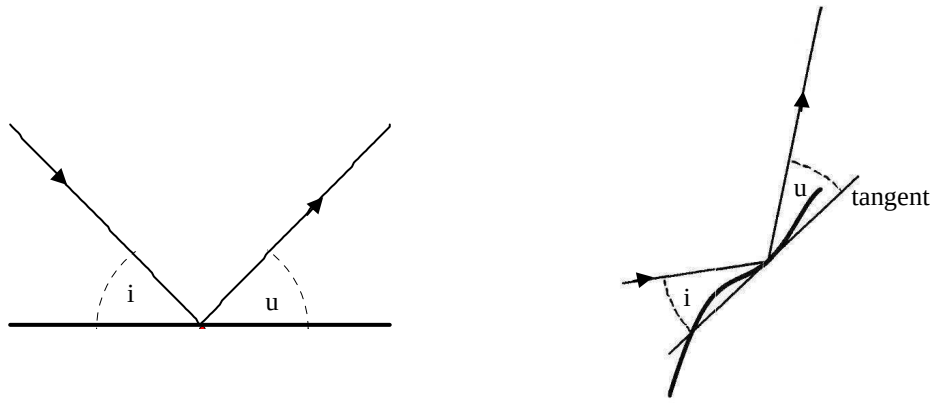
Vi skal i dette eksempel bevise, at en paraboloide har følgende egenskab:
Hvis man konstruerer f.eks. et hulspejl eller en antenne med form som en paraboloide, så vil elektromagnetisk stråling (lys, radiosignaler osv.), som sendes ind parallelt med aksen, efter refleksion (tilbagekastning) i paraboloiden samles i et bestemt punkt på symmetriaksen – det såkaldte brændpunkt.

Dette anvendes f.eks. ved astronomiske observationer, idet stjernerne er så langt væk, at lysstrålerne derfra kan betragtes som parallelle; og ved at samle sådanne lysstråler i brændpunktet – og anbringe en såkaldt sensor dér – fås en kraftigt forstærket observation.

Princippet anvendes også den "modsatte vej", idet man ved at anbringe en glødelampe med glødetråden placeret i brændpunktet af en paraboloideformet reflektor kan få udnyttet al lysenergien fra glødetråden og få den sendt i en bestemt retning – nemlig langs paraboloidens symmetriakse. Dette princip anvendes i lommelygter, billygter, projektører mm.

Inden vi går i gang med at argumentere for det ovennævnte, skal vi først repetere en regel fra fysikken, der siger, at hvis en lysstråle rammer en reflektor (f.eks. et spejl), så vil den blive tilbagekastet i en vinkel, som er lige så stor som den indkommende stråles vinkel med overfladen – dvs. indfaldsvinkel = udfaldsvinkel (se figur 4.10 a) på næste side).

Dette princip gælder også, selvom den reflekterende overflade ikke er plan, men derimod har diverse krumninger. I dette tilfælde bestemmes de omtalte indfalds- og udfaldsvinkler som vinklen mellem strålen og tangenten til overfladen i det punkt, hvor strålen rammer (se figur 4.10 b)).



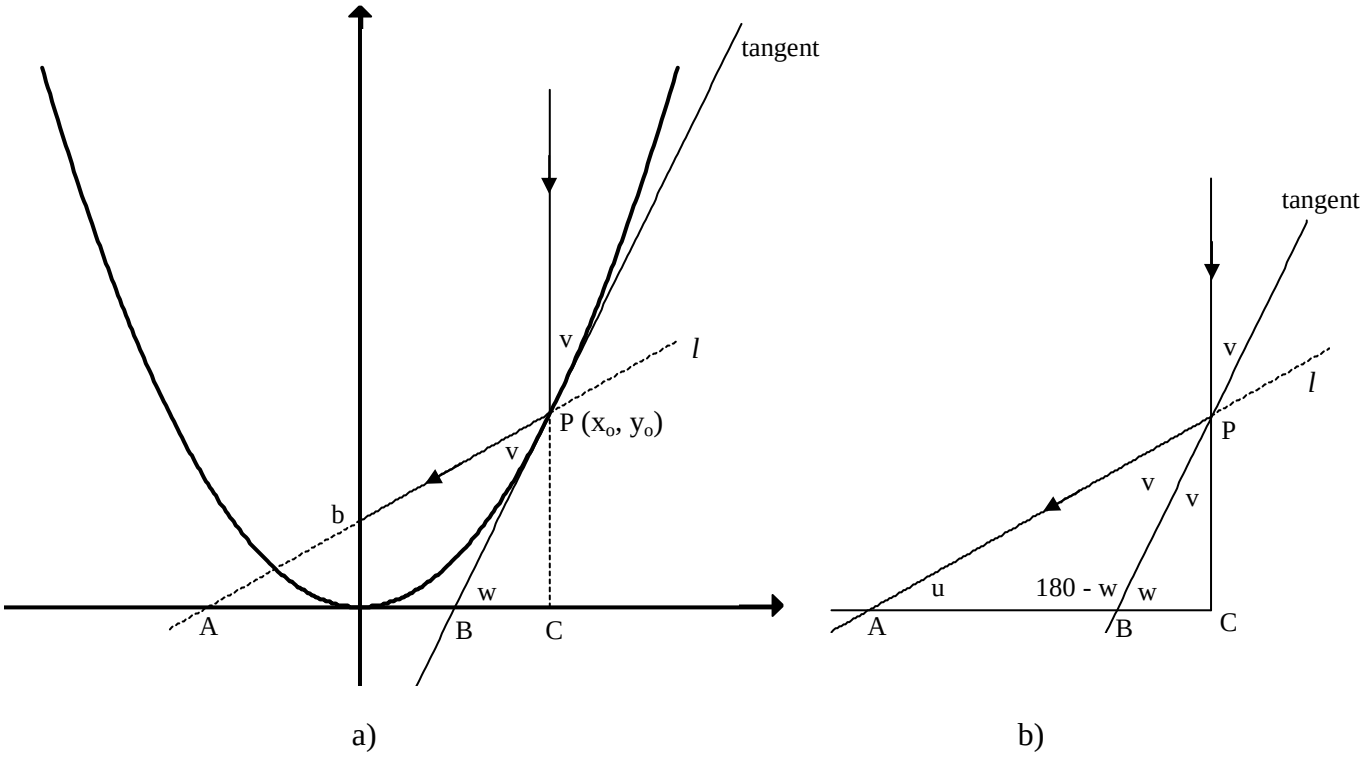
a) b)

Fig. 4.10

Bevis:
Bemærk først, at det i den givne situation er nok at se på parablen – og ikke paraboloiden –, idet den indkommende stråle og den reflekterede stråle af symmetri-årsager vil ligge i samme plan. Og denne plan vælges som grundlag for de følgende beregninger. (Der indlægges et koordinatsystem i planen med nulpunkt i parablens toppunkt og med 2.aksen som symmetriakse).
Betragt parablen med ligningen $y = a \cdot x^2$, hvor a>0. Da 2.aksen er symmetriakse for denne parabel, ser vi på stråler (linier), som kommer lodret ned mod parablen, og skal bevise, at de efter reflektionen i parablen går igennem det samme punkt på 2.aksen.
Dette gøres ved at bevise, at skæringspunktet med 2.aksen for en given reflekteret stråle ikke afhænger af, hvor den rammer parablen før refleksionen, dvs. (se figur 4.11 a) på næste side) at linien *l*, der svarer til den reflekterede stråle, går igennem et punkt på 2.aksen, som ikke afhænger af værdien x_o, hvor strålen kommer ind.

Først findes ligningen for tangenten i punktet (x_o,y_o) til grafen for $y = ax^2$:
Da $y' = 2ax$ og da $y_o = ax_o^2$ får vi følgende ligning for tangenten: $y = 2ax_o \cdot (x - x_o) + ax_o^2$, hvilket omskrives til: $y = 2ax_o \cdot x - ax_o^2$. Hvis vi lader denne tangents vinkel med førsteaksen hedde w, så får vi, at hældningskoefficienten for tangenten er tan w , dvs. $\tan w = 2ax_o$

Hældningskoefficienten for den reflekterede stråle, dvs. for linien *l*, er givet ved: tan u, hvor u er *l*'s vinkel med førsteaksen (se figur 4.11 b)). Vi vil nu finde et udtryk for tan u, som kan anvendes i formlen for liniens ligning for *l*.
Lad P, A, B og C være de på figur 4.11 a) og b) angivne punkter, og lad v være vinklen mellem den indkommende stråle og tangenten til parablen (se figur 4.11 a)).
Ifølge reglen om indfaldsvinkel = udfaldsvinkel har vinklen mellem tangenten og *l* også størrelsen v.
I trekant APB er de tre vinkler altså givet ved: u, v og 180-w, hvormed u + v + 180 – w = 180, idet vinkelsummen i en trekant er 180^o. Vi ser hermed, at: u = w – v.
Vi får brug for at kende tan w og tan v. Og vi ved allerede, at $\tan w = 2ax_o$. Da v (= ∠BPC) og w er de modstående vinkler i den retvinklede trekant BCP, ser vi, at $\tan v = \frac{1}{\tan w} = \frac{1}{2ax_o}$



a) b)

Fig. 4.11

(Dette udtryk for tanv kan også findes ud fra trekant BCP v.hj.a. formlen:

$\tan v = \frac{|BC|}{|CP|} = \frac{\frac{1}{2}x_o}{ax_o^{\,2}} = \frac{1}{2ax_o}$ (Detaljerne overlades til læseren)).

Ifølge omskrivningsformlen for tangens til en differens får vi, at:

$$\tan u = \tan(w - v) = \frac{\tan w - \tan v}{1 + \tan w \cdot \tan v} = \frac{2ax_o - \frac{1}{2ax_o}}{1+1} = ax_o - \frac{1}{4ax_o} = \frac{4a^2x_o^{\,2} - 1}{4ax_o}$$

Vi ser hermed, at linien l har ligningen:

$$y = \tan u \cdot (x - x_o) + ax_o^{\,2} = \frac{4a^2x_o^{\,2} - 1}{4ax_o} \cdot (x - x_o) + ax_o^{\,2}, \text{ dvs. } y = \frac{4a^2x_o^{\,2} - 1}{4ax_o} \cdot x + b,$$

hvor b er givet ved:

$$b = -\frac{4a^2x_o^{\,2} - 1}{4ax_o} \cdot x_o + ax_o^{\,2} = \frac{-4a^2x_o^{\,3} + x_o + 4a^2x_o^{\,3}}{4ax_o} = \frac{x_o}{4ax_o} = \frac{1}{4a}$$

Vi ser hermed, at l's skæringspunkt med andenaksen, dvs. b, er uafhængig af x_o, dvs. af hvor den indkommende stråle rammer parablen. Hermed er det ønskede bevist.

Bemærk, at brændpunktets placering på symmetriaksen er givet ved, at afstanden fra parablens toppunkt til brændpunktet er $\frac{1}{4a}$, når parablens ligning er $y = ax^2$. Dette kan bruges til konstruktionen af det apparat, man vil bygge på baggrund af den ovenstående teori (et hulspejl, en antenne, en projektør, osv.).
Hvis man f.eks. ønsker, at brændpunktet skal være 1,5 m fra paraboloidens toppunkt, så konstrueres en paraboloide på baggrund af parablen med ligningen: $y = \frac{1}{6}x^2$ (regn efter !), hvor x og y måles i meter.

På den nedenstående figur 4.12 ses billeder af et af verdens kraftigste radioteleskoper (det er 30 m i diameter). Det registrerende apparatur i brændpunktet ses tydeligt. ♥

30m Telescope
Loma de Dilar, Sierra Nevada, Granada, Spain
Kilde: IRAM, Pico Veleta Observatory
Ministerio de Fomento, España

a)

b)

Fig. 4.12

Svingninger og differentialregning.

Eksempel 4.12.
I eksempel 4.1 omtalte vi, at et lod, som hænger i en fjeder, vil svinge op og ned i en bevægelse, der kan beskrives på følgende måde (den såkaldte stedfunktion):

$$s(t) = s_{max} \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right)$$

Vi vil nu vise, at dette udtryk passer ind i Newtons 2. lov, der er en fysikkens grundsætninger. Newtons 2. lov siger, at den resulterende kraft F på et legeme er lig med legemets masse m gange med dets acceleration a, dvs. $F = m \cdot a$. Ved den resulterende kraft forstås summen af alle kræfter, der virker på legemet, hvor kræfterne "regnes med fortegn" afhængig af hvilken retning de virker i.

Og accelerationen a er givet ved den dobbelt afledede af stedfunktionen, dvs. $a(t) = s''(t)$ (idet accelerationen er differentialkvotienten af hastigheden v i bevægelsen, og hastigheden er differentialkvotienten af stedfunktionen for bevægelsen).
Newtons 2. lov kan altså skrives som: $F = m \cdot s''$ eller mere præcist: $F(t) = m \cdot s''(t)$, idet accelerationens og kraftens størrelse afhænger af tiden (dvs. af hvor loddet er i bevægelsen).
Den resulterende kraft stammer fra tyngdekraften på loddet og fra fjederens træk (kraft) i loddet. Når loddet hænger i ligevægtsstillingen, så er tyngdekraften og den aktuelle fjederkraft lige store, men modsat rettede, og de ophæver derfor hinanden. (Dette er årsagen til, at loddet kan hænge stille i ligevægtsstillingen. Jfr. øvelse 4.2).
Men hvis fjederen strækkes yderligere, så vil fjederkraften overstige tyngdekraften, hvormed den resulterende kraft på loddet bliver lig med denne ekstra fjederkraft. Og den er ifølge Hookes lov netop givet ved: $F = F_{fj,extra} = -k \cdot s$, hvor s er forskydningen udover ligevægtspositionen og k er fjederkonstanten. Minusset er medtaget, idet kraftens retning skal tages med i betragtningerne. Og den resulterende kraft, dvs. den ekstra fjederkraft, peger (virker) opad i positiv retning, når s er negativ (dvs. når loddet befinder sig under ligevægtsstillingen) – og omvendt.
(Hookes lov kan nemt eftervises ved i forsøget i øvelse 4.2 a) at hænge forskellige, ekstra lodder på, og så måle, hvor langt fjederen strækker sig. Den ekstra fjederkraft svarer da til tyngdekraften på de ekstra lodder).

I alt har vi nu fundet frem til, at der må gælde: $m \cdot s''(t) = -k \cdot s(t)$.

Vi skal nu kontrollere, at $s(t) = s_{max} \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right)$ passer i denne ligning. Vi har her, at:

$$\begin{aligned}
m \cdot s''(t) &= m \cdot s_{max} \cdot \left(\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right)\right)'' \\
&= m \cdot s_{max} \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot \left(\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right)\right)' \\
&= m \cdot s_{max} \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot \left(-\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right) \cdot \sqrt{\frac{k}{m}}\right) \\
&= -m \cdot s_{max} \cdot \left(\sqrt{\frac{k}{m}}\right)^2 \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right) \\
&= -k \cdot s(t)
\end{aligned}$$

hvormed det ønskede er opnået.

Man kan faktisk bevise, at funktioner af typen $s(t) = s_{max} \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t + c\right)$, hvor c er en konstant, er de eneste mulige løsninger til ligningen $m \cdot s''(t) = -k \cdot s(t)$. Dette bevis ligger udenfor rammerne af denne bog, men som også omtalt i eksempel 4.1 kan det ses i bogen: "Differentialligninger og matematiske modeller". ♥

Optimering:

Eksempel 4.13.
En virksomhed producerer "kræmmerhuse" af aluminium, idet en cirkulær plade med radius s snittes op indtil centrum langs en diameter, hvorefter pladen foldes til et kræmmerhus.

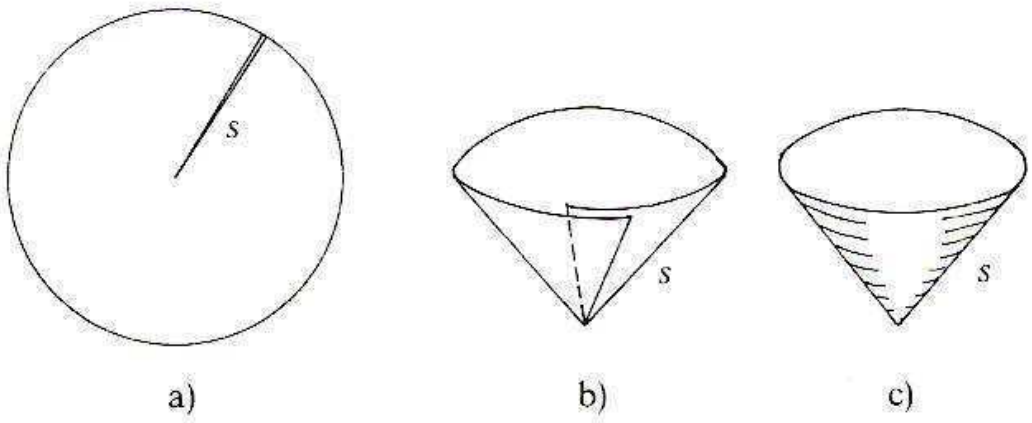


Fig. 4.13

Da kræmmerhusene skal bruges til en tragt, er man interesseret i at folde dem på en sådan måde, at rumfanget bliver størst muligt. Vi vil nu bestemme den "åbningsvinkel", som giver kræmmerhuset det største rumfang. Vi må derfor først bestemme rumfanget som funktion af vinklen.

Rumfanget af en kegle – som et kræmmerhus kaldes i matematik – er givet ved: $R = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$, hvor G er grundfladens areal og h er højden (se figur 4.14 a))

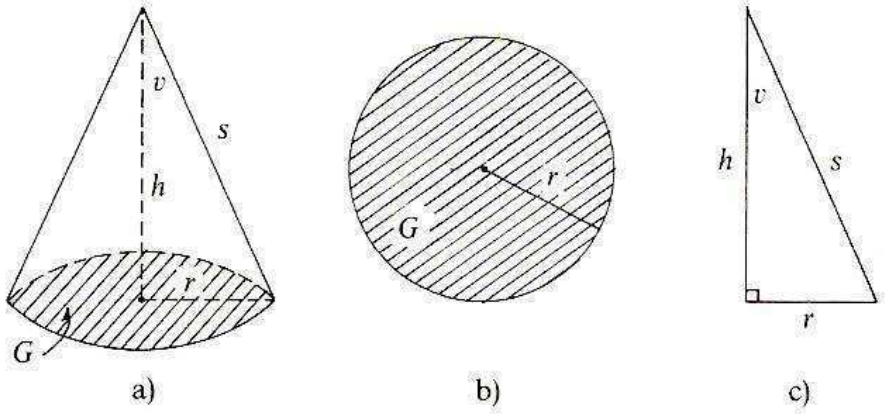


Fig. 4.14

Vi har: $G = \pi r^2$ og $\cos v = \frac{h}{s}$

hvor r er radius i grundfladen og v er den halve åbningsvinkel (se figur 4.14 b) og c)).

Der gælder således: $R = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot s \cdot \cos v$

Ifølge figur 4.14 c) har vi også: $\sin v = \frac{r}{s}$, hvormed vi i alt får: $R(v) = \frac{1}{3}\pi s^3 \cdot \sin^2 v \cdot \cos v$

hvor $v \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ (overvej denne begrænsning på v – og bemærk, at v regnes i radianer/tal).

Vi finder herefter:

$$\frac{dR(v)}{dv} = \tfrac{1}{3}\pi s^3 \cdot (\sin^2 v \cdot \cos v)' = \tfrac{1}{3}\pi s^3 \cdot (2\sin v \cdot \cos v \cdot \cos v + \sin^2 v \cdot (-\sin v))$$

$$= \tfrac{1}{3}\pi s^3 \cdot (2\sin v \cdot \cos^2 v - \sin^3 v)$$

Heraf får vi:

$$\frac{dR(v)}{dv} = 0 \Leftrightarrow 2\sin v \cdot \cos^2 v - \sin^3 v = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin v \cdot \cos^2 v = \sin^3 v$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 v = \sin^2 v$$

$$\Leftrightarrow 2 = \frac{\sin^2 v}{\cos^2 v}$$

$$\Leftrightarrow 2 = \tan^2 v$$

$$\Leftrightarrow \tan v = \sqrt{2}$$

hvor vi har brugt, at $v \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$

Ligningen $\tan v = \sqrt{2}$ har i intervallet $v \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ kun én løsning: $v = 0{,}955$

Fortegnsvariationen for R′(v) bestemmes herefter til at være følgende (kontrollér !!):

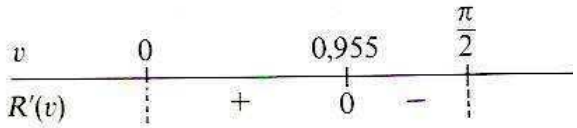


Fig. 4.15

Vi ser hermed (overvej !), at R(v) har maksimum i $v = 0{,}955$, dvs. i $v = 54{,}74^o$.
Den søgte åbningsvinkel er således: $109{,}48^o$.

Når aluminiumsfladen foldes, så denne vinkel fremkommer, vil der være en temmelig stor "overlapningsflade" i kræmmerhuset (se figur 4.13 b)). Man kan derfor med fordel skære noget af denne bort og dernæst efter omsmeltning bruge det bortskårne til tragtens studs (tragtens rør) (se figur 4.16).

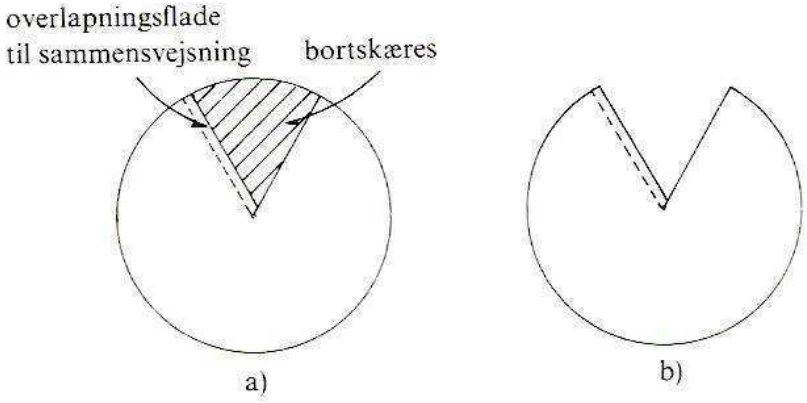


Fig. 4.16

Der bortskæres naturligvis også en lille smule aluminium i toppen af keglen (der hvor røret monteres). Men dette svarer formodentlig til det svind, som der altid vil være i forbindelse med en omsmeltning mm.

Når man i praksis står med den cirkulære aluminiumsplade med radius s og skal skære et stykke af denne før den foldes, så har man mere brug for at vide, hvilken vinkel w det bortskårne område danner end hvad den endelige vinkel v efter foldningen bliver. Vi vil derfor nu bestemme vinkelen w for det bortskårne område.
Omkredsen i den foldede kegles grundflade er: $2\pi r$ (se figur 4.14), og denne længde er samtidig lig med buen b på den udskårne plade (overvej – se figur 4.17).
Da vi har (jfr. ovenfor), at $r = s \cdot \sin v$ ses i alt, at: $b = 2\pi s \cdot \sin v$

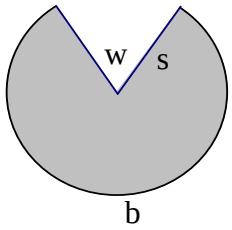


Fig. 4.17

Da hele omkredsen af aluminiumspladen (før udskæring) er: $2\pi s$, ser vi, at buelængden af det udskårne er: $2\pi s - 2\pi s \cdot \sin v = 2\pi s \cdot (1 - \sin v)$. Ifølge sætning 2.3 er buelængden af det udskårne også givet ved: $w \cdot s$ (idet vi måler både v og w i radianer), hvormed vi får: $ws = 2\pi s \cdot (1 - \sin v)$, dvs. $w = 2\pi \cdot (1 - \sin v)$. I det konkrete tilfælde, hvor v = 0,955, får vi: $w = 1{,}154$ radianer.
Hvis vi vil finde w i grader (hvilket nok vil være nemmest i praksis), skal vi ifølge sætning 2.4 gange med $\frac{180^o}{\pi}$, altså: $w = \frac{180^o}{\pi} \cdot 2\pi \cdot (1 - \sin v)$ dvs. $\boxed{w = 360^o \cdot (1 - \sin v)}$
I det konkrete tilfælde får vi (kontrollér), at $w = 66{,}13^o$. (Og som omtalt er dette en noget mere operationel information end at vide, at åbningsvinklen i kræmmerhuset skal være $109{,}48^o$) ♥

Øvelse 4.14.
En cirkelskive af aluminium har en radius på 14 cm, og den bruges til at lave en kegleformet tragt med maksimalt opnåeligt rumfang.
a) Bestem omkredsen i grundfladen for den kegle, som fremkommer ved foldning af tragten.
b) Bestem rumfanget af tragten.
c) Bestem længden af cirkelbuen for det cirkeludsnit, der bortskæres (idet der fastholdes en overlapningsflade med en "bredde" på 1,8 cm).
d) Bestem arealet af det stykke, der bortskæres. (Overlapningsfladen kan regnes som et rektangel med bredden 1,8 cm og længden 14 cm).
e) Vi forstiller os, at det bortskårne metal bruges til at lave en cylinderformet studs til tragten, idet det bortskårne metal omsmeltes og genanvendes. Studsen har samme tykkelse som tragten, dens diameter er 2 cm, og der er et svind på 13 % ved omsmeltningsprocessen.
Hvor lang bliver studsen ? ♥

Regnbuer

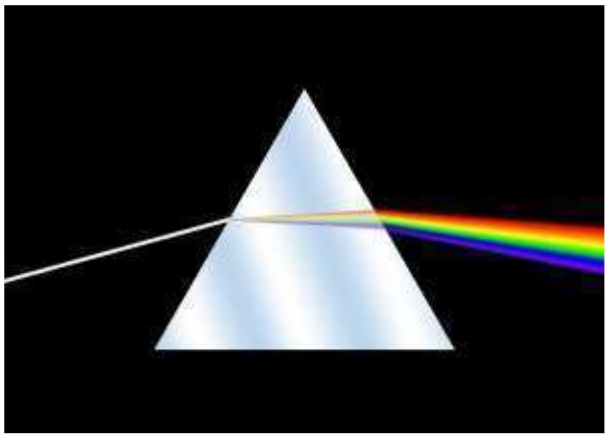
Eksempel 4.15.
Regnbuer er et af naturens på en gang besynderlige og smukke fænomener (se figur 4.18 øverst på næste side). Vi vil i dette eksempel forklare, hvordan regnbuen opstår.

Kilde: Astrophoto

Fig. 4.18

På billedet ses såvel tydeligt den almindelige (den primære) regnbue som den såkaldte sekundære regnbue. Vi vil i det følgende kun beskæftige os med den primære regnbue (bortset fra en afsluttende kommentar).

Vi starter med at se på begreberne ”hvidt lys” og spektrum.
Hvidt lys er f.eks. lys fra en almindelig elektrisk pære (en såkaldt glødelampe) eller lys fra solen. Vi ser det som hvidt lys p.gr.a. den måde vores øje fungerer på, men i virkeligheden er der tale om et såkaldt spektrum af lys med forskellige farver. Dette kan man se ved at sende hvidt lys igennem et såkaldt optisk gitter eller gennem et trekantet glasprisme (se figur 4.19 a)). Her ”opløses” (opdeles) det hvide lys i sine bestanddele – de forskellige farver, dvs. lys med forskellig bølgelængde,



a)

b)

Fig. 4.19

hvorved der fremkommer et spektrum (se figur 4.19 a) og b)). Bølgelængden for det synlige lys ligger imellem ca. 400 nm (violet) og ca. 730 nm (rødt), hvor enheden nm (nanometer) er lig 10^{-9} m

Der er altså ingen bestemt bølgelængde, der svarer til hvidt lys. Det hvide lys fremkommer som øjets reaktion på at modtage de mange forskellige bølgelængder på én gang.

Årsagen til, at prismet kan opløse det hvide lys i dets forskellige bestanddele (farver), skal søges i begrebet brydning, samt i at lys med de forskellige bølgelængder har forskellige hastigheder i glas: Lysets brydning er omtalt i opgave M.5 i opgavesamlingen. I opgaven ses på såkaldt monokromatisk lys (dvs. lys med en bestemt bølgelængde) – og der omtales den såkaldte brydningslov:

$$\frac{\sin i}{\sin b} = \frac{v_{medie1}}{v_{medie2}}$$

hvor i og b er hhv. indfaldsvinklen og brydningsvinklen (se figuren i opgaven), og hvor v_{medie1} hhv. v_{medie2} er hastigheden af det givne monokromatiske lys i det medie, hvor lyset kommer fra hhv. går ind i. (I det konkrete eksempel i opgaven er de to medier luft og glas).
Bemærk i øvrigt, at hvis vi vender lyset og sender det fra glasset op mod luften, så indfaldsvinklen svarer til b fra før, så vil brydningsvinklen svare til i fra før, dvs. lyset vil følge den samme bane. (Overvej dette nærmere !!).

Der gælder nu, at hastigheden for lys med forskellige bølgelængder er den samme, når lyset bevæger sig i vakuum, samt at de for ethvert praktisk formål også er ens i luften. Men når lyset bevæger sig i f.eks. glas eller vand, er hastighederne for lys med de forskellige bølgelængder så tilstrækkeligt forskellige, at det har en betydning, bl.a. for hvordan lyset brydes.

På figur 4.20 ses to lysstråler med hver sin farve (hver sin bølgelængde), som sendes i samme retning fra luften ned mod glasset. De har derfor samme indfaldsvinkel, men da de har forskellig hastighed nede i glasset, hvorimod hastigheden i luften er den samme, får de forskellige brydningsvinkler (jfr. brydningsloven ovenfor. Det overlades til læseren at argumentere for, at den farve der har den største hastighed i glasset, får den største brydningsvinkel – og dermed den mindste retningsændring).

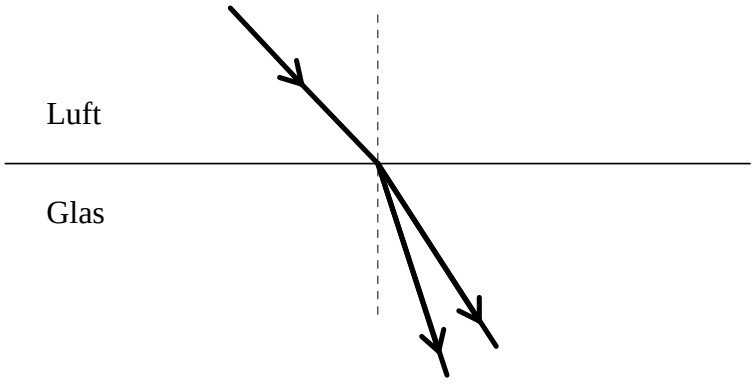


Fig. 4.20

Hvis vi sender hvidt lys ind imod glasoverfladen, så vil der p.gr.a. de forskellige farvers forskellige hastighed i glasset komme alle mulige brydningsvinkler (inden for visse grænser) – og dermed opstår spektret.

Tilsvarende vil ske, hvis lyset går fra luft og ind i vand eller i et andet gennemtrængeligt materiale.

Til at beskrive og regne med disse forhold og størrelser anvendes ofte begrebet: brydningsindeks. Brydningsindekset n for en given farve (bølgelængde), når lyset går fra medie 1 ind i medie 2, defineres som:

$$n = \frac{v_{medie1}}{v_{medie2}}$$

Hvis medie 1 specielt er vakuum (eller luften), så er $v_{medie\,1} = c$, hvor $c = 300.000$ km/s, og denne hastighed er altså ens for alle farver. I dette tilfælde bliver brydningsindekset n givet ved: $n = \frac{c}{v}$, hvor v er den givne farves hastighed i medie 2.

Brydningsloven får herefter følgende udseende: $\frac{\sin i}{\sin b} = n$

Brydningsindekset for vand er ca. 1,34, hvormed lysets hastighed i vand er ca. 223.880 km/s, hvorimod brydningsindekset for glas er ca. 1,5, hvormed lysets hastighed i glas er ca. 200.000 km/s. (Kontrollér !).
Men som omtalt er der en lille forskel på de enkelte farvers hastighed i det givne medie, hvilket giver sig udslag i en lille forskel i værdien af brydningsindekset for de forskellige farver. F.eks. er brydningsindekset for violet lys (400 nm) i vand lig med: 1,345 medens den for rødt lys (700 nm) er 1,330. Dette viser sig at få afgørende betydning for forståelsen af regnbuen, ligesom det havde betydning for spektret omtalt ovenfor.

Det skal nu fremhæves, at når lys rammer en given overflade, f.eks. en vand- eller en glasoverflade, så vil noget af lyset brydes ind i mediet under overfladen, medens en del af det vil blive reflekteret (tilbagekastet) fra overfladen, som vist på figur 4.21.

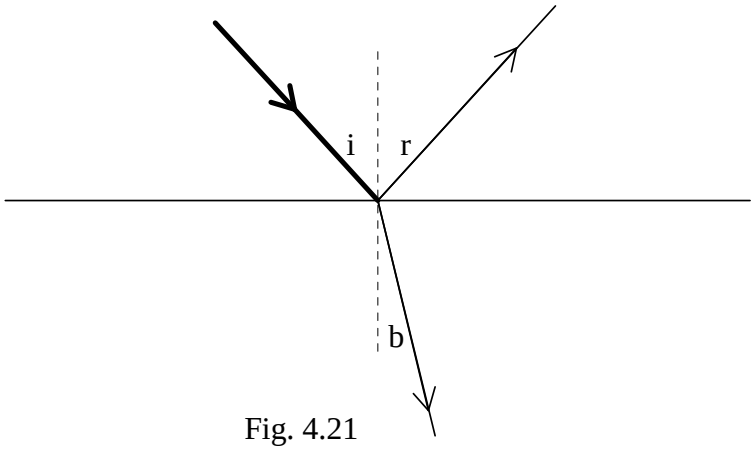


Fig. 4.21

Hvor stor en del af lysmængden, der brydes hhv. reflekteres afhænger af en lang række faktorer, som vi ikke skal komme ind på her. Men det skal bemærkes, at medens den brudte del af lysstrålen adlyder brydningsloven, så vil der for den reflekterede del af lysstrålen gælde, at indfaldsvinklen i er lig med refleksionsvinklen r.
Dette gælder i øvrigt også, hvis lysstrålen rammer en krum overflade. Så bestemmes indfaldsvinklen og refleksionsvinklen blot ud fra normalen til tangenten i det punkt, hvor strålen rammer.
(Jfr. en tilsvarende problemstilling i eksempel 4.11, figur 4.10, hvor de omtalte vinkler dog er defineret på en lidt anden måde).

Når det regner, er der tale om millionvis af små vanddråber, der falder ned fra skyerne og dermed danner et dråbefyldt rum mellem skyen og jordoverfladen. Når solen så (fra et hul i skyerne et andet sted) skinner ind på alle disse dråber, brydes og reflekteres lyset i dråberne, og regnbuen opstår.

For at forstå dette ser vi først på lys med en given bølgelængde, der rammer en enkelt dråbe. Sigtelinien fra iagttageren og op til denne dråbes centrum skærer den solstråle-linie, som går igennem den samme dråbes centrum. Sådanne to linier i rummet, som skærer hinanden, fastlægger en bestemt plan i rummet (nemlig planen, der indeholder de to linier – overvej dette!) Vi siger, at de to skærende linier udspænder en plan i rummet.
Vi ser altså på planen udspændt af sigtelinien og solstråle-linien gennem den givne dråbens centrum. Og idet vi kan antage, at dråben er kugleformet, vil denne plan skære dråben i en cirkel med samme radius som dråben. På figur 4.22 ser vi planen, cirklen og en stråle, som forløber i denne plan. (Den omtalte plan svarer altså til den plan, figur 4.22 er tegnet i).

Vi ser nu kun på lys, hvis stråler (ca.) ligger i denne plan og rammer denne cirkel, idet lysstråler, der ikke forløber i denne plan, spredes i alle mulige retninger og derfor ikke bidrager til den regnbue, som iagttageren ser. (Bemærk, at det hermed kun er en del af det sollys, der rammer dråben, som medvirker til at danne regnbuen).

Når lyset rammer dråbens overflade i et givet punkt på cirklen, så vil noget af lyset blive brudt ind i dråben, medens noget af lyset reflekteres. Vi ser på den del, der brydes ind i dråben.
Når dette brudte lys rammer overfladen (fra dråben ud mod luften) vil noget af lyset blive brudt ud gennem overfladen, og noget af lyset vil blive reflekteret. Vi ser på den del, der reflekteres.
Når dette reflekterede lys rammer overfladen (fra dråben og ud mod luften) et andet sted, vil noget af lyset blive brudt ud gennem overfladen, og noget af lyset reflekteres. Vi ser på den del, der brydes ud af dråben.
Bemærk, at der altså her alt i alt er tale om en yderligere reduktion af den lysmængde, der kan medvirke til at danne regnbuen for iagttageren.

Det er en stråle i den beskrevne del af lyset, hvis bane vi ser på figur 4.22. Desuden er der angivet den vinkel d, der er imellem den indgående og den udgående stråle. Den kalder vi drejningsvinklen.

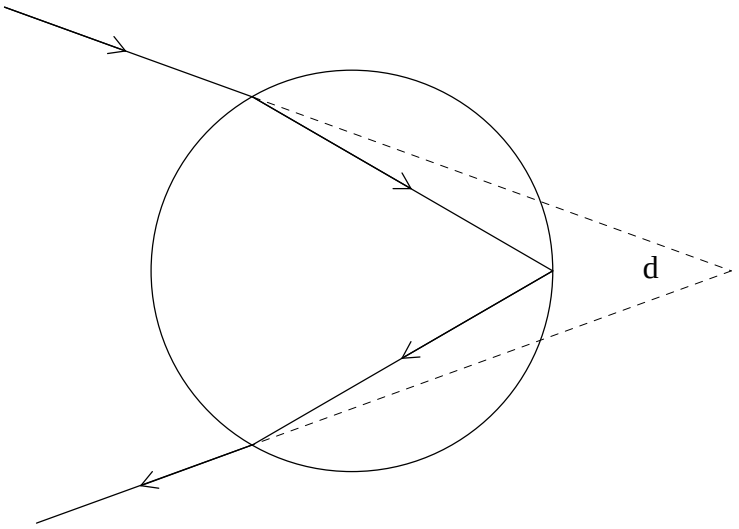


Fig. 4.22

Strålens bane afhænger af:

- hvor på cirklen (på overfladen af dråben) strålen rammer, og dermed
- hvilken vinkel (indfaldsvinkel) den rammer med, samt
- hvilken brydningsvinkel, den får, hvilket også bestemmes af
- hvilken farve (hvilket brydningsindeks) den har

Bemærk, at solens stråler er parallelle, når de rammer dråben forskellige steder på overfladen, hvormed der optræder alle mulige indfaldsvinkler i intervallet fra 0^o til 90^o. (Se figur 4.23, hvor indfaldsvinklen er vist v.hj.a. tangenten og normalen til tangenten i et givet punkt på overfladen, hvor strålen rammer).
Der er dermed tilsvarende forskellige baner igennem dråben, og dertil hørende drejningsvinkler. (Læseren opfordres til at prøve at tegne nogle strålebaner, svarende til forskellige indgangspunkter på dråbens overflade – og dermed til forskellige indfaldsvinkler).

Vi vil nu opstille en generel formel for drejningsvinklen d som funktion af indfaldsvinklen i, for dermed at se, i hvilket område alle disse stråler findes, herunder hvilke begrænsninger der er på d.

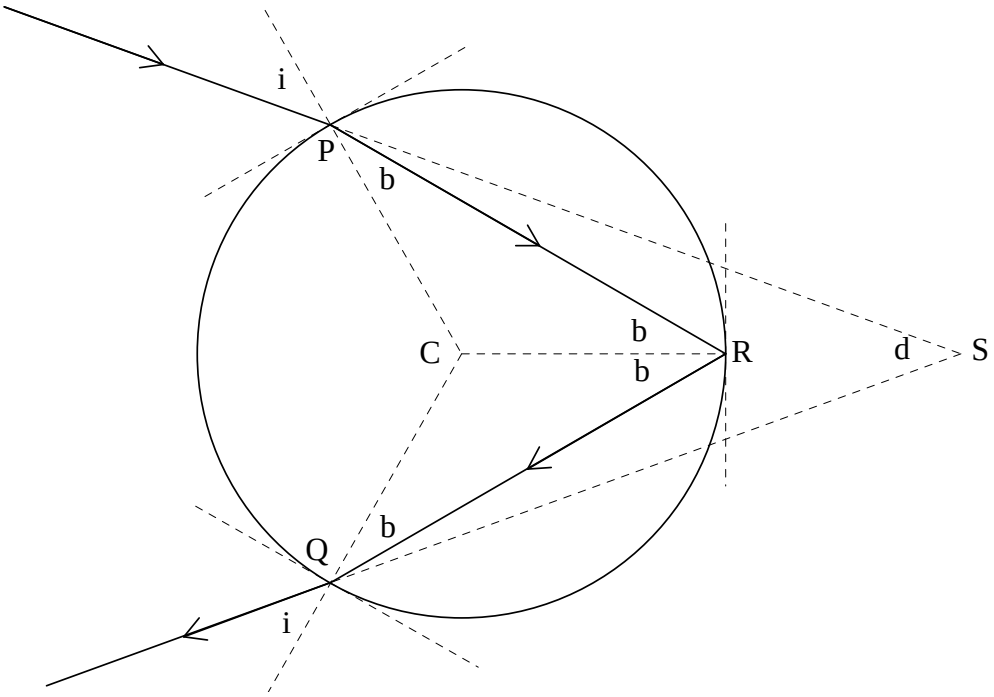


Fig. 4.23

Vi starter med at argumentere for, at de fire anførte vinkler med værdien b faktisk er lige store:
I ΔCPR er der tale om to vinkler ved grundlinien i en ligebenet trekant (overvej !), og de er som bekendt lige store. Ved punktet R er de to vinkler lige store på grund af refleksionen (indfaldsvinklen er lig refleksionsvinklen). Og i ΔCRQ er der igen tale om to vinkler ved grundlinien i en ligebenet trekant.
Dernæst ses, at de to vinkler markeret med værdien i faktisk er lige store, idet indfaldsvinklen ved brydningen ved punktet Q (hvor strålen går fra dråben og ud i luften) er lige så stor som brydningsvinklen ved punktet P. (Brydningen ved Q svarer altså til at "vende" strålen ved punktet P).

Da vinkelsummen i en firkant er 360^o, er vinkel C i PCQR (firkant PCQR) lig med $360^o - 4b$.
Da $\angle CPS = i = \angle CQS$ (overvej !!), ser vi, at der i PCQS gælder, at: $360^o = d + 2i + (360^o - 4b)$, hvormed vi får, at:

$$d = 4b - 2i$$

Ud fra brydningsloven får vi:

$$\frac{\sin i}{\sin b} = n \quad \Leftrightarrow \quad \sin b = \frac{\sin i}{n} \quad \Leftrightarrow \quad b = \sin^{-1}\left(\frac{\sin i}{n}\right)$$

hvor den sidste omskrivning er lovlig, idet brydningsvinklen b befinder sig i intervallet $0^o - 90^o$.
Vi ser altså dels, at b er en funktion af i, dvs. vi kan skrive b(i), dels at d er en funktion af i givet ved:

$$d(i) = 4 \cdot \sin^{-1}\left(\frac{\sin i}{n}\right) - 2 \cdot i$$

Hvis vi angiver i og d i radianer, så får vi følgende grafer for d(i), hvor den øverste svarer til brydningsindekset n = 1,330 (rødt lys) og den nederste svarer til brydningsindekset n = 1,345 (violet lys):

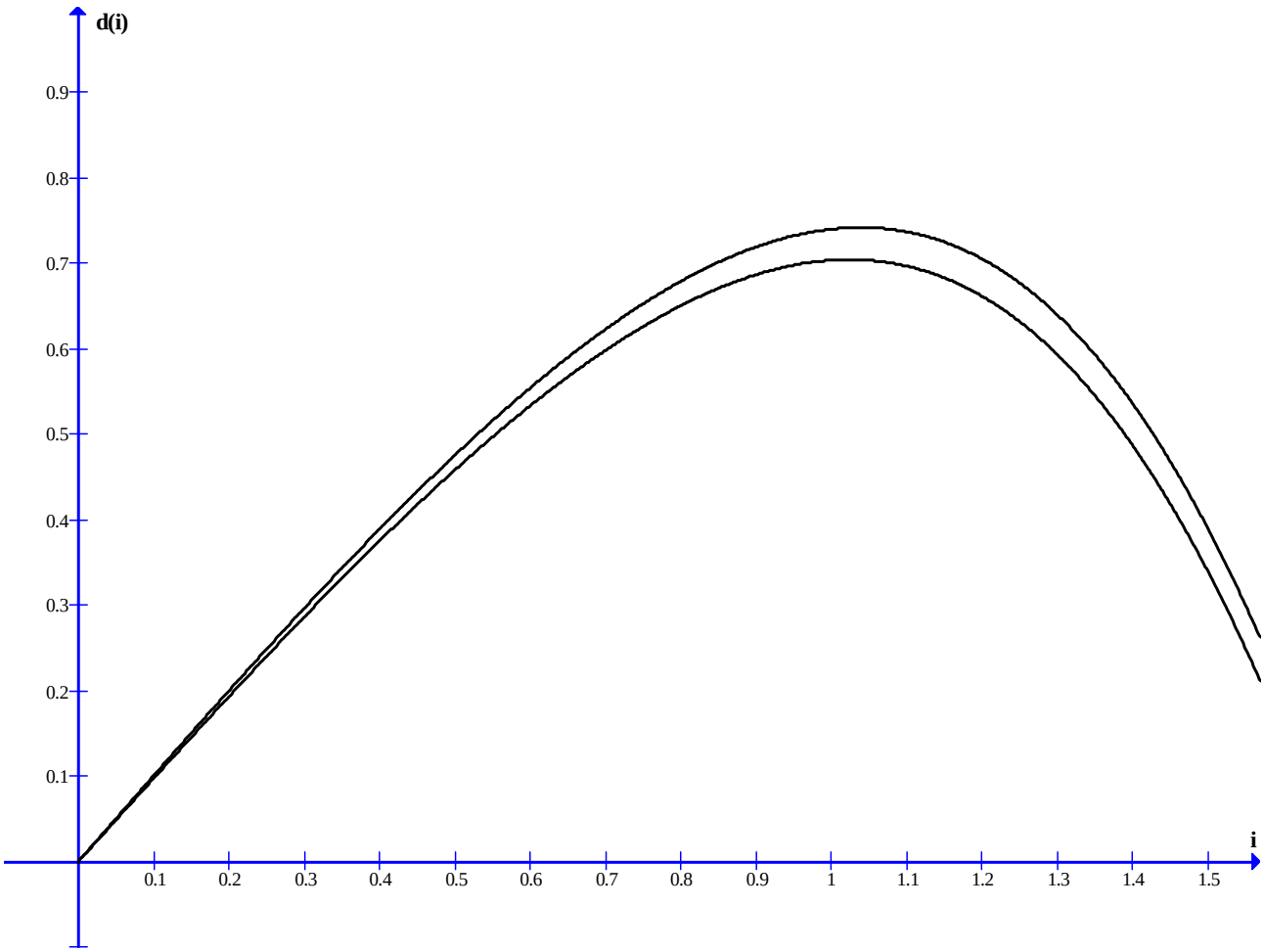


Fig. 4.24

Vi ser, at der for begge farver (brydningsindeks) er tale om, at d(i) har en maksimal værdi, at dette maksimum er forskelligt for de to farver, samt at maksimum antages i lidt forskellige værdier af i.

Bestemmelse af (og eksistensen af) den maksimale drejningsvinkel, dvs. den maksimale værdi for d(i), spiller en afgørende rolle for forståelsen af regnbuen (forklaring følger). Vi vil derfor nu gennemføre beregningen heraf og argumentationen herfor.
Da vi skal differentiere sinus, fortsætter vi med at arbejde med vinklerne målt i radianer. Og for at undgå at skulle differentiere funktionen $\sin^{-1}$ finder vi differentialkvotienten af d(i) på følgende måde: Idet vi husker på, at både b og d er funktioner af i, kan udtrykket $d = 4b - 2i$ skrives som:

$$d(i) = 4b(i) - 2i$$

hvormed vi får:

$$d'(i) = 4 \cdot b'(i) - 2$$

Ud fra brydningsloven får vi (overvej): $\dfrac{\sin(i)}{\sin(b(i))} = n \quad \Leftrightarrow \quad \sin(i) - n \cdot \sin(b(i)) = 0$

Ved differentiation af funktionen: $\sin(i) - n \cdot \sin(b(i))$ får vi (ved anvendelse af bl.a. reglen om differentiation af en sammensat funktion), at:

$$\cos(i) - n \cdot \cos(b(i)) \cdot b'(i) = 0$$

hvoraf vi finder, at:

$$b'(i) = \frac{\cos(i)}{n \cdot \cos(b(i))}$$

Hvis dette udtryk indsættes i formlen for $d'(i)$ får vi endelig: $d'(i) = 4 \cdot \dfrac{\cos(i)}{n \cdot \cos(b)} - 2$

hvilket kan omskrives (overvej) til: $d'(i) = \dfrac{4 \cdot \cos(i) - 2 \cdot n \cdot \cos(b)}{n \cdot \cos(b)}$

Når vi skal finde ekstremum, sætter vi $d'(i) = 0$, og ved hjælp af nulreglen for en brøk får vi dermed:

$$d'(i) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4 \cdot \cos(i) - 2 \cdot n \cdot \cos(b) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2 \cdot \cos(i) = n \cdot \cos(b)$$

Da både i og b ligger i intervallet $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, er både $\cos(i) \geq 0$ og $\cos(b) \geq 0$. Vi kan derfor tillade os at kvadere på begge sider af lighedstegnet, hvormed vi får:

$$d'(i) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2 \cdot \cos(i) = n \cdot \cos(b) \quad \Leftrightarrow \quad 4 \cdot \cos^2(i) = n^2 \cdot \cos^2(b)$$

Ved anvendelse af formlen: $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ kan det sidste udtryk omskrives således (overvej):

$$\begin{aligned} 4 \cdot \cos^2(i) = n^2 \cdot \cos^2(b) &\Leftrightarrow 4 \cdot (1 - \sin^2(i)) = n^2 \cdot (1 - \sin^2(b)) \\ &\Leftrightarrow 4 - 4\sin^2(i) = n^2 - (n \cdot \sin(b))^2 \end{aligned}$$

Da vi ifølge brydningsloven har: $\sin(i) = n \cdot \sin(b)$ får vi herefter (overvej !):

$$d'(i) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4 - 4\sin^2(i) = n^2 - \sin^2(i) \quad \Leftrightarrow \quad 4 - n^2 = 3 \cdot \sin^2(i)$$

hvilket fører os til det endelige resultat:

$$d'(i) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin(i) = \sqrt{\frac{4-n^2}{3}} \quad \Leftrightarrow \quad i = \sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{4-n^2}{3}}\right)$$

Vi ser altså, at der er netop én værdi af indfaldsvinklen i, hvor $d'(i) = 0$, og denne værdi afhænger af brydningsindekset n. (Jfr. figur 4.24).
Vi har ikke bevist, at der er tale om et maksimum i dette punkt, idet vi hertil skal bestemme monotoniforholdene for d(i). Vi skal da vise (overvej), at

$$d'(i) > 0 \text{ for } i < \sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{4-n^2}{3}}\right) \quad \text{og} \quad d'(i) < 0 \text{ for } i > \sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{4-n^2}{3}}\right)$$

Ved en omskrivning helt magen til den ovenfor gennemførte ved ligningen: $d'(i) = 0$ får vi:

$$d'(i) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin(i) < \sqrt{\frac{4-n^2}{3}}$$

(detaljerne overlades til den interesserede læser). Da sin(i) er en voksende funktion for $i \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, og da den omvendte funktion til en voksende funktion er voksende (jfr. Appendix 3, sætning A.3.13), ser vi at:

$$d'(i) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad i < \sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{4-n^2}{3}}\right)$$

hvormed det ønskede er opfyldt, dvs. d(i) har maximum i værdien: $i = \sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{4-n^2}{3}}\right)$.

Vi går nu tilbage til at se på vinklerne målt i grader.
For den røde farve, hvor n = 1,330, finder vi den maksimale drejningsvinkel på følgende måde:
$i = \sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{4-1{,}330^2}{3}}\right) \Leftrightarrow i = 59{,}5849^o$. Og ud fra brydningsloven har vi som tidligere nævnt, at: $b = \sin^{-1}\left(\frac{\sin i}{n}\right)$, hvilket i denne situation giver: $b = \sin^{-1}\left(\frac{\sin(59{,}5849^o)}{1{,}330}\right) = 40{,}4216^o$
Ved anvendelse af $d = 4b - 2i$ får vi, at den maksimale drejningsvinkel svarende til n = 1,330 er:
$d = 4 \cdot 40{,}4216^o - 2 \cdot 59{,}5849^o = 42{,}51^o$

På samme måde er de maksimale drejningsvinkler i følgende tabel udregnet (læseren opfordres til at kontrollere mindst én af dem):

Farve	Brydningsindeks n	Maksimal drejningsvinkel
Rød	1,330	$42{,}51^o$
Orange	1,3335	$42{,}01^o$
Gul-Grøn	1,336	$41{,}64^o$
Lyseblå	1,339	$41{,}21^o$
Violet	1,345	$40{,}36^o$

Lad os igen se på grafen for d(i) for et givet brydningsindeks (f.eks. den røde farve med n = 1,330 som på figur 4.24), hvor vi denne gang angiver vinklerne i og d(i) i grader (se figur 4.25).
Som vi kan se af tabellen, er den maksimale drejningsvinkel for farven orange (som "ligger ved siden af " rød i spektret) ca. $0{,}5^o$ mindre end den maksimale drejningsvinkel for den røde farve.
På figur 4.25 er indtegnet en linie i højden $42{,}01^o$, og v.hj.a. denne ser vi, at ca. 10 % af de mulige indfaldsvinkler giver en drejningsvinkel, som ligger mellem $42{,}01^o$ og maximumsværdien $42{,}51^o$.
Set i forhold til definitionsmængden for funktionen d(i) er det således en ganske betragtelig del af funktionsværdierne, som højst afviger $0{,}5^o$ fra maximumsværdien. Vi ser derfor, at dråben har en "fokuserende virkning" (samler mange røde stråler) tæt ved drejningsvinklen $42{,}51^o$.
De øvrige tilbagedrejede røde stråler har derimod en mere jævn fordeling af drejningsvinkler imellem 0^o og 42^o – og dermed en væsentlig lavere intensitet.

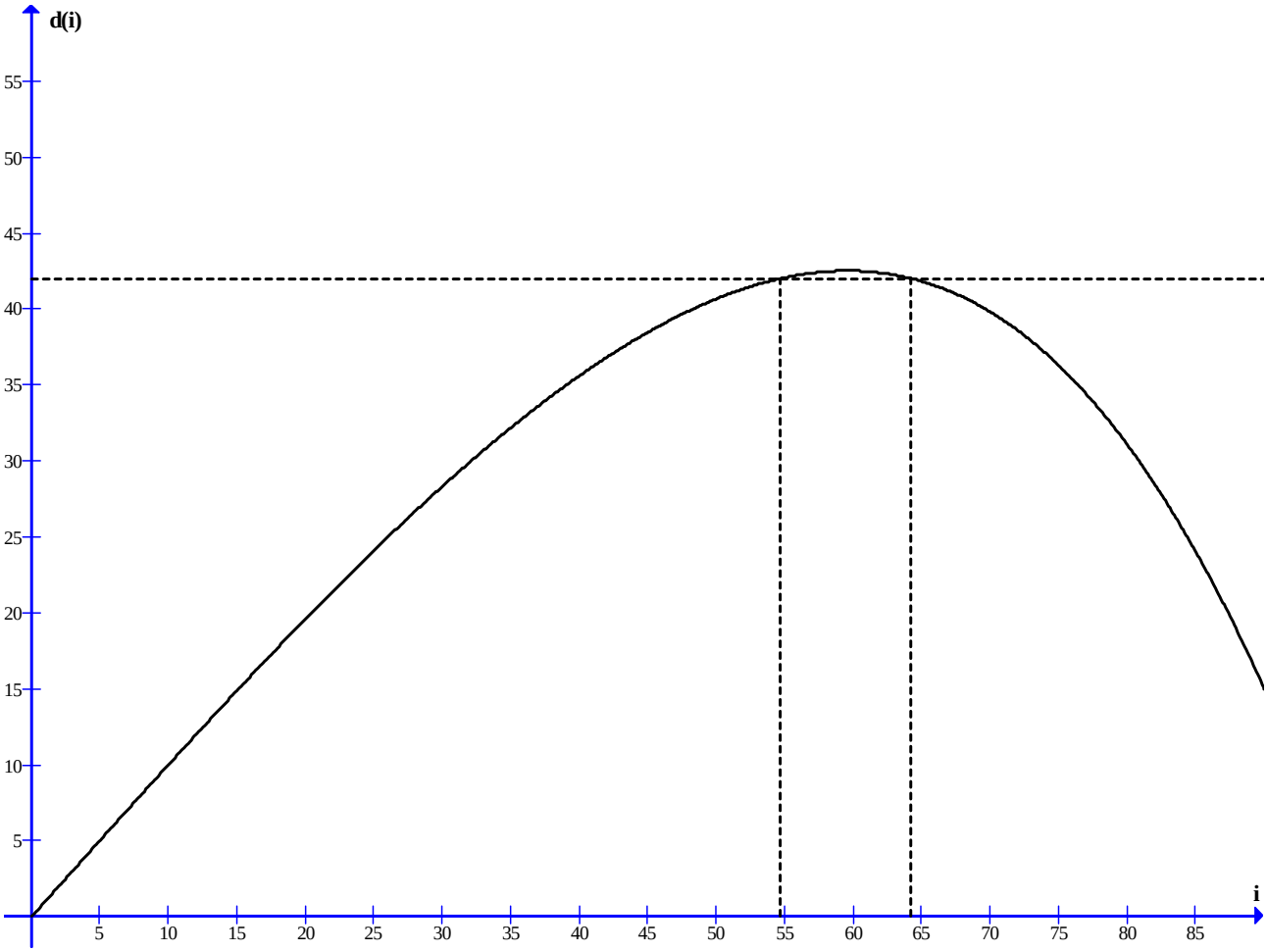


Fig. 4.25

På samme måde ses, at en vanddråbe har en fokuserende virkning på det orange lys ved en drejningsvinkel tæt på (men mindre end eller lig med) $42{,}01^o$, at den har en fokuserende virkning på det gul-grønne lys ved en drejningsvinkel tæt på (men mindre end eller lig med) $41{,}64^o$ osv., osv., hvorimod de øvrige tilbagedrejede stråler er jævnt fordelt over de mindre drejningsvinkler – og de har dermed en væsentlig lavere intensitet.

På nedenstående figur 4.26 ses et skematisk billede af situationen, hvor regnbuen ses fra siden og hvor der er tegnet en række vanddråber i forskellig højde – og dermed forskellig sigtelinie i forhold til iagttagerens øje. Desuden ses solens (parallelle) stråler, som rammer vanddråberne.

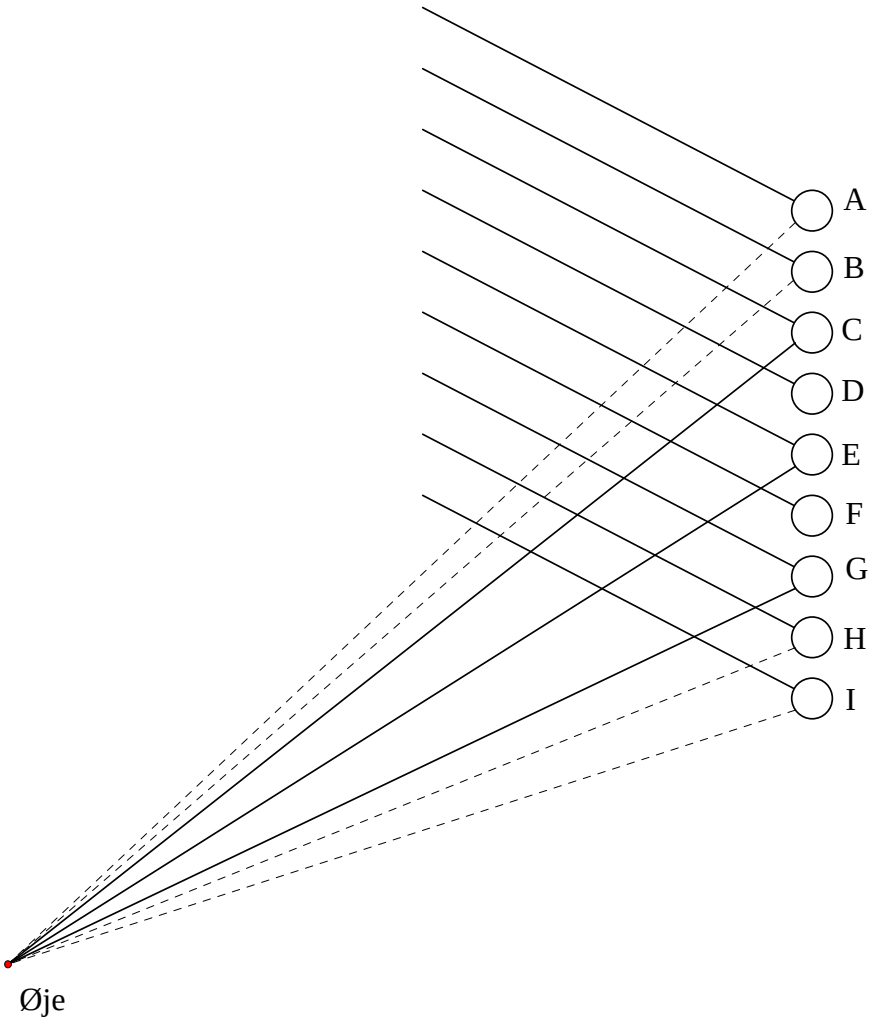


Fig. 4.26

Figuren skal vise, at for dråberne A og B er vinklen mellem solens stråle og sigtelinien større end $42{,}51^o$, hvormed intet af solens lys drejes tilbage til iagttagerens øje. Dette øvre område fremstår derfor mørkt.
For C er vinklen mellem solens stråle og sigtelinien ca. $42{,}5^o$, og den røde farve drejes – endda med fokuserende virkning – tilbage i iagttagerens øje.
For E er vinklen mellem solens stråle og sigtelinien ca. $41{,}6^o$ – og den gul-grønne farve drejes med fokuserende virkning tilbage i iagttagerens øje. Også lidt af det røde og orange lys drejes tilbage i denne vinkel, men intensiteten af disse farver er lav sammenlignet med det fokuserede gul-grønne lys, som dermed giver det fremherskende synsindtryk i denne vinkel.
For G er vinklen ca. $40{,}3^o$ – og den violette farve drejes med fokuserende virkning tilbage i iagttagerens øje. Også lidt af det røde, orange, gulgrønne osv. lys drejes tilbage i denne vinkel, men intensiteten af disse farver er lav sammenlignet med det fokuserede violette lys, som dermed giver det fremherskende synsindtryk i denne vinkel. Men det skal bemærkes, at alle disse svage øvrige farver er årsagen til, at regnbuen ofte opfattes lidt mere hvidlig i den nederste del af buen (ved den violette farve).

For dråberne H og I er drejningsvinklen mindre end $39{,}5^o$, og her ses alle de drejede farver – i svag intensitet. Dette opfattes som hvidt lys – og det er årsagen til, at himlen under buen ser lysere ud end himlen over buen.

Det skal i forlængelse af dette fremhæves, at da kun en ganske lille del af solens stråler indgår i den regnbue, som en iagttager ser, er regnbuen væsentligt mindre lysstærk, end hvis der blot var holdt et spejl op, som reflekterede alle solens stråler. Regnbuen ses derfor også bedst på en baggrund af mørke skyer – og selv her er lysstyrken behersket.

Vi mangler nu kun at forklare, hvorfor regnbuen ses som en bue.
Hvis vi f.eks. ser på den røde farve, så skal vinklen mellem sigtelinien fra iagttagerens øjne og op til en given regndråbe danne en vinkel på ca. $42{,}5^o$ med solens stråler for at vi ser den røde farve.
Da alle solens stråler er parallelle, findes de relevante regndråber (der giver den rette vinkel) i forskellig højde i forhold til iagttagerens position. Nogle findes ude til venstre nær ved jordens overflade, andre findes højere oppe, men længere til højre, nogen findes endnu højre oppe og endnu længere til højre, osv. osv. indtil det begynder at gå nedad igen – for at ende med dråber tæt ved jordoverfladen i højre side.
Mere matematisk kan det beskrives ved, at de relevante regndråber findes langs kanten af grundfladen af en kegle, hvor iagttageren står i keglens toppunkt, og hvor keglens halve åbningsvinkel er $42{,}5^o$. (Jfr. figur 4.14 a), hvor den dér viste kegles halve åbningsvinkel er v).
Det overlades som en øvelse til læseren at overveje og forklare dette nærmere, herunder at tegne en figur, der illustrerer situationen.

Men dette betyder så også, at to iagttagere, som står på hvert sit sted og ser på det samme regnvejr der belyses af solens stråler, ser to forskellige regnbuer. Desuden betyder det, at regnbuen flytter sig, hvis iagttageren flytter sig. (Det kan derfor ikke betale sig at lede efter guld ved regnbuens ende !).

Vi afslutter denne omtale af regnbuer med at gøre opmærksom på, at der undertiden kan ses en sekundær regnbue svarende til, at lyset reflekteres 2 gange inde i vanddråberne inden det bryder ud igennem dråbernes overflade. Denne sekundære regnbue er derfor endnu mindre lysstærk end den primære bue. Men udover at påpege, at den sekundære regnbue svagt kan ses på billedet på figur 4.18, vil vi ikke komme yderligere ind på dette emne.