Kap. 1: Logaritme-, eksponential- og potensfunktioner. Grundlæggende egenskaber.

1.1. Logaritmefunktioner.

Definition 1.1.1.

Ved en logaritmefunktion forstår vi en funktion f, som opfylder følgende tre krav:
1) $Dm(f) = R_+$ og $Vm(f) = R$
2) f er monoton (dvs. f er enten voksende i R_+ eller aftagende i R_+)
3) For alle $a, b \in R_+$ gælder: $f(a \cdot b) = f(a) + f(b)$

Det første, man måske kunne spørge om, er, om der overhovedet findes en funktion med disse egenskaber. Dette er (sammen med andet basalt stof om logaritmefunktioner) bevist i Appendix 1, som imidlertid er på ret højt fagligt niveau og derfor må vente til senere i de fleste læseres matematiske karriere.

Da $Vm(f) = R$ for en logaritmefunktion f, findes der specielt et tal $c \in R_+$, så $f(c) = 1$. Og da f er monoton, antages funktionsværdien 1 kun én gang, dvs. der findes kun ét tal med denne egenskab. Vi kan derfor tillade os at anføre følgende:

Definition 1.1.2.

Ved grundtallet for en logaritmefunktion f forstår vi det tal $c \in R_+$, som opfylder, at $f(c) = 1$.
En logaritmefunktion med grundtallet c vil vi betegne således: $\log_c$

For ethvert positivt reelt tal $c \neq 1$ findes der en logaritmefunktion med c som grundtal. Beviset for denne påstand bygger på følgende sætning (se øvelse 1.1.4):

Sætning 1.1.3

1) Hvis f er en logaritmefunktion og k er en given konstant ($k \neq 0$), så er funktionen $k \cdot f$ også en logaritmefunktion.
2) Hvis f og g er to givne logaritmefunktioner, så findes der en konstant k, så $g(x) = k \cdot f(x)$ for alle $x \in R_+$

Denne sætning er bevist i Appendix 1.

Øvelse 1.1.4:
Lad $\log_d$ være en given logaritmefunktion med grundtal d, og lad $c \in R_+ \backslash \{1\}$ være vilkårlig givet.
Argumentér for, at funktionen $\frac{1}{\log_d(c)} \cdot \log_d(x)$ er en logaritmefunktion med grundtal c. ♥

Vi bemærker altså, at der findes uendeligt mange logaritmefunktioner, men at de "ligner hinanden" idet forskellen på dem er en konstant. Dette vender vi tilbage til senere.

I forlængelse af definition 1.1.1 og 1.1.2 kan vi nu anføre, at der gælder følgende sætning (der måske burde betegnes som en definition, da der blot er tale om en gentagelse af 1.1.1 og dele af 1.1.2 med den nye notation anvendt):

Sætning 1.1.5.

Hvis $\log_c$ er en logaritmefunktion med grundtal c, så gælder der:
1) $Dm(\log_c) = R_+$ og $Vm(\log_c) = R$
2) $\log_c$ er enten voksende i R_+ eller aftagende i R_+
3) For alle $a, b \in R_+$ gælder: $\log_c(a \cdot b) = \log_c(a) + \log_c(b)$
4) $\log_c(c) = 1$

På baggrund af denne sætning kan vi nu bevise følgende:

Sætning 1.1.6.

Der gælder følgende **regneregler for en vilkårlig logaritmefunktion** $\log_c$:

1) $\log_c(1) = 0$ og $\log_c(c) = 1$
2) $\log_c(a \cdot b) = \log_c(a) + \log_c(b)$
3) $\log_c\left(\frac{a}{b}\right) = \log_c(a) - \log_c(b)$ for alle $a, b \in R_+$
4) $\log_c\left(a^n\right) = n \cdot \log_c(a)$ for alle $a \in R_+$ og alle $n \in Z$
5) $\log_c\left(\sqrt[n]{a}\right) = \frac{1}{n} \cdot \log_c(a)$ for alle $a \in R_+$ og alle $n \in N$
6) $\log_c(a + b)$ kan ikke omskrives.
7) $\log_c(a - b)$ kan ikke omskrives.

Bevis:

Regel 2 er en del af definitionen på en logaritmefunktion – og nævnes blot her for fuldstændighedens skyld.

Regel 1: Da $1 = 1 \cdot 1$ ser vi, at: $\log_c(1) = \log_c(1 \cdot 1) = \log_c(1) + \log_c(1)$, hvor regel 2 er anvendt.
Ved at trække $\log_c(1)$ fra på begge sider af lighedstegnet fås: $\log_c(1) = 0$.
$\log_c(c) = 1$ følger direkte af definition 1.1.2 – og nævnes blot her for fuldstændighedens skyld.

Regel 3: Da $a = \frac{a}{b} \cdot b$ ses ved anvendelse af regel 2: $\log_c(a) = \log_c\left(\frac{a}{b} \cdot b\right) = \log_c\left(\frac{a}{b}\right) + \log_c(b)$
Ved at trække $\log_c(b)$ fra på begge sider af lighedstegnet fås den ønskede regel.

Regel 4: Hvis n er positiv, får vi ved anvendelse af regel 2, at :
$\log_c(a^n) = \log_c(a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a) = \log_c(a) + \log_c(a) + \log_c(a) + \ldots + \log_c(a) = n \cdot \log_c(a)$

Da $a^o = 1$ ser vi af regel 1, at: $\log_c(a^o) = \log_c(1) = 0 = 0 \cdot \log_c(a)$

Endelig har vi, at $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ giver os følgende:

$$\log_c(a^{-n}) = \log_c\left(\frac{1}{a^n}\right) = \log_c(1) - \log_c(a^n) = 0 - n \cdot \log_c(a) = -n \cdot \log_c(a)$$

Regel 5: Da $a = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n$ har vi ifølge regel 4, at: $\log_c(a) = \log_c\left(\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\right) = n \cdot \log\left(\sqrt[n]{a}\right)$, hvorefter regel 5 fremkommer ved at dividere med n på begge sider af lighedstegnet.

"Reglerne" 6 og 7 er blot at tage til efterretning, men det gør dem ikke mindre betydningsfulde. ♥

Som omtalt findes der for ethvert positivt reelt tal $c \neq 1$ en logaritmefunktion med c som grundtal. Men de mest almindeligt anvendte logaritmefunktioner er $\log_2$, $\log_{10}$ og $\log_e$, hvor e er et irrationalt tal, som med 6 decimalers nøjagtighed er givet ved: e = 2,718282. At netop tallet e og dermed logaritmefunktionen $\log_e$ har særlig betydning, er vanskelig at gøre rede for på dette tidspunkt, men det kan nævnes, at det netop er denne logaritmefunktions eksistens, der bevises i Appendix 1.
De tre omtalte logaritmefunktioner kaldes totalslogaritmen, titalslogaritmen og den naturlige logaritme. Titalslogaritmen $\log_{10}$ skrives ofte blot som log (hvor 10 altså er underforstået), og den naturlige logaritme skrives oftest som ln, altså: $\ln = \log_e$.

Eksempel 1.1.7.
Lad os prøve at undersøge logaritmefunktionen med grundtal 2 lidt nærmere. Ifølge sætning 1.1.6 har vi følgende funktionsværdier for $\log_2$:

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	$\sqrt{2}$	2	$\sqrt{8}$	4	8	16
$\log_2(x)$	-3	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	3	4

Disse værdier fremkommer på følgende måde (vi giver tre eksempler):

- $\log_2(8) = \log_2(2^3) = 3 \cdot \log_2(2) = 3 \cdot 1 = 3$
- $\log_2(\sqrt{8}) = \frac{1}{2} \cdot \log_2(8) = \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{3}{2}$
- $\log_2(\frac{1}{8}) = \log_2(1) - \log_2(8) = 0 - 3 = -3$

$\log_2$ er voksende (idet $\log_2$ enten er voksende eller aftagende, og vi ved, at $0 = \log_2(1) < 1 = \log_2(2)$)
Desuden ved vi, at $Dm(\log_2) = R_+$ og $Vm(\log_2) = R$. Kombineres disse informationer med de fundne værdier i tabellen, ser vi, at grafen for $\log_2$ har et udseende som vist på figur 1.1.1. ♥

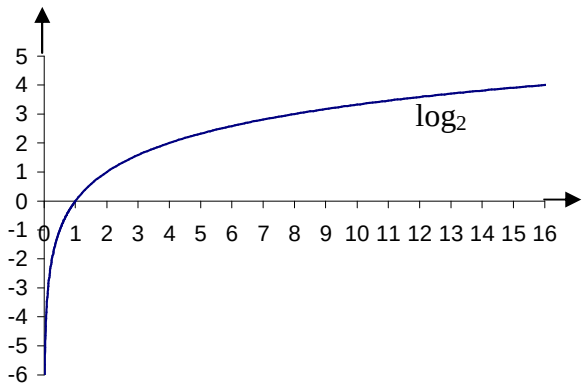


Fig. 1.1.1

Alle voksende logaritmefunktioner har i princippet samme udseende som $\log_2$ (se figur 1.1.1 og jfr. sætning 1.1.3). Graferne for logaritmefunktionerne log og ln (dvs. $\log_{10}$ og $\log_e$) ses på figur 1.1.2.

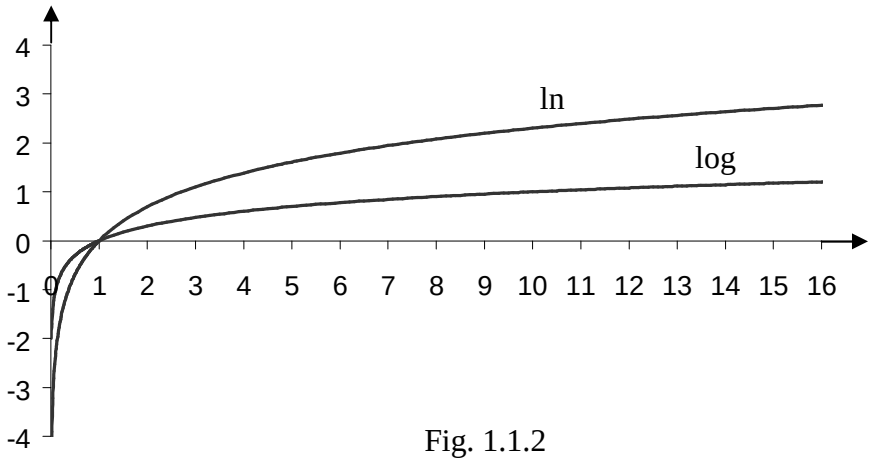


Fig. 1.1.2

Som logaritmefunktion betragtet bruges de aftagende logaritmefunktioner stort set ikke. Men for i det mindste at se grafen for en aftagende logaritmefunktion, er der på figur 1.1.3 tegnet grafen for $\log_{\frac{1}{3}}$ (dvs. logaritmefunktionen med grundtal $\frac{1}{3}$).

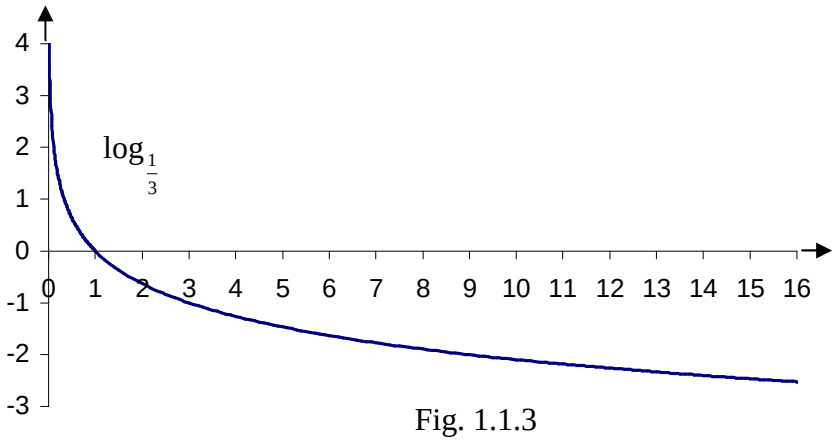


Fig. 1.1.3

I forbindelse med logaritmefunktioners monotoni-egenskaber gælder følgende sætning:

Sætning 1.1.8.

Om en logaritmefunktion $\log_c$ med grundtal c gælder:

$c < 1 \Rightarrow \log_c$ er aftagende i R_+

$c > 1 \Rightarrow \log_c$ er voksende i R_+

Bevis:

Sætningen følger af, at en logaritmefunktion enten er voksende i R_+ eller aftagende i R_+, at $\log_c(1) = 0$ samt at $\log_c(c) = 1$. Detaljerne overlades til læseren. ♥

Bemærk, at indholdet af sætning 1.1.8 er fint i overensstemmelse med udseendet af graferne på figur 1.1.1, 1.1.2 og 1.1.3.

I forlængelse af sætning 1.1.3 vil vi nu anføre følgende sætning:

Sætning 1.1.9.

For logaritmefunktionen med grundtal c gælder, at $\log_c(x) = \frac{1}{\ln c} \cdot \ln x$ for alle $x \in R_+$

Bevis:
Ifølge sætning 1.1.3 findes der en konstant k, så $\log_c(x) = k \cdot \ln x$ for alle $x \in R_+$. Dette gælder specielt for x = c, hvormed vi får: $\log_c(c) = k \cdot \ln c$. Da $\log_c(c) = 1$ giver dette os, at $k = \frac{1}{\ln c}$, hvormed det ønskede er bevist. ♥

Af sætning 1.1.9 fremgår, at det er nok med én logaritmetast på lommeregneren/grafregneren, nemlig en ln-tast. Herefter kan alle øvrige logaritmefunktioners værdier beregnes ud fra formlen i sætning 1.1.9. Vi har f.eks., at:

$$\log_2(x) = \frac{1}{\ln 2} \cdot \ln x = \frac{1}{0{,}69315} \cdot \ln x = 1{,}44270 \cdot \ln x$$

og

$$\log_{10}(x) = \frac{1}{\ln 10} \cdot \ln x = \frac{1}{2{,}30259} \cdot \ln x = 0{,}43429 \cdot \ln x$$

Vi får dermed f.eks., at $\log_2(5) = 1{,}44270 \cdot \ln 5 = 1{,}44270 \cdot 1{,}60944 = 2{,}32193$ og tilsvarende, at $\log_{10}(5) = \log(5) = 0{,}43429 \cdot \ln 5 = 0{,}69897$.

Imidlertid indeholder de fleste "matematiske" lommeregnere en speciel tast til både ln og log.

Øvelse 1.1.10.
Find ved hjælp af lommeregneren/grafregneren log og ln til hvert af følgende tal:
3,18 , 41869 , $4 \cdot 10^{33}$, $0{,}2 \cdot 10^{-17}$ og 10000. ♥

Øvelse 1.1.11.
Find værdien af følgende udtryk, når a = 28,6 og b = 231,4, dels ved først at indtaste udtrykket direkte i lommeregneren, dels ved at reducere mest muligt, og derefter udregne værdien:

a) $\dfrac{\ln\left(\frac{\sqrt[4]{b}}{a}\right) + \ln\left(\frac{a^2}{\sqrt{b}}\right) + \ln(b^3)}{\ln(a+b)}$ b) $\dfrac{3\left(\log(b^2) + \log(\frac{a}{b}) + \log(\sqrt[3]{a})\right)}{\log(a^4 \cdot b^3)}$ ♥

Oprindeligt blev logaritmefunktionen opfundet som et redskab til forenkling af beregninger. Denne forenkling fremkom, idet multiplikation erstattes af addition, division erstattes af subtraktion og roduddragning og potensopløftning erstattes af simpel division og multiplikation (jfr. sætning 1.1.6). Ved hjælp af en tabel kunne man således nemmere overkomme større beregninger. Denne beregningsforenkling, som foregik v.hj.a. titalslogaritmen log, har efter regnemaskinernes indførelse kun historisk interesse, og vi vil ikke komme nærmere ind herpå.

Logaritmiske skalaer:

Ved hjælp af logaritmefunktioner er det muligt at konstruere logaritmiske skalaer, og dermed også logaritmiske koordinatsystemer, hvor den ene eller begge akser er logaritmiske skalaer.
Logaritmiske skalaer og koordinatsystemer anvendes i en lang række sammenhænge (som det bl.a. vil fremgå af afsnit 1.5, 1.7 og kapitel 2). Logaritmiske skalaers styrke ligger bl.a. i, at de er velegnede som akser i koordinatsystemer, hvor der skal illustreres størrelser, som kan variere over et meget stort område, og i, at særlige typer af funktioner får et let genkendeligt udseende (rette linier) i logaritmiske koordinatsystemer. Men dette vender vi som omtalt tilbage til.

Hvordan definerer og konstruerer man så en logaritmisk skala ?

Definition 1.1.12.

Lad $\log_c$ være en voksende logaritmefunktion. Ved hjælp af denne fastlægges følgende:
Ved en logaritmisk skala forstås en tallinie (en skala), hvor der ud for hver tal t ikke anføres tallet t, men derimod det tal x, hvis logaritme er lig med t, dvs. $t = \log_c(x)$:

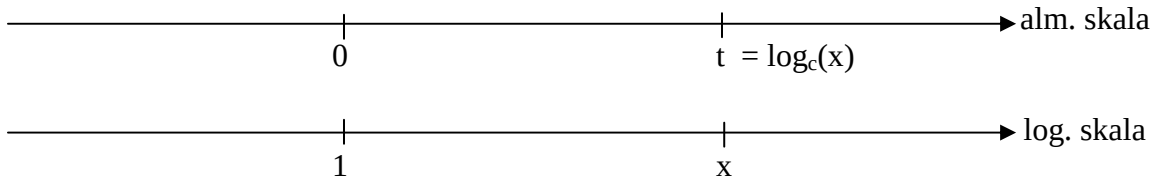


Fig. 1.1.4

Denne definition giver anledning til en række kommentarer, bl.a.:

- At det overhovedet er muligt at give denne definition skyldes, at $Vm(\log_c) = R$, så uanset værdien af t er det muligt at finde x, så $t = \log_c(x)$
- Da $\log_c$ er voksende – og dermed injektiv – har den en omvendt funktion $\log_c^{-1}$ (jfr. Appendix 2)
  Der gælder dermed: $t = \log_c(x) \Leftrightarrow x = \log_c^{-1}(t)$.
  Vi ser hermed, hvordan konstruktionen af den logaritmiske skala foregår:
  På en almindelig tallinie skriver vi blot $\log_c^{-1}(t)$ i stedet for t ud for ethvert tal t.
  $\log_c^{-1}(t)$ kan findes v.hj.a. lommeregneren/grafregneren (se nedenstående eksempel 1.1.18).
- Der findes ingen negative tal på en logaritmisk skala, idet $Dm(\log_c) = R_+ = Vm(\log_c^{-1})$.
- Da to vilkårlige logaritmefunktioner er proportionale (jfr. sætning 1.1.3 2)), er det i princippet uden betydning hvilken voksende logaritmefunktion man anvender til at konstruere den logaritmiske skala. Dette svarer blot til, at skalaen "kopieres op eller ned".

Sætning 1.1.13.

På en logaritmisk skala konstrueret v.hj.a. logaritmefunktionen $\log_c$ gælder, at for alle hele tal n er tallet c^n placeret, hvor n er placeret på den tilsvarende almindelige skala:

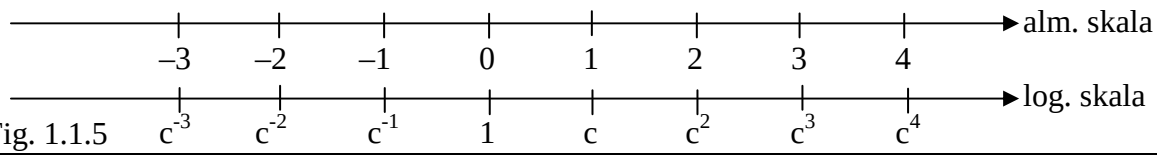


Fig. 1.1.5

Bevis: Beviset bygger på, at c er grundtal for $\log_c$ og dermed gælder: $\log_c(c^n) = n \cdot \log_c(c) = n \cdot 1 = n$, hvor sætning 1.1.6 pkt. 1) og 4) er anvendt. ♥

Øvelse 1.1.14.
Tegn figurer i stil med figur 1.1.5 for funktionerne: $\log_2$, $\log_5$ og log . Kommentér resultaterne. Prøv på hver af de tre skalaer at placere tallene 7 og 19. ♥

Sætning 1.1.15.

1) På en logaritmisk skala er den fysiske afstand mellem tallene $10 \cdot x$ og x lig med $\log_c(10)$. Dermed gælder specielt, at for alle hele tal n er den fysiske afstand mellem 10^n og 10^{n+1} den samme uanset værdien af n.
2) Lad x være et positivt tal og lad n være det mindste hele tal, som opfylder, at $10^n \geq x$. Da gælder, at på en logaritmisk skala er den fysiske afstand mellem x og 10^n lig med den fysiske afstand mellem 10x og 10^{n+1}

Bevis:
Den fysisk afstand mellem 10x og x er ifølge konstruktionen af den logaritmiske skala givet ved:
$\log_c(10x) - \log_c(x) = \log_c(10) + \log_c(x) - \log_c(x) = \log_c(10)$.
Den fysiske afstand mellem x og 10^n er givet ved: $\log_c(10^n) - \log_c(x) = n \cdot \log_c(10) - \log_c(x)$
og den fysiske afstand mellem 10x og 10^{n+1} er givet ved:
$\log_c(10^{n+1}) - \log_c(10x) = (n+1) \cdot \log_c(10) - (\log_c(10) + \log_c(x)) = n \cdot \log_c(10) - \log_c(x)$
hvormed de to størrelser altså er ens. Hermed er sætningen bevist. ♥

Eksempel 1.1.16.
På figur 1.1.6 er vist placeringen af 0,1, 1, 10, 100, 1000 og af 5,4 og 54 på en logaritmisk skala.

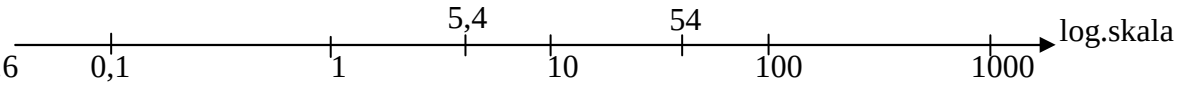


Fig. 1.1.6

Ifl. sætning 1.1.15 er "afsnittet" fra 10 til 100 inddelt på samme måde som afsnittet fra 1 til 10, som igen er inddelt på samme måde som afsnittet fra 0,1 til 1, osv. osv. F.eks. er afstanden fra 5,4 til 10 den samme som fra 54 til 100, som igen er den samme som afstanden mellem 540 og 1000.
Et sådant "afsnit" fra 1 til 10 kaldes en dekade. På figur 1.1.6 er der således medtaget 4 dekader.
På figur 1.1.7 ses dekaden fra 1 til 10 i "forstørret" version:

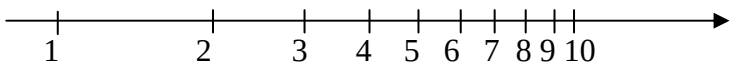


Fig. 1.1.7 ♥

Øvelse 1.1.17.
Tegn en logaritmisk skala uden delepunkter og tal på. Afsæt 5 punkter med lige stor afstand imellem sig – fordelt over skalaen.
a) Hvis der står 1000 og 10000 ved de to første punkter, hvad står der så ved resten ?
b) Hvis der står 1 og 10 ved de to sidste punkter, hvad står der så ved resten ?
c) Prøv at inddele et par af dekaderne på de to akser i pkt. a) og b). ♥

Eksempel 1.1.18.
I forlængelse af definition 1.1.12 blev det omtalt, at værdierne, der skal afsættes på en almindelig skala for at lave den om til en logaritmisk skala, dvs. $\log_c^{-1}(t)$ i stedet for t, kan findes v.hj.a. lomme/grafregneren. På de fleste matematiske lommeregnere findes som tidligere nævnt både log og ln. Og deres omvendte funktioner. Hvis vi koncentrerer os om ln-tasten, så vil den omvendte funktion almindeligvis være placeret "over" denne tast og kunne nås ved hjælp af en "2nd"-tast eller lign. Den omvendte funktion $\ln^{-1}$ betegnes også e^x (se afsnit 1.3).
Hvis vi f.eks. vil konstruere en logaritmisk skala v.hj.a. $\log_5$, så skal vi bruge værdier af $\log_5^{-1}$.
Disse kan findes på følgende måde: Ifølge sætning 1.1.9 har vi, at $\log_5(x) = \frac{1}{\ln 5} \cdot \ln x$. Heraf får vi, at $t = \log_5(x) \Leftrightarrow t = \frac{1}{\ln 5} \cdot \ln x \Leftrightarrow t \cdot \ln 5 = \ln x \Leftrightarrow x = \ln^{-1}(t \cdot \ln 5)$. Da vi desuden har, at $t = \log_5(x) \Leftrightarrow x = \log_5^{-1}(t)$ ser vi i alt, at $\log_5^{-1}(t) = \ln^{-1}(t \cdot \ln 5)$. Vi kan altså finde værdier for $\log_5^{-1}$ ved at anvende ln- og $\ln^{-1}$-tasterne på grafregneren.

Læseren kan som en øvelse prøve at finde følgende værdier: $\log_5^{-1}(-34)$, $\log_5^{-1}(3)$ og $\log_5^{-1}(100)$ ♥

1.2. Udvidelse af potensbegrebet.

I dette afsnit vil vi fastlægge betydningen af a^r for et vilkårligt positivt reelt tal a og et vilkårligt reelt tal r. (Vi vil altså fastlægge, hvad vi f.eks. skal forstå ved $5^{\sqrt{2}}$).

Eksempel 1.2.1.
Som et indledende eksempel vil vi se på fastlæggelsen af 2^r for $r \in R$.
Vi kender allerede betydningen af 2^n for $n \in Z$ (mængden af hele tal) og kan derfor bruge disse værdier som udgangspunkt. (Egentlig kender vi betydningen af 2^q for $q \in Q$ (mængden af rationale tal), men dette vil vi i første omgang se bort fra – og så lidt senere vende tilbage hertil).
I et koordinatsystem indtegnes punkterne $(n, 2^n)$ for $n \in Z$ (se figur 1.2.1 a)).

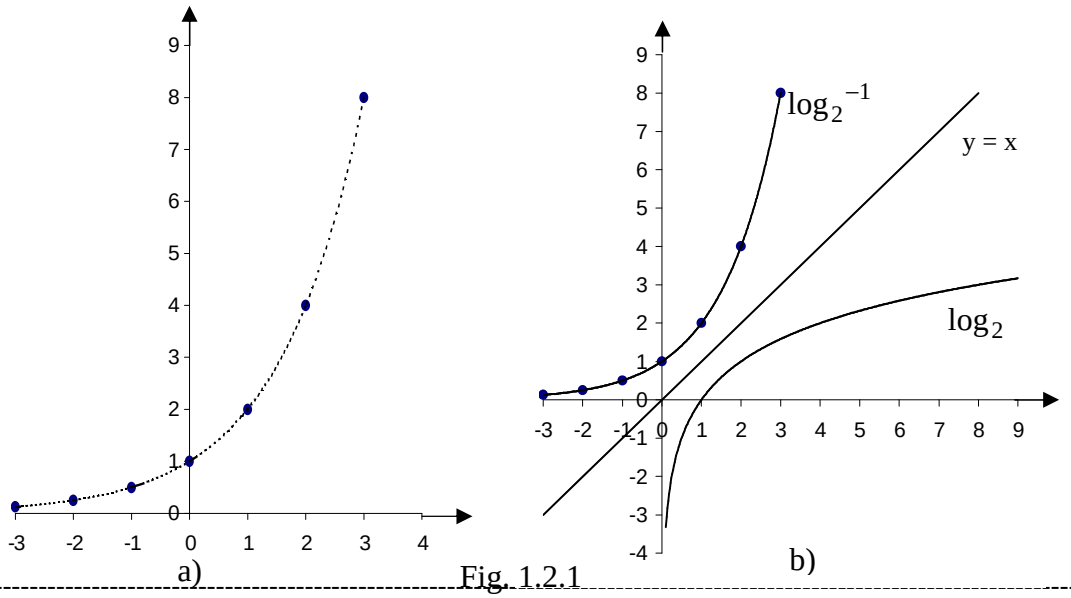


Fig. 1.2.1

Hvis disse punkter forbindes med en blød kurve (som antydet med den stiplede linie på figuren), så kan vi ud fra denne kurve definere, hvad vi skal forstå ved 2^r også når r ikke er et helt tal. Vi ser f.eks., at $2^{1,68}$ må fastlægges til en værdi omkring 3,25.
En definition som den netop skitserede er imidlertid for "løs", idet de givne punkter kan forbindes med en blød kurve på mange måder, og idet aflæsning ikke er præcist. Dette kan afhjælpes på følgende måde:
Som omtalt i afsnit 1.1 har funktionen $\log_2$ en omvendt funktion $\log_2^{-1}$. Ifølge sætning 1.1.6 gælder der for alle $n \in Z$, at: $\log_2(2^n) = n \cdot \log_2(2) = n$, hvoraf vi ser, at: $2^n = \log_2^{-1}(n)$.
Samtlige de givne punkter $(n, 2^n)$ ligger altså på grafen for $\log_2^{-1}$ (se figur 1..2.1 b)).
Da $\log_2^{-1}(r)$ er defineret for alle $r \in R$, idet $Dm(\log_2^{-1}) = Vm(\log_2) = R$, kan vi altså for alle $r \in R$ fastsætte, at: $2^r = \log_2^{-1}(r)$. Og da vi allerede ved, at denne fastsættelse stemmer overens med det kendte potensbegreb, idet vi ved, at: $2^n = \log_2^{-1}(n)$ for alle $n \in Z$, er der tale om en udvidelse af det almindelige potensbegreb. ♥

Inspireret af eksempel 1.2.1 giver vi følgende definition:

Definition 1.2.2.

For ethvert $a > 0$, $a \neq 1$, fastlægges værdien af a^r ud fra logaritmefunktionen $\log_a$ med grundtal a på følgende måde:

$$a^r = \log_a^{-1}(r) \quad \text{for} \quad r \in R$$

For $a = 1$ fastlægges, at $1^r = 1$ for alle $r \in R$.

Som omtalt i eksempel 1.2.1 er der for $a > 0$ tale om en udvidelse af det kendte potensbegreb, idet $\log_a(a^n) = n \cdot \log_a(a) = n$ for alle $n \in Z$, hvoraf vi ser, at: $a^n = \log_a^{-1}(n)$ for alle $n \in Z$, og idet $1^n = 1$.
Men bemærk, at selvom vi godt kan udregne f.eks. $(-2)^n$ for $n \in Z$, så findes der ingen udvidelse af dette potensbegreb. Udvidelsen forudsætter altså (som også nævnt), at a er et positivt tal.

For enhver værdi af a skal vi ifølge definition 1.2.2 have kendskab til den tilsvarende logaritmefunktion $\log_a$ og dennes omvendte funktion. Det bliver dermed lidt besværligt, hvis vi f.eks. skal fastlægge og udregne værdien af et udtryk som: $3{,}4^{\sqrt{5}} \cdot 0{,}62^{\pi} \cdot 4{,}1^{-0{,}23}$, idet dette da er givet ved: $\log_{3,4}^{-1}(\sqrt{5}) \cdot \log_{0,62}^{-1}(\pi) \cdot \log_{4,1}^{-1}(-0{,}23)$. Som det fremgår af den følgende sætning (og se også eksempel 1.1.18), kan vi imidlertid nøjes med at benytte én bestemt logaritmefunktion, nemlig ln.

Sætning 1.2.3.

For alle $a > 0$ og alle $r \in R$ gælder der:

1) $a^r = \ln^{-1}(r \cdot \ln a)$
2) $a^r = e^{r \cdot \ln a}$
3) $\ln(a^r) = r \cdot \ln a$

Bevis:
Ad 1): Ifølge sætning 1.1.9 gælder der følgende omskrivninger:

$$a^r = \log_a{}^{-1}(r) \Leftrightarrow r = \log_a(a^r) \Leftrightarrow r = \frac{1}{\ln a}\cdot\ln(a^r) \Leftrightarrow r\cdot\ln a = \ln(a^r) \Leftrightarrow a^r = \ln^{-1}(r\cdot\ln a)$$

For a = 1 har vi, at $\ln^{-1}(r\cdot\ln 1) = \ln^{-1}(0) = 1 = 1^r$, hvormed 1) er bevist i alle tilfælde.
Ad 2): Ud fra definition 1.2.2 ser vi, at $e^x = \ln^{-1}(x)$ for et vilkårligt tal x. Dette gælder specielt for $x = r\cdot\ln a$, hvormed vi ifl. pkt. 1) får det ønskede.
Ad 3): Da dette indgår som en del af omskrivningen i pkt. 1), er sætningen hermed bevist. ♥

Øvelse 1.2.4.
Vis, at regel 3) i sætning 1.2.3 gælder for en vilkårlig logaritmefunktion $\log_c$, dvs. at:
$\log_c(a^r) = r\cdot\log_c(a)$ for alle $a > 0$ og alle $r \in R$. ♥

Eksempel 1.2.5.
Som også omtalt i eksempel 1.1.18, findes der på de fleste matematiske lommeregnere taster til både ln og den omvendte funktion $\ln^{-1}$, der også betegnes med e^x (se afsnit 1.3).
Vi vil nu finde værdien af $3{,}4^{\sqrt{5}}\cdot 0{,}62^{\pi}\cdot 4{,}1^{-0{,}23}$ ved hjælp heraf. Vi har:

$$\begin{aligned} 3{,}4^{\sqrt{5}}\cdot 0{,}62^{\pi}\cdot 4{,}1^{-0{,}23} &= \ln^{-1}(\sqrt{5}\cdot\ln 3{,}4)\cdot\ln^{-1}(\pi\cdot\ln 0{,}62)\cdot\ln^{-1}(-0{,}23\cdot\ln 4{,}1) \\ &= \ln^{-1}(2{,}736445)\cdot\ln^{-1}(-1{,}501794)\cdot\ln^{-1}(-0{,}324527) \\ &= 15{,}432027\cdot 0{,}222730\cdot 0{,}722869 \\ &= 2{,}484631 \end{aligned}$$

Det skal bemærkes, at de fleste lommeregnere har en tast med benævnelsen y^x eller ^ , og at f.eks. $3{,}4^{\sqrt{5}}$ da kan udregnes ved direkte at taste: 3,4 y^x $\sqrt{5}$ eller 3,4 ^ $\sqrt{5}$. ♥

Øvelse 1.2.6.
Udregn værdien af følgende:

a) $\sqrt{3}^{\sqrt{3}}$ b) $20^{-1{,}11}\cdot\pi^{2{,}7}$ c) $\dfrac{0{,}6^{6{,}06}\cdot\sqrt{17}^{1{,}6}}{0{,}5^{0{,}4}}$ ♥

Det udvidede potensbegreb opfylder de samme regneregler som det sædvanlige potensbegreb, idet der gælder følgende sætning:

Sætning 1.2.7.

For alle $a, b \in R_+$, for alle $r, s \in R$ og alle $n \in N$ gælder:

1) $a^r\cdot a^s = a^{r+s}$ 2) $\dfrac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$ 3) $(a^r)^s = a^{r\cdot s}$ 4) $a^r\cdot b^r = (ab)^r$

5) $\dfrac{a^r}{b^r} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^r$ 6) $a^{-r} = \dfrac{1}{a^r}$ 7) $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$ 8) $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

Bevis:
Vi beviser regel 2) og 8). Beviserne for de øvrige regler forløber på helt samme måde og overlades til læseren som en øvelse:

Ad 2): Ifølge sætning 1.1.6 3) og sætning 1.2.3 3) har vi, at:

$$\ln\left(\frac{a^r}{a^s}\right) = \ln(a^r) - \ln(a^s) = r\cdot\ln(a) - s\cdot\ln(a) = (r-s)\cdot\ln(a) = \ln(a^{r-s})$$

Da ln er en injektiv funktion får vi heraf, at: $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$, hvormed det ønskede er bevist.

Ad 8): Ifølge sætning 1.1.6 5) og sætning 1.2.3 3) har vi, at: $\ln(\sqrt[n]{a}) = \frac{1}{n}\cdot\ln(a) = \ln(a^{\frac{1}{n}})$, og da ln er injektiv får vi heraf, at: $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$. Hermed er det ønskede bevist. ♥

Ifølge sætning 1.2.7 gælder der altså f.eks., at $2^{1,43}\cdot 2^{2,19} = 2^{3,62}$ og $(5,4^{1,6})^{2,47} = 5,4^{3,952}$.

Eksempel 1.2.8.
Som omtalt i indledningen til dette afsnit kendte vi faktisk til a^q , hvor q er et rationalt tal (dvs. q er en brøk mellem to hele tal), inden vi foretog den ovenfor gennemførte udvidelse af potensbegrebet. Hvis $q = \frac{m}{n}$, hvor $m \in Z$ og $n \in N$, så havde vi nemlig, at: $a^q = (\sqrt[n]{a})^m$.
Vi skal derfor nu kontrollere, at dette stemmer overens med det nye potensbegreb, så der som overskriften til afsnittet lyder er tale om en udvidelse af det kendte potensbegreb. Dette følger imidlertid umiddelbart af sætning 1.2.7 8) og 3), idet disse regler giver os, at: $(\sqrt[n]{a})^m = (a^{\frac{1}{n}})^m = a^{\frac{m}{n}} = a^q$. ♥

Vi afslutter afsnit 1.2 med at omtale, at sætning 1.2.3 og sætning 1.2.7 sammen med regnemaskinens ln- og $\ln^{-1}$-tast (dvs. ln- og e^x-tasten) kan benyttes til bl.a. løsning af ligninger:

Eksempel 1.2.9.
Vi vil i dette eksempel løse ligningerne:

a) $3^x = 2$ b) $2\cdot 3^{2x} - 3^x - 6 = 0$ c) $\log_5(x) = 4,2$

Ad a): Da ln er injektiv, har vi, at: $3^x = 2 \Leftrightarrow \ln(3^x) = \ln 2 \Leftrightarrow x\cdot\ln 3 = \ln 2 \Leftrightarrow x = \frac{\ln 2}{\ln 3}$

Løsningen er altså: $x = \frac{\ln 2}{\ln 3} = 0,63093$

Ad b): Da $3^{2x} = (3^x)^2$, skal vi løse ligningen: $2\cdot(3^x)^2 - 3^x - 6 = 0$. Hvis vi sætter $3^x = y$, så er problemet reduceret til at løse ligningen: $2\cdot y^2 - y - 6 = 0$. Denne andengradsligning har løsningen: $y = 2 \vee y = -\frac{3}{2}$, hvormed vi ser, at:

$$2\cdot(3^x)^2 - 3^x - 6 = 0 \Leftrightarrow 3^x = 2 \vee 3^x = -\frac{3}{2}$$

Da $3^x = \ln^{-1}(x \cdot \ln 3)$, og da $Vm(\ln^{-1}) = Dm(\ln) = R_+$, ser vi, at $3^x > 0$ uanset værdien af x. Ligningen $3^x = -\frac{3}{2}$ har således ingen løsning. Vi ser dermed (jfr. pkt. a)), at løsningen er: $x = \frac{\ln 2}{\ln 3}$.

Ad c): Da $\log_5(x) = \frac{1}{\ln 5} \cdot \ln x$ ser vi, at:

$$\log_5(x) = 4{,}2 \Leftrightarrow \frac{1}{\ln 5} \cdot \ln x = 4{,}2 \Leftrightarrow \ln x = 4{,}2 \cdot \ln 5 \Leftrightarrow x = \ln^{-1}(4{,}2 \cdot \ln 5)$$

Løsningen x findes herefter v.hj.a. regnemaskinen ved først at udregne: $4{,}2 \cdot \ln 5 = 6{,}75964$, hvorefter $x = \ln^{-1}(6{,}75964) = e^{6{,}75964} = 862{,}33$ findes ved anvendelse af e^x-tasten. ♥

Øvelse 1.2.10.

Løs følgende ligninger:

a) $\log_3(2x) = 7{,}3$ b) $5 \ln x = \ln(5x)$ c) $\frac{4^x + 7}{4^x} = 3 \cdot 4^x$ ♥

1.3. Eksponentialfunktioner.

På baggrund af definition 1.2.2 er vi nu i stand til at anføre følgende definition:

Definition 1.3.1.

Ved en eksponentialfunktion forstår vi en omvendt funktion til en logaritmefunktion, dvs. en eksponentialfunktion er en funktion f af typen: $f(x) = a^x$
hvor $a > 0$, $a \neq 1$. (a er grundtallet for den tilsvarende logaritmefunktion).

Eksponentialfunktionerne e^x, 2^x og 10^x er altså de omvendte funktioner til hhv. ln, $\log_2$ og log. Eksponentialfunktionen e^x kaldes den naturlige eksponentialfunktion (eller undertiden blot: eksponentialfunktionen). Funktionen 1^x (som er konstant lig med 1) er ikke en eksponentialfunktion.

Ud fra definition 1.3.1 og afsnit 1.2 kan vi direkte opskrive den række egenskaber, som er indeholdt i følgende sætning:

Sætning 1.3.2.

For en eksponentialfunktion a^x gælder:
1) $Dm(a^x) = R$ og $Vm(a^x) = R_+$
2) $a^x = e^{x \ln a}$
3) $\ln(a^x) = x \cdot \ln a$
4) $a^{x_1+x_2} = a^{x_1} \cdot a^{x_2}$
5) $a^{-x} = (a^{-1})^x = (\frac{1}{a})^x = \frac{1}{a^x}$
6) a^x er voksende, hvis $a > 1$
   a^x er aftagende, hvis $0 < a < 1$
7) Hvis $a > 1$ gælder: $a^x \to \infty$ for $x \to \infty$ og $a^x \to 0$ for $x \to -\infty$
   Hvis $a < 1$ gælder: $a^x \to 0$ for $x \to \infty$ og $a^x \to \infty$ for $x \to -\infty$

For den naturlige eksponentialfunktion gælder specielt:
8) e^x er voksende
9) $e^x \to \infty$ for $x \to \infty$ og $e^x \to 0$ for $x \to -\infty$
   $e^{-x} \to 0$ for $x \to \infty$ og $e^{-x} \to \infty$ for $x \to -\infty$

Bevis:
Læseren opfordres til at udfylde detaljerne i det følgende:
Ad 1): Dette følger af definitionen på en omvendt funktion (jfr. appendix 2), samt af definition 1.1.1 og definition 1.3.1.
Ad 2): Følger af sætning 1.2.3 2).
Ad 3): Følger af sætning 1.2.3 3).
Ad 4): Følger af sætning 1.2.7 1).
Ad 5): Følger af sætning 1.2.7 3) og 6).
Ad 6): Følger af sætning 1.1.8, definition 1.3.1 og sætning A.2.12 (se appendix A2).

Ad 7): For a > 1 læses sætningen: "a^x går imod uendelig for x gående mod uendelig" hhv. "a^x går mod nul for x gående mod minus uendelig". Og det betyder, at a^x kan blive lige så stor, som vi måtte ønske det, blot x er tilstrækkelig stor, hhv. at a^x kan komme lige så tæt på 0, som vi måtte ønske det (dog uden nogensinde at blive 0), når blot x er tilstrækkelig stor negativ.
Og tilsvarende for a < 1.
Beviset følger direkte af 1) og 6) i denne sætning.
Ad 8): Følger direkte af 6) i denne sætning, idet e > 1.
Ad 9): Følger direkte af 7) og 5) i denne sætning, idet e > 1 og $\frac{1}{e} < 1$.

Hermed er sætningen bevist. ♥

Bemærk, at regnereglen i 4) i sætning 1.3.2 siger, at en eksponentialfunktion af en sum af tal er produktet af eksponentialfunktionen af de enkelte tal. Dette er den "modsatte" regel af regnereglen i definition 1.1.1 (dvs. af regel 2) i sætning 1.1.6) der siger, at logaritmen af et produkt af tal er summen af logaritmerne til de enkelte tal. Bemærk desuden, at enhver eksponentialfunktion går igennem punktet (0,1) og (1,a), idet $a^0 = 1$ og $a^1 = a$

V.hj.a. de i afsnit 1.2 omtalte regnemaskinetaster kan vi udregne funktionsværdier for forskellige eksponentialfunktioner og derefter tegne graferne. På figur 1.3.1 ses graferne for eksponentialfunktionerne: e^x, 2^x og $(\frac{1}{2})^x$:

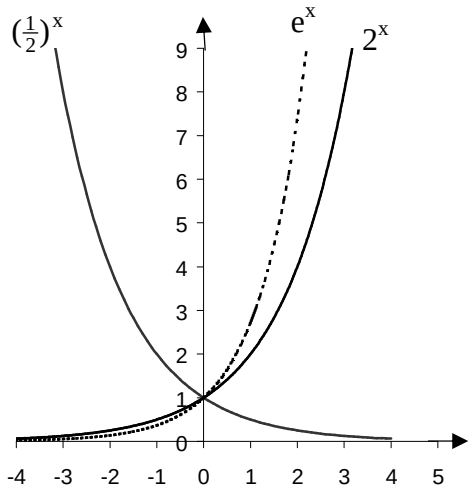


Fig. 1.3.1

Øvelse 1.3.3.
Overvej/Gør rede for, at funktionerne på figur 1.3.1 er eksempler på opfyldelse af pkt. 6), 7), 8) og 9) i sætning 1.3.2. ♥

Øvelse 1.3.4.
Tegn graferne for funktionerne $(\frac{3}{2})^x$ og $(\frac{2}{3})^x$ i samme koordinatsystem.
Gør rede for, at de to grafer er symmetriske omkring andenaksen. ♥

Øvelse 1.3.5.
Løs ligningerne: a) $e^x = 4$ b) $e^x = e^{-x}$ c) $4^{7x} = 9$ d) $3 \cdot 1{,}5^x = 5 \cdot 0{,}8^x$ ♥

Øvelse 1.3.6.
Bestem i hvert af følgende tilfælde tallet a, så der for alle x gælder:
a) $a^x = e^{-3x}$ b) $a^x = e^{0,5x}$ ♥

Da funktionerne ln og e^x begge er voksende funktioner, gælder der (overvej !), at

$$\ln(x) < c \iff 0 < x < e^c \quad \text{og} \quad a^x < b \iff x \cdot \ln(a) < \ln(b)$$

hvor a, b og c er givne tal (a > 0, b > 0). Bemærk, at i den første ulighed er x > 0, idet Dm(ln) = R_+. Dette kan bruges til at løse uligheder, hvori der optræder logaritme- eller eksponentialfunktioner.

Eksempel 1.3.7.
a) Uligheden: $\log_3 x < 1,8$ har løsningsmængden] 0 ; 7,225 [, idet vi har:

$$\log_3 x < 1,8 \iff \frac{1}{\ln 3} \cdot \ln x < 1,8 \iff \ln x < 1,8 \cdot \ln 3 \iff 0 < x < e^{1,8 \cdot \ln 3} \iff 0 < x < 7,225$$

b) Uligheden: $0,4^x > 7$ har løsningsmængden] $-\infty$; – 2,124 [, idet vi har:

$$0,4^x > 7 \iff \ln(0,4^x) > \ln 7 \iff x \cdot \ln(0,4) > \ln 7 \iff x < \frac{\ln 7}{\ln 0,4} \iff x < -2,124$$

hvor vi har anvendt, at $\ln(0,4) < 0$. ♥

Øvelse 1.3.8.
Løs uligheder:
a) $\ln x < 1,92$ b) $e^{2x} > 15$ c) $\log_2(x) + \log(x) > 20$ d) $3^{-3x} > \ln 3$ ♥

Afslutningsvist skal det bemærkes, at der også i forbindelse med eksponentialfunktioner anvendes forskellig symbolik i litteraturen. Den naturlige eksponentialfunktion e^x skrives undertiden: exp(x), (hvilket kan være en typografisk fordel, hvis man skal angive eksponentialfunktionen af et "stort" udtryk).
I lighed med logaritmefunktioner anvendes undertiden udtrykket $\exp_a(x)$ for a^x. Og tallet a kaldes da også grundtallet for eksponentialfunktionen. Vi har altså:

$$\exp_a(x) = a^x \quad \text{og} \quad \exp_e(x) = \exp(x) = e^x$$

Med denne notation kan reglerne 2), 3), 4) og 5) i sætning 1.3.2 anføres på følgende måde:

- $\exp_a(x) = \exp(x \cdot \ln a)$
- $\ln(\exp_a(x)) = x \cdot \ln a$
- $\exp_a(x_1 + x_2) = \exp_a(x_1) \cdot \exp_a(x_2)$
- $\exp_a(-x) = \frac{1}{\exp_a(x)}$

1.4. Eksponentielle vækstfunktioner.

Definition 1.4.1.

Ved en eksponentiel vækstfunktion forstås en funktion af typen:

$$f(x) = b \cdot a^x \quad \text{eller} \quad f(x) = b \cdot e^{kx}$$

hvor a, b og k er konstanter. ($b > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$, $k \neq 0$).

I definitionen kræves, at $a \neq 1$ og $k \neq 0$, idet funktionen ellers er konstant. At b forudsættes positiv – og ikke kun forskellig fra nul – er i realiteten ingen indskrænkning, for i praktiske anvendelser er b oftest positiv, og selv om funktionsværdierne skulle være negative, så betragter vi blot de numeriske funktionsværdier. (Vi ser altså f.eks. på gæld i stedet for på negativ formue).

En eksponentiel vækstfunktion kaldes undertiden også for en eksponentiel udvikling eller en funktion, der er proportional med en eksponentialfunktion. Hvis man ved, at funktionen er voksende, taler man også om en eksponentielt voksende funktion, og hvis man ved, at den er aftagende, taler man om en eksponentielt aftagende funktion.

Der gælder, at $b \cdot a^x = b \cdot e^{kx}$ for alle x, hvis $a = e^k$ eller $k = \ln a$ (overvej !).
En eksponentiel vækstfunktion er altså blot en eksponentialfunktion, der er multipliceret med en konstant, (hvilket er årsagen til et af de alternative navne anført ovenfor).
De to skrivemåder $b \cdot a^x$ og $b \cdot e^{kx}$ anvendes frit efter behov, idet det i nogle sammenhænge er smartest – eller sædvane – at bruge $b \cdot a^x$, og i andre sammenhænge er det smartest – eller sædvane – at bruge $b \cdot e^{kx}$.
Bemærk, at da $a^0 = 1$ og $e^{k \cdot 0} = 1$, så er $b = f(0)$.
I alt kan vi konkludere, at grafen for en eksponentiel vækstfunktion ligner grafen for en eksponentialfunktion, idet alle funktionsværdier på grafen over en eksponentialfunktion a^x ganges med en konstant b (dvs. afstanden fra grafpunktet til førsteaksen bliver b gange så stor ved den eksponentielle vækstfunktion som ved den tilsvarende eksponentialfunktion).

Øvelse 1.4.2.

Tegn/Skitser graferne for funktionerne $f(x) = 5 \cdot e^x$, $g(x) = 0{,}3 \cdot 2^x$ og $h(x) = 200 \cdot (\frac{1}{2})^x$ i hvert sit koordinatsystem. (Jfr. figur 1.3.1) ♥

Da en eksponentiel vækstfunktion er bestemt ved værdien af to konstanter (b og a hhv. b og k), kan funktionsforskriften for en eksponentiel vækstfunktion fastlægges, blot vi kender to punkter på dens graf. Et eksempel på dette vises i det følgende:

Eksempel 1.4.3.

Om en eksponentiel vækstfunktion $f(x) = b\cdot a^x$ gælder, at $f(1,2) = 8$ og $f(9) = 52$. Vi vil bestemme værdierne af a og b.

$f(1,2) = 8$ giver os, at $8 = b\cdot a^{1,2}$, og $f(9) = 52$ giver os, at $52 = b\cdot a^9$.

Vi har således to ligninger med to ubekendte (a og b), og disse ligninger kan løses ved substitutionsmetoden:

Af $8 = b\cdot a^{1,2}$ ses, at: $b = \frac{8}{a^{1,2}}$.

Dette indsættes i udtrykket: $52 = b\cdot a^9$, hvormed vi får:

$$52 = \frac{8}{a^{1,2}}\cdot a^9 \Leftrightarrow \frac{52}{8} = a^{9-1,2} \Leftrightarrow$$
$$\ln(6,5) = 7,8\cdot \ln a \Leftrightarrow$$
$$\ln a = 0,23997 \Leftrightarrow$$
$$a = e^{0,23997}$$

Vi ser altså, at $a = 1,27122$. Denne værdi indsættes i udtrykket $b = \frac{8}{a^{1,2}}$, hvormed vi får:

$b = 5,99828$.

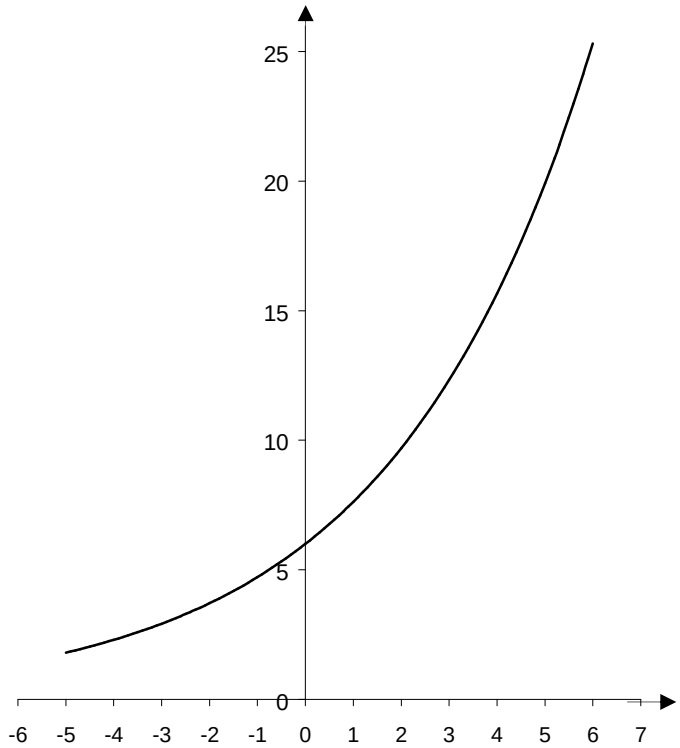


Fig. 1.4.1

Vi ser dermed, at $f(x) = 5,99828\cdot 1,27122^x$. Grafen for f er vist på figur 1.4.1.

Det skal bemærkes, at udregningen af a også kan foregå ved at sige, at da $8 = b\cdot a^{1,2}$ og $52 = b\cdot a^9$, så får vi, at $\frac{52}{8} = \frac{b\cdot a^9}{b\cdot a^{1,2}} = \frac{a^9}{a^{1,2}} = a^{9-1,2} = a^{7,8}$, hvorefter der kan fortsættes som ovenfor.

Vi kan imidlertid også fortsætte beregningen på følgende måde (jfr. regnereglerne i sætning 1.2.7):

$$\frac{52}{8} = a^{7,8} \Leftrightarrow \left(\frac{52}{8}\right)^{\frac{1}{7,8}} = (a^{7,8})^{\frac{1}{7,8}} \Leftrightarrow a = \left(\frac{52}{8}\right)^{\frac{1}{7,8}} \Leftrightarrow a = 1,27122$$

hvorefter b findes ud fra, at $b = \frac{8}{a^{1,2}}$.

Endelig skal det bemærkes, at selvom rodtegnet $\sqrt[s]{t}$ egentlig kun er defineret for positive hele tal s, så tillader man sig at skrive f.eks. $\sqrt[7,8]{\frac{52}{8}}$ i stedet for $\left(\frac{52}{8}\right)^{\frac{1}{7,8}}$. Ved anvendelse af lommeregnerens (grafregnerens) funktion $\sqrt[x]{\ }$ er det nemlig muligt at indtaste og få udregnet sådanne størrelser. ♥

Situationen i eksempel 1.4.3 kan generaliseres til følgende sætning:

Sætning 1.4.4.

Hvis det om en eksponentiel vækstfunktion $f(x) = b \cdot a^x$ gælder, at grafen går igennem punkterne (x_1, y_1) og (x_2, y_2) (dvs. hvis $f(x_1) = y_1$ og $f(x_2) = y_2$), så er konstanterne a og b givet ved:

$$a = \left(\frac{y_2}{y_1}\right)^{\frac{1}{x_2 - x_1}} = \sqrt[x_2 - x_1]{\frac{y_2}{y_1}} = \exp\left(\frac{\ln y_2 - \ln y_1}{x_2 - x_1}\right) \qquad \text{og} \qquad b = \frac{y_1}{a^{x_1}}$$

Bevis:

Af forudsætningerne følger, at $y_1 = b \cdot a^{x_1}$ og $y_2 = b \cdot a^{x_2}$. Dette giver os:

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{b \cdot a^{x_2}}{b \cdot a^{x_1}} = \frac{a^{x_2}}{a^{x_1}} = a^{x_2 - x_1} \qquad \text{og dermed } a = \left(\frac{y_2}{y_1}\right)^{\frac{1}{x_2 - x_1}} = \sqrt[x_2 - x_1]{\frac{y_2}{y_1}}$$

hvor det sidste lighedstegn følger af, at vi – som omtalt i eksempel 1.4.3 – har tilladt os at anvende rodtegnet selv om $x_2 - x_1$ ikke er et positivt, helt tal. (Vi minder om reglen: $s^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{s}$)
Det sidste udtryk for a kommer af følgende omskrivning:

$$\frac{y_2}{y_1} = a^{x_2 - x_1} \iff \ln\left(\frac{y_2}{y_1}\right) = (x_2 - x_1) \cdot \ln a \iff \frac{\ln y_2 - \ln y_1}{x_2 - x_1} = \ln a \iff a = \exp\left(\frac{\ln y_2 - \ln y_1}{x_2 - x_1}\right)$$

Udtrykket for b kommer ved simpel division med a^{x_1} i udtrykket: $y_1 = b \cdot a^{x_1}$. ♥

Øvelse 1.4.5.

a) En eksponentiel vækstfunktion $H(t) = q \cdot p^t$ går igennem punkterne (2.1 , 8) og (5, 53). Bestem forskriften for H – og tegn/skitser grafen for H.

b) En eksponentielt aftagende funktion $g(x) = b \cdot e^{kx}$ opfylder, at g(–2) = 180 og g(3,6) = 11. Bestem værdien af konstanterne b og k – og tegn/skitser grafen for g. ♥

I forbindelse med monotoni gælder der følgende sætning, som følger direkte af sætning 1.3.2 6), definition 1.4.1 og det faktum, at k = ln a (Overvej detaljerne !):

Sætning 1.4.6.

Om en eksponentiel vækstfunktion $f(x) = b \cdot a^x$ gælder, at:

- f er voksende, hvis $a > 1$
- f er aftagende, hvis $0 < a < 1$

Om en eksponentiel vækstfunktion $f(x) = b \cdot e^{kx}$ gælder, at

- f er voksende, hvis $k > 0$
- f er aftagende, hvis $k < 0$

Øvelse 1.4.7.

a) Skitser graferne for funktionerne:

$$f(x) = 300 \cdot e^{-0,48x} \quad \text{og} \quad g(x) = 210 \cdot e^{0,75x}$$

i samme koordinatsystem.

b) Løs ved beregning ligningen: $f(x) = g(x)$

c) Find tallene b og c som opfylder, at $f(x) = 300 \cdot b^x$ og $g(x) = 210 \cdot c^x$ ♥

Relativ funktionstilvækst.

Vi vil nu gå over til at undersøge en interessant og vigtig egenskab ved eksponentielle vækstfunktioner, nemlig deres relative funktionstilvækst. Først anføres et eksempel, som ikke har noget med eksponentielle vækstfunktioner at gøre, men hvor begrebet relativ funktionstilvækst introduceres.

Eksempel 1.4.8.

I en planteskole følger man højden af et bestemt æbletræ, som bygger på en særlig podning.
I den følgende tabel ses træets højde målt d. 1. juli i hvert af de angivne år:

Årstal	2000	2001	2002	2003
Højde	2,00 m	2,30 m	2,50m	2,65 m

Hvis vi går frem fra år 2000 til år 2002, så ser vi, at den absolutte tilvækst i højden er 2,50 – 2,00 m, dvs. 0,50 m. Den relative tilvækst af højden findes ved at beregne den absolutte tilvækst i forhold til den oprindelige værdi, altså: $\frac{0,50}{2,00} = 0,25$ – eller hvis vi ønsker den relative tilvækst i procent: 25 %

Tilsvarende er den absolutte tilvækst fra år 2001 til 2003 givet ved: 0,35 m og den relative tilvækst er 0,1522 (eller: 15,22 %).

Hvis vi lader h være den funktion, der til et givet årstal angiver træets højde, så er de ovenstående relative tilvækster udregnet som:

$$0,25 = \frac{2,50-2,00}{2,00} = \frac{h(2002)-h(2000)}{h(2000)} \quad \text{og} \quad 0,1522 = \frac{2,65-2,30}{2,30} = \frac{h(2003)-h(2001)}{h(2001)}$$

De relative tilvækster kan dermed siges at være relative funktionstilvækster for funktionen h. ♥

Som anført i eksempel 1.4.8 findes den relative funktionstilvækst for en funktion f, når dens uafhængige variable ændres fra x_1 til x_2, som værdien af brøken:

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{f(x_1)} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{f(x_1)} \cdot 100\ \%$$

hvor det sidste udtryk giver tilvæksten i %.

Hvis tilvæksten i den uafhængige variable kaldes h, og hvis startværdien kaldes x, så er den relative funktionstilvækst altså givet ved:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{f(x)} = \frac{f(x+h)-f(x)}{f(x)} \cdot 100\ \%$$

Da tilvæksten i den uafhængige variable er en størrelse, der almindeligvis har interesse, vil vi i det følgende benytte det sidst anførte beregningsudtryk.

Vi ser (jfr. også den nedenstående figur 1.4.2), at hvis tilvæksten h i den uafhængige variable er positiv (dvs. hvis vi går fremad på1.aksen), så er den relative funktionstilvækst positiv for en voksende funktion og negativ for en aftagende funktion.

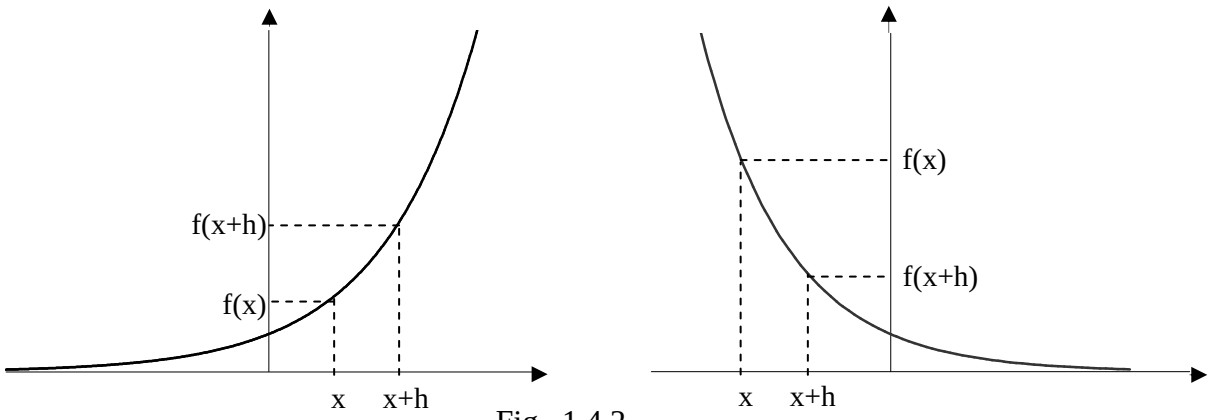


Fig. 1.4.2

I forbindelse med eksponentielle vækstfunktioner og relative funktionstilvækster gælder der nu:

Sætning 1.4.9.

- For en eksponentiel vækstfunktion gælder, at der til en given absolut tilvækst i den uafhængige variable svarer en bestemt relativ (procentuel) tilvækst i den afhængige variable – uanset udgangspunktet for tilvæksten.

Eller mere formelagtigt udtryk:

- Lad $f(x) = b \cdot a^x$ være en eksponentiel vækstfunktion.
  For enhver værdi af tilvæksten h findes en konstant K_h , så $\frac{f(x+h)-f(x)}{f(x)} = K_h$,
  dvs. den relative funktionstilvækst afhænger ikke af udgangspunktet x, men kun af tilvæksten h.
- Der gælder: $K_h = a^h - 1$

Bevis:
Ud fra forudsætningerne og sætning 1.3.2 ses, at:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{f(x)} = \frac{b \cdot a^{x+h} - b \cdot a^x}{b \cdot a^x} = \frac{b \cdot a^x \cdot a^h - b \cdot a^x}{b \cdot a^x} = a^h - 1$$

Heraf ses, at den relative (procentuelle) funktionstilvækst ikke afhænger af x, og at $K_h = a^h - 1$ ♥

Eksempel 1.4.10.

a) Den relative funktionstilvækst for funktionen $f(x) = 5 \cdot 1{,}6^x$ svarende til den absolutte tilvækst $h = 0{,}5$ er ifølge sætning 1.4.9 givet ved: $1{,}6^{0,5} - 1 = 0{,}2649$ (eller 26,49 %).

Svarende til tilvæksten $h = 2{,}1$ er den: $1{,}6^{2,1} - 1 = 1{,}683$ (eller 168,3 %)

Og svarende til $h = -0{,}8$ er den: $1{,}6^{-0,8} - 1 = -0{,}3134$ (eller –31,34 %)

b) Den relative funktionstilvækst for funktionen $g(x) = 8000 \cdot 0{,}9^x$ svarende til tilvæksten $h = 1{,}2$ er: $0{,}9^{1,2} - 1 = -0{,}1188$ (eller –11,88 %).

c) Hvis vi skal bestemme den relative funktionstilvækst for funktionen $p(x) = 32 \cdot e^{-0,4x}$ svarende til tilvæksten $h = 1{,}8$, så kan vi enten udregne værdien af udtrykket $\frac{p(x+1{,}8)-p(x)}{p(x)}$, eller vi kan sige: $p(x) = 32 \cdot a^x$, hvor $a = e^{-0,4} = 0{,}6703$, hvormed resultatet bliver: $0{,}6703^{1,8} - 1 = -0{,}5132$ (eller –51,32 %). ♥

Eksponentielle vækstfunktioner er i øvrigt de eneste funktioner, der har konstant relativ tilvækst. Der gælder nemlig følgende sætning, som ikke kan bevises her, men som vil blive bevist i kapitel 3. Læsere, der endnu ikke er bekendt med begrebet differentiabilitet, kan blot springe sætningen over.

Sætning 1.4.11.

Hvis det om en positiv, ikke-konstant, differentiabel funktion f defineret i et interval I gælder, at for en vilkårligt valgt værdi af tilvæksten h er den relative funktionstilvækst $\frac{f(x+h)-f(x)}{f(x)}$ konstant (dvs. uafhængig af x), så er f en eksponentiel vækstfunktion.

Fremskrivningsfaktorer.

Hvis $f(x) = b \cdot a^x$ og hvis h er en given absolut tilvækst, så gælder der for alle x, at:

$$f(x+h) = b \cdot a^{x+h} = b \cdot a^x \cdot a^h = f(x) \cdot a^h \quad \text{dvs.} \quad f(x+h) = a^h \cdot f(x)$$

Størrelsen a^h angiver altså, hvor mange gange større funktionsværdien bliver, når den uafhængige variable gives en tilvækst på h.
Størrelsen a^h kaldes vækstfaktoren eller fremskrivningsfaktoren svarende til tilvæksten h.

Vi ser specielt, at: $f(x+1) = a \cdot f(x)$, dvs. at tallet a i funktionsforskriften $f(x) = b \cdot a^x$ er fremskrivningsfaktoren svarende til tilvæksten 1. a kaldes undertiden blot for fremskrivningsfaktoren for f. Den relative funktionstilvækst svarende til en tilvækst på 1 enhed er ifølge sætning 1.4.9 givet ved: $a^1 - 1 = a - 1$. Denne størrelse betegnes ofte med r og kaldes vækstraten (eller rentefoden) for funktionen. Vi har altså: $r = a - 1$, eller: $a = 1 + r$, og dermed, at:

$$f(x) = b \cdot a^x = b \cdot (1+r)^x$$

Bemærk, at r er positiv for en eksponentielt voksende funktion og negativ for en eksponentielt aftagende funktion, idet der gælder: $a > 1 \Leftrightarrow r > 0$ og $0 < a < 1 \Leftrightarrow -1 < r < 0$. (Jfr. sætning 1.4.6).

Øvelse 1.4.12.
Bestem vækstraten (og den tilsvarende procentuelle vækst pr. enhed) for hver af de følgende seks eksponentielle vækstfunktioner:

a) $f(x) = 210 \cdot 1{,}24^x$ b) $f(x) = 0{,}85 \cdot 1{,}78^x$ c) $f(x) = 3000 \cdot 2{,}1^x$

d) $f(x) = 124 \cdot 0{,}94^x$ e) $f(x) = 58 \cdot 0{,}58^x$ f) $f(x) = 900 \cdot e^{-1{,}3x}$ ♥

Hvis vi har en størrelse S, som forandres med en bestemt procent P pr. enhed, så kan denne størrelse beskrives ved en eksponentiel vækstfunktion $S(x) = b \cdot a^x$.
Da

$$S(x+1) = S(x) + (P\ \%\ \text{af}\ S(x)) = S(x) + \frac{P}{100} \cdot S(x) = (1 + \frac{P}{100}) \cdot S(x)$$

ser vi, at vækstraten for funktionen er $\frac{P}{100}$, og at fremskrivningsfaktoren a svarende til tilvæksten 1 er $a = 1 + \frac{P}{100}$. Da $b = S(0)$ får vi dermed i alt, at:

$$\boxed{S(x) = S(0) \cdot (1 + \frac{P}{100})^x}$$

Bemærk, at det afhænger af den konkrete situation, om formlen gælder for alle x-værdier i et interval I eller f.eks. kun for alle heltallige x-værdier. Og hvis formlen skal gælde for alle $x \in I$, så skal størrelsen S(x) være defineret for alle $x \in I$, ligesom omskrivningen skal gælde for ethvert $x \in I$ (altså uanset udgangspunktet).
Disse resultater benyttes meget i diverse matematiske modeller, hvori eksponentielle vækstfunktioner indgår, herunder rentesregning (se kapitel 2 og 4).

Øvelse 1.4.13.
Om en given størrelse vides, at den vokser med 16 % pr. tidsenhed, og at dens værdi er 23 efter de første 8 tidsenheder. Bestem en forskrift for en funktion, som kan beskrive størrelsens udvikling. ♥

Halverings- og fordoblingskonstanter.

Hvis K er en given relativ funktionstilvækst for en eksponentiel vækstfunktion $f(x) = b \cdot a^x$, så er værdien af den tilvækst h, der svarer hertil, fastlagt ved: $a^h - 1 = K$ (jfr. sætning 1.4.9). Heraf ser vi, at:

$$\boxed{h = \frac{\ln(1+K)}{\ln a}}$$

Øvelse 1.4.14.
Bestem i hvert af følgende tilfælde den absolutte tilvækst af den uafhængige variable, der skal til for at give en eksponentiel vækstfunktion med fremskrivningsfaktoren a en relativ tilvækst K:

a) $a = 0{,}8$ og $K = -0{,}30$ b) $a = 1{,}68$ og $K = 1{,}22$

c) $a = 2{,}3$ og $K = 72\ \%$ d) $a = 0{,}97$ og $K = -50\ \%$ ♥

Ofte er man interesseret i at angive den værdi af tilvæksten h, som giver en fordobling af funktionsværdierne (når f er voksende) eller en halvering af funktionsværdierne (når f er aftagende).

Fordobling: En fordobling svarer til en forøgelse på 100 %, hvormed K = 100 % = 1 i det ovenstående udtryk – og vi får: $h = \frac{\ln(1+1)}{\ln a} = \frac{\ln 2}{\ln a}$. For denne værdi af h har vi, at: $f(x+h) = 2 \cdot f(x)$.

Halvering: En halvering svarer til en formindskelse på 50 %, dvs. en tilvækst på –50 %, hvormed K = –50 % = $-\frac{1}{2}$ i det ovenstående udtryk – og vi får: $h = \frac{\ln(1-\frac{1}{2})}{\ln a} = \frac{\ln(\frac{1}{2})}{\ln a}$. For denne værdi af h har vi: $f(x+h) = \frac{1}{2} \cdot f(x)$.

I denne forbindelse giver vi dels følgende definition, dels har vi vist den derefter følgende sætning:

Definition 1.4.15.

Den tilvækst T_2, som giver en eksponentielt voksende funktion en fordobling af funktionsværdierne (dvs. en relativ funktionstilvækst på 100 %), kaldes fordoblingskonstanten for funktionen.
Den tilvækst $T_{½}$, som giver en eksponentielt aftagende funktion en halvering af funktionsværdierne (dvs. en relativ funktionstilvækst på –50%), kaldes halveringskonstanten for funktionen.

Ofte er tiden den uafhængige variable, og vi taler da om fordoblingstiden eller halveringstiden.

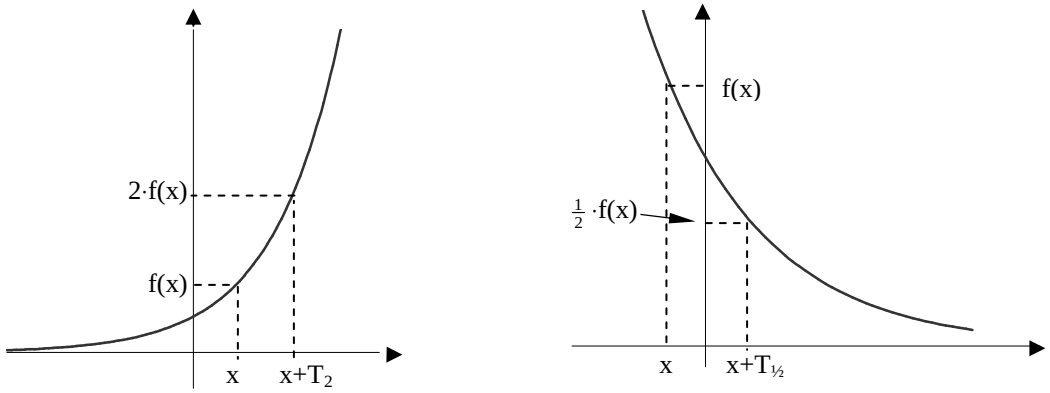


Fig. 1.4.3

Sætning 1.4.16.

For en eksponentielt voksende funktion $f(x) = b \cdot a^x$ gælder:

$f(x + T_2) = 2 \cdot f(x)$ og $T_2 = \frac{\ln 2}{\ln a}$

For en eksponentielt aftagende funktion $f(x) = b \cdot a^x$ gælder:

$f(x+T_{½}) = \frac{1}{2} \cdot f(x)$ og $T_{½} = \frac{\ln(\frac{1}{2})}{\ln a}$

Bemærk, at når f er eksponentielt voksende, så er a > 1 og dermed er lna > 0, hvormed $T_2 > 0$, idet ln2 > 0. Tilsvarende ses, at når f er eksponentielt aftagende, så er 0 < a < 1 og dermed er lna < 0, hvormed $T_{½} > 0$, idet $\ln(\frac{1}{2}) < 0$.

I forbindelse med halverings- og fordoblingskonstanter, samt de to forskellige opskrivningsformer for eksponentielle vækstfunktioner gælder der en stribe omskrivningsformler, bl.a. følgende:

Sætning 1.4.17.

For en eksponentielt voksende funktion $f(x) = b\cdot a^x = b\cdot e^{kx}$ (dvs. a > 1, k > 0) gælder der følgende formler (hvor $\log_c$ er en vilkårlig logaritmefunktion):

$$T_2 = \frac{\ln 2}{\ln a} = \frac{\ln 2}{k} = \frac{\log_c(2)}{\log_c(a)} \qquad \text{og} \qquad a = 2^{\frac{1}{T_2}} = \sqrt[T_2]{2}$$

For en eksponentielt aftagende funktion $f(x) = b\cdot a^x = b\cdot e^{kx}$ (dvs. 0 < a < 1, k < 0) gælder der følgende formler (hvor $\log_c$ er en vilkårlig logaritmefunktion):

$$T_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln(\frac{1}{2})}{\ln a} = \frac{\ln(\frac{1}{2})}{k} = \frac{\log_c(\frac{1}{2})}{\log_c(a)} \qquad \text{og} \qquad a = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{T_{\frac{1}{2}}}} = \sqrt[T_{\frac{1}{2}}]{\frac{1}{2}}$$

Bevis:

Den første udtryk for T_2 hhv. $T_{½}$ er identisk med udtrykket fra sætning 1.4.16. Det næste udtryk følger af, at k = lna, og det sidste udtryk følger af sætning 1.1.9. (Hvorfor ?).

Udtrykkene for a følger af, at fremskrivningsfaktoren for funktionen f svarende til en tilvækst på h, er givet ved a^h (dvs. størrelsen a^h angiver, hvor mange gange større funktionsværdien bliver, når den uafhængige variable gives en tilvækst på h)
For en eksponentielt voksende funktion gælder, at $h = T_2$ giver en fordobling af funktionsværdierne, og dermed: $a^{T_2} = 2$, hvoraf vi ser, at: $a = 2^{\frac{1}{T_2}} = \sqrt[T_2]{2}$.
For en eksponentielt aftagende funktion gælder, at $h = T_{½}$ giver en halvering af funktionsværdierne, og dermed: $a^{T_{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}$, hvoraf vi ser, at: $a = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{T_{\frac{1}{2}}}} = \sqrt[T_{\frac{1}{2}}]{\frac{1}{2}}$ ♥

Øvelse 1.4.18.
Bestem fordoblings- eller halveringskonstanten for hver af de i øvelse 1.4.12 omtalte eksponentielle vækstfunktioner. ♥

Eksempel 1.4.19.
Om en eksponentielt aftagende funktion f vides, at f(3) = 20 samt at halveringskonstanten er lig med 6. Vi vil finde en funktionsforskrift for f, samt løse uligheden $f(x) \le 12$.
Da f(3) = 20 får vi dermed, at f(3 + 6) = 10, dvs. f(9) = 10. Vi kender dermed 2 punkter på grafen for f og kan derefter anvende metoden fra eksempel 1.4.3 og sætning 1.4.4.

Vi vil imidlertid anvende sætning 1.4.17, hvoraf vi ser, at hvis $f(x) = b \cdot a^x$, så er $a = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{6}} = 0{,}8909$.
Af f(3) = 20 fås herefter: $20 = b \cdot 0{,}8909^3$ og dermed: b = 28,28.

Forskriften for f er altså: $f(x) = 28{,}28 \cdot 0{,}8909^x$

Hvis vi vil have forskriften på formen $f(x) = b \cdot e^{kx}$, så får vi, idet k = lna, at: $f(x) = 28{,}28 \cdot e^{-0{,}1155x}$

Uligheden $f(x) \leq 12$ løses herefter på følgende måde, (hvor vi her for variationens skyld vil anvende forskriften på formen: $f(x) = b \cdot e^{kx}$), og hvor vi benytter, at ln og e^x er voksende funktioner:

$$\begin{aligned} f(x) \leq 12 &\Leftrightarrow 28{,}28 \cdot e^{-0{,}1155x} \leq 12 \\ &\Leftrightarrow e^{-0{,}1155x} \leq 0{,}4243 \\ &\Leftrightarrow -0{,}1155x \leq \ln(0{,}4243) \\ &\Leftrightarrow x \geq 7{,}42 \end{aligned}$$

Løsningsmængden til uligheden $f(x) \leq 12$ er således lig med $[7{,}42 \,;\, \infty[$ ♥

Øvelse 1.4.20.

a) Bestem funktionsforskriften for en eksponentielt aftagende funktion f med halveringskonstanten 3,6, idet det vides, at f(–7) = 39,7
b) Bestem funktionsforskriften for en eksponentielt voksende funktion g med fordoblingskonstanten 200, idet det vides, at g(1000) = 321. Og løs derefter uligheden: g(x) < 150 ♥

1.5. Enkeltlogaritmisk koordinatsystem.

Ved et enkeltlogaritmisk (eller semilogaritmisk) koordinatsystem forstår vi et koordinatsystem, hvor den ene akse er en almindelig tallinie (almindelig skala, ækvidistant inddelt), og hvor den anden akse er en logaritmisk skala.
De oftest anvendte enkeltlogaritmiske koordinatsystemer har andenaksen som logaritmisk skala (man taler undertiden om et lodret-logaritmisk koordinatsystem), men der findes også eksempler på det modsatte (se kapitel 2).
I det følgende vil vi kun beskæftige os med enkeltlogaritmiske koordinatsystemer, hvor andenaksen er logaritmisk, og vi vil tillade os at omtale disse kort som enkeltlogaritmiske koordinatsystemer.

Enkeltlogaritmiske koordinatsystemer spiller en særlig rolle i forbindelse med eksponentielle vækstfunktioner, idet der gælder følgende sætning:

Sætning 1.5.1.

Følgende to udsagn om en given funktion f er ensbetydende:

1) Grafen for f indtegnet i et enkeltlogaritmisk koordinatsystem er en (ikke-vandret) ret linie.
2) f er en eksponentiel vækstfunktion.

Bevis:

Vi skal altså bevise, at hvis udsagnet 1) er opfyldt, så gælder 2) også – og omvendt.
Vi starter med at antage, at vi har indtegnet grafen for f i et enkeltlogaritmisk koordinatsystem og derved har fået en ret linie som vist på figur 1.5.1, dvs. vi antager, at 1) er opfyldt.

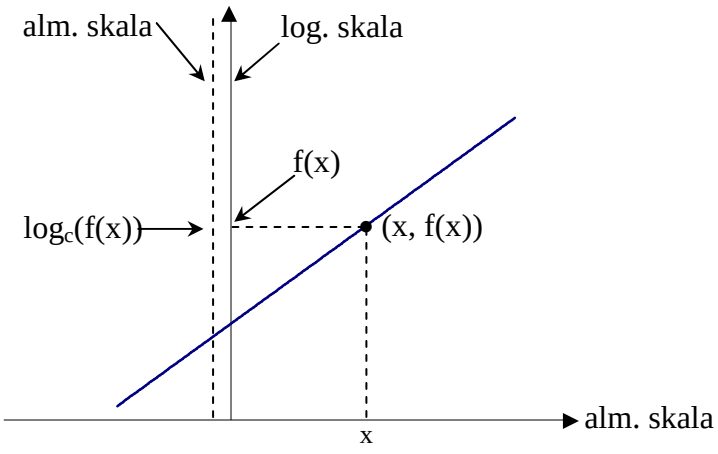


Fig. 1.5.1

På figuren er der ved siden af 2.aksen indtegnet en almindelig tallinie med en almindelig skala. (Man skal forestille sig, at den ligger oveni 2.aksen, men af tegnetekniske årsager er den vist ved siden af).
For et vilkårligt punkt (x, f(x)) på grafen i det enkeltlogaritmiske koordinatsystem gælder, at det svarer til punktet $(x, \log_c(f(x)))$ i det almindelige koordinatsystem bestående af 1.aksen og den almindelige skala ved 2. aksen. (Jfr. definitionen af en logaritmisk skala (Definition 1.1.12)).

$\log_c$ er altså den logaritmefunktion, som er anvendt til konstruktionen af den logaritmiske skala. Da punkter af formen $(x, \log_c(f(x)))$ udgør en ikke-vandret, ret linie i et almindeligt koordinatsystem, findes der to tal $p, q \in R$ $(p \neq 0)$, så

$$\log_c(f(x)) = p \cdot x + q$$

Da $Vm(\log_c) = R$ og $Dm(\log_c) = R_+$ (jfr. sætning 1.1.5), findes der to positive tal a og b, så $\log_c(a) = p$ og $\log_c(b) = q$. Vi får dermed, at:

$$\log_c(f(x)) = \log_c(a) \cdot x + \log_c(b) = \log_c(a^x) + \log_c(b) = \log_c(b \cdot a^x)$$

Da en logaritmefunktion er injektiv får vi hermed, at $f(x) = b \cdot a^x$, dvs. at f er en eksponentiel vækstfunktion. (Bemærk, at $a \neq 1$, idet $p \neq 0$). Hermed er 2) bevist.

Antag herefter omvendt, at 2) er opfyldt, dvs. at f er af formen: $f(x) = b \cdot a^x$, hvor $b > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$
Vi vil nu udregne $\log_c(f(x))$, hvor $\log_c$ er den logaritmefunktion, der er anvendt til at konstruere den logaritmiske skala i det enkeltlogaritmiske koordinatsystem:

$$\log_c(f(x)) = \log_c(b \cdot a^x) = \log_c(b) + \log_c(a^x) = \log_c(b) + x \cdot \log_c(a).$$

Hvis vi sætter $p = \log_c(a)$ og $q = \log_c(b)$ får vi i alt, at: $\log_c(f(x)) = p \cdot x + q$

Som omtalt ovenfor gælder der, at når vi i et enkeltlogaritmisk koordinatsystem afsætter punkter (x,f(x)) på grafen for f, så afsætter vi i virkeligheden – p.gr.a. konstruktionen af den logaritmiske skala – punkterne $(x, \log_c(f(x)))$ i et almindeligt koordinatsystem. Da $\log_c(f(x)) = p \cdot x + q$ ser vi dermed, at grafen for f bliver en ret linie i det enkeltlogaritmiske koordinatsystem. (Bemærk desuden, at da $a \neq 1$, er $p \neq 0$). Hermed er sætningen bevist. ♥

Som omtalt i forbindelse med definition 1.1.12 kan man selv konstruere en enkeltlogaritmisk skala – og dermed kan man også selv konstruere et enkeltlogaritmisk koordinatsystem – ved på et stykke almindeligt papir at tegne et koordinatsystem, hvor andenaksen er en logaritmisk skala.
Med en given funktion eller nogle givne koordinatsæt forelagt, kan man også simulere et enkeltlogaritmisk koordinatsystem ved at afsætte (1. koordinaten, logaritmen til 2.koordinaten) i et almindeligt koordinatsystem, og man kan her bruge en hvilken som helst voksende logaritmefunktion, man har lyst til eller finder passende til sammenhængen, f.eks. ln.
Det er imidlertid også muligt at købe og anvende færdigproduceret enkeltlogaritmisk papir, hvilket er det almindeligste i undervisningssammenhænge.

Eksempel 1.5.2.

Vi vil indtegne graferne for funktionerne $f(x) = 300 \cdot e^{0,4 \cdot x}$ og $g(x) = 2750 \cdot 0,65^x$ i et enkeltlogaritmisk koordinatsystem. Da vi ved, at grafen for såvel f som g giver en ret linie, skal vi blot beregne to støttepunkter for hver funktion.
Vi finder (kontroller): $f(0) = 300$ og $f(3) = 996$, samt $g(0) = 2750$ og $g(4) = 490,9$.
Graferne for f og g i et enkeltlogaritmisk koordinatsystem får dermed det på figur 1.5.2 viste udseende.

Fordoblingskonstanten T_2 for f er givet ved: $T_2 = \dfrac{\ln 2}{0,4} = 1,73$. Denne størrelse kan imidlertid med tilnærmelse også aflæses på grafen, idet vi f.eks. benytter funktionsværdierne 300 og 600. Tilvæksten på 1.aksen ses netop at være ca. 1,7.

Halveringskonstanten $T_{½}$ for g er givet ved: $T_{½} = \dfrac{\ln(\frac{1}{2})}{\ln(0,65)} = 1,609$, hvilket også kan aflæses på grafen (om end med mindre præcision), f.eks. ved at benytte funktionsværdierne 4000 og 2000. Vi ser, at tilvæksten på 1.aksen bliver ca. $0,7 - (-0,9) = 1,6$ (kontrollér !). ♥

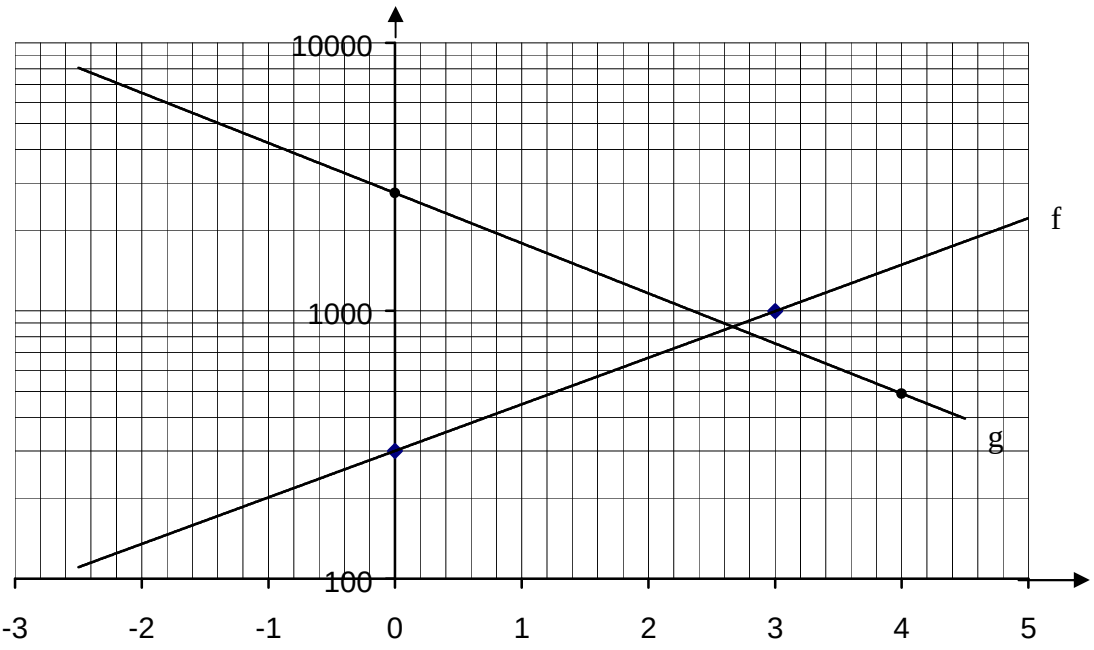


Fig. 1.5.2

Øvelse 1.5.3.
Tegn graferne for følgende funktioner i enkeltlogaritmiske koordinatsystemer, idet [–1; 2] skal være med på førsteaksen på tegningerne. Aflæs funktionernes halverings- eller fordoblingskonstanter.

a) $f(x) = 0{,}5 \cdot 1{,}9^x$ b) $g(y) = 44000 \cdot 0{,}24^y$ c) $h(p) = 12 \cdot e^{-1{,}2 \cdot p}$ d) $\Psi(\beta) = 2345 \cdot e^{2\beta}$ ♥

Eksempel 1.5.4.
I det enkeltlogaritmiske koordinatsystem på figur 1.5.3 ses en ret linie, som ifølge sætning 1.5.1 er grafen for en eksponentielt voksende funktion f. Vi vil finde en funktionsforskrift for f.
Vi ved, at f er på formen: $f(x) = b \cdot a^x$ (eller: $f(x) = b \cdot e^{kx}$), så ifølge sætning 1.4.4 skal vi blot kende koordinaterne til to punkter på grafen, hvorefter a og b let kan bestemmes.
Det drejer sig derfor om at finde to "pæne"/tydelige punkter på grafen, aflæse deres koordinatsæt og derefter anvende sætning 1.4.4. Vi ser, at (0 , 30) og (3, 60) er pæne punkter på grafen, hvormed vi finder (kontrollér), at b = 30 og a = 1,256, og dermed, at funktionsforskriften er:

$f(x) = 30 \cdot 1{,}256^x$ eller $f(x) = 30 \cdot e^{0{,}231x}$ ♥

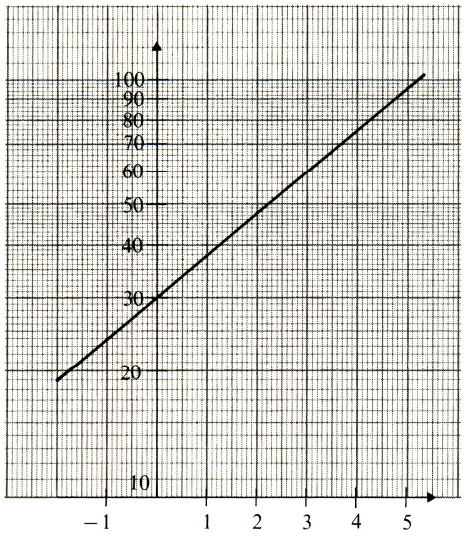


Fig. 1.5.3

Øvelse 1.5.5.
I den nedenstående tabel ses en række målte data for to biologiske størrelser H og Q som funktion af tiden t. Indtegn disse punkter i enkeltlogaritmiske koordinatsystemer og argumentér derefter for, at såvel H som Q med god tilnærmelse kan beskrives ved eksponentielle vækstfunktioner.

t	3	5,5	7	8	9,5	12	14	16,5	19
H(t)	1913	4009	6198	8334	12903	27001	48150	100020	209004
Q(t)	380	228	160	136	97	55	38	20	14

Find på baggrund af tegningerne en funktionsforskrift for H(t) og for Q(t), og aflæs fordoblingskonstant eller halveringskonstant for funktionerne. ♥

1.6. Potensfunktioner. Potentielle vækstfunktioner.

Potensfunktioner:

I definition 1.2.2 og i sætning 1.2.3 er udtrykket a^r fastlagt for $a \in R_+$ og $r \in R$. Vi definerede herudfra en eksponentialfunktion som en funktion, hvor r er den variable, medens a holdes fast (Definition 1.3.1 og sætning 1.3.2).

Vi vil nu se på den "omvendte" situation, hvor r holdes fast, medens a betragtes som variabel.

Definition 1.6.1.

Ved en potensfunktion forstår vi en funktion f af typen: $f(x) = x^r$, $x \in R_+$,
hvor r er et vilkårligt reelt tal.

Vi bemærker, at definitionsmængden for en potensfunktion er mængden R_+, idet a^r – som også omtalt ovenfor – kun er defineret, når $a > 0$.
Funktioner af typen: $f(x) = x^n$, hvor $n \in Z$ (altså f.eks. x^2, x^5 og x^{-3}), er også potensfunktioner, idet de er af formen: x^r. Disse funktioner er ikke kun defineret i R_+, men i hele R (når $n > 0$) eller i $R \setminus \{0\}$ (når $n < 0$). Når vi betragter funktioner af typen x^r, så må vi derfor egentlig skelne imellem, om $r \in Z$ og $r \notin Z$. I praktisk talt alle anvendelser af potensfunktioner er der (uanset værdien af r) imidlertid tale om positive størrelser, og vi vil i det følgende ikke foretage denne skelnen, men kun se på positive værdier af den uafhængige variable.

Vi minder om, at der for alle $n \in N$ gælder: $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$, hvoraf vi ser, at enhver "rodfunktion" i virkeligheden er en potensfunktion (f.eks. er $\sqrt[4]{x} = x^{0,25}$)

Ifølge sætning 1.2.3 har vi følgende omskrivningsformel:

Sætning 1.6.2.

For alle $x \in R_+$ gælder der: $x^r = e^{r \cdot \ln x}$

Eksempel 1.6.3.
I potensfunktionerne $f(x) = x^{0,5}$, $g(x) = x^{-0,7}$ og $h(x) = x^{1,88}$ er r lig med hhv. 0,5, – 0,7 og 1,88
For at skitsere graferne for disse tre potensfunktioner, kan vi f.eks. udregne følgende støttepunkter:

x	0,5	1	2	3	4	5
f(x)	0,71	1	1,41	1,73	2	2,24
g(x)	1,62	1	0,62	0,46	0,38	0,32
h(x)	0,27	1	3,68	7,89	13,5	20,6

Disse tal kan vi enten finde v.hj.a. omskrivningen $x^r = e^{r \cdot \ln x}$, eller vi kan indtaste f.eks. $0{,}5^{1{,}88}$ direkte på lommeregneren. Læseren opfordres til at prøve at udregne f(0,2), g(0,2) og h(0,2).
På baggrund af disse værdier fremkommer graferne på figur 1.6.1 ♥

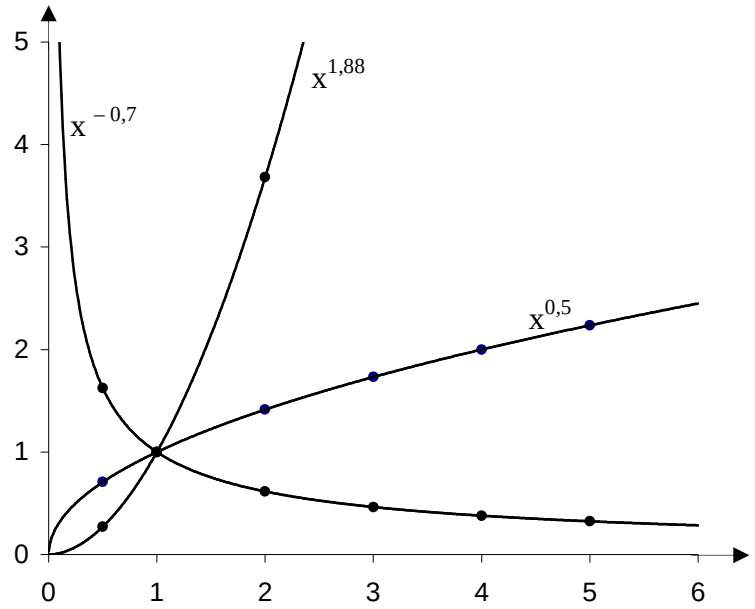


Fig. 1.6.1

I forlængelse af sætning 1.6.2 og eksempel 1.6.3 anføres følgende sætning:

Sætning 1.6.4.

1) Værdimængden for en potensfunktion x^r (hvor $r \neq 0$) er lig med R_+, dvs. $Vm(x^r) = R_+$
2) Potensfunktionerne x^r (hvor $r \neq 0$) er monotone, idet der gælder:
   x^r er voksende, når $r > 0$
   x^r er aftagende, når $r < 0$

Bevis:
Ad 1): Vi anvender omskrivningen fra sætning 1.6.2. Når x "gennemløber" $Dm(x^r)$, dvs. R_+, så vil ln(x) gennemløbe hele R, og – da $r \neq 0$ – vil $r \cdot \ln x$ dermed også gennemløbe hele R, hvormed $e^{r \cdot \ln x}$, dvs. x^r, gennemløber R_+ (idet værdimængden for en eksponentialfunktion er R_+).

Ad 2): Antag, at $r > 0$, og lad x_1 , $x_2 \in R_+$ være vilkårligt valgt, så $x_1 < x_2$. Vi skal så vise, at $x_1^{\,r} < x_2^{\,r}$. Da funktionerne ln og e^x begge er voksende, og da $r > 0$, gælder der:

$$x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; \ln(x_1) < \ln(x_2) \;\Rightarrow\; r \cdot \ln(x_1) < r \cdot \ln(x_2) \;\Rightarrow\; e^{r \cdot \ln(x_1)} < e^{r \cdot \ln(x_2)} \;\Rightarrow\; x_1^{\,r} < x_2^{\,r}$$

Vi ser hermed, at funktionen x^r er voksende, når $r > 0$.
Beviset for, at x^r er aftagende, når $r < 0$, forløber helt tilsvarende, idet dog ulighedstegnes vendes, når der ganges med det negative tal r. Detaljerne overlades til læseren. ♥

I kapitel 3 vil sætning 1.6.4 2) blive bevist igen, denne gang v.hj.a. differentialregning.

For logaritme- og eksponentialfunktioner gælder, at de er hinandens omvendte funktioner (jfr. afsnit 1.1, 1.2 og 1.3). For potensfunktioner gælder, at den omvendte funktion til en potensfunktion selv er en potensfunktion.
Løs først den følgende øvelse, og læs derefter den følgende sætning og dens bevis.

Øvelse 1.6.5.

a) Tegn graferne for funktionerne: $f(x) = x^2$, $x \in R_+$ og $g(x) = x^{0,5}$, $x \in R_+$, i samme koordinatsystem.
b) Tegn graferne for funktionerne: $f(x) = x^{-2}$, $x \in R_+$ og $g(x) = x^{-0,5}$, $x \in R_+$, i samme koordinatsystem.
c) Giv et intuitivt geometrisk argument for, at f og g i pkt. a) er hinandens omvendte funktioner, og tilsvarende i pkt. b). (Vedr. omvendt funktioner: se Appendix 2).
d) Prøv at give et regneteknisk bevis for, at f og g er hinandens omvendte funktioner. ♥

Sætning 1.6.6.

Den omvendte funktion til potensfunktionen $f(x) = x^r$ (hvor $r \neq 0$), er potensfunktionen $g(x) = x^{\frac{1}{r}}$

Bevis:

Ifølge sætning 1.6.4 b) er f monoton, hvormed den ifl. Appendix 2 er injektiv og dermed har en omvendt funktion. Denne vil vi nu finde:

$$y = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad y = x^r \quad \Leftrightarrow \quad y^{\frac{1}{r}} = (x^r)^{\frac{1}{r}} \quad \Leftrightarrow \quad x = y^{\frac{1}{r}} \quad \Leftrightarrow \quad f^{-1}(y) = y^{\frac{1}{r}}$$

og da vi kan navngive den uafhængige variable, som vi vil, ser vi, at: $f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{r}} = g(x)$. ♥

Potentielle vækstfunktioner:

Definition 1.6.7.

Ved en potentiel vækstfunktion forstår vi en funktion g af typen: $g(x) = b \cdot x^r$, $x \in R_+$,
hvor r er et vilkårligt reelt tal, og hvor b er en positiv konstant.

En potentiel vækstfunktion benævnes også: en funktion, der er proportional med en potensfunktion.

Da tallet b er en positiv konstant, gælder sætning 1.6.4 også for potentielle vækstfunktioner, ligesom det gælder, at den omvendte funktion til potentiel vækstfunktion er en potentiel vækstfunktion (detaljer i argumentationen for disse udsagn overlades til læseren).

Eksempel 1.6.8.

Vi vil tegne graferne for funktionerne: $g(x) = 200 \cdot x^{-0,82}$ og $h(x) = 54 \cdot x^{0,7}$ i samme koordinatsystem og derefter ved beregning løse ligningen: $g(x) = h(x)$.

Vi bemærker, at g er aftagende og at h er voksende. Desuden har vi følgende støttepunkter:

x	0,4	0,7	1	1,5	2	2,5	3	3,5
g(x)	424	268	200	143	113	94,3	81,2	71,6
h(x)	28,4	42,1	54	71,7	87,7	103	117	130

Graferne for g og h ser dermed således ud (figur 1.6.2):

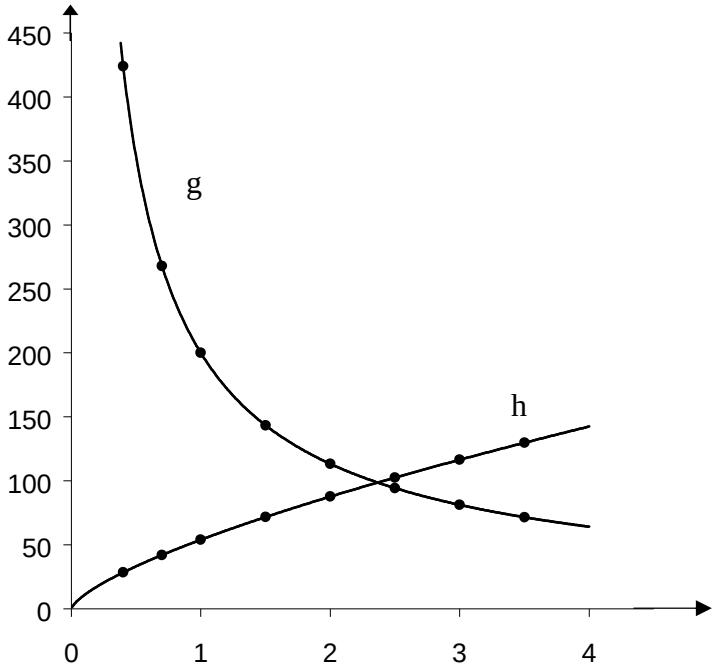


Fig. 1.6.2

Ligningen g(x) = h(x) løses således:

$$g(x) = h(x) \Leftrightarrow 200\cdot x^{-0,82} = 54\cdot x^{0,7}$$

$$\Leftrightarrow \frac{200}{54} = \frac{x^{0,7}}{x^{-0,82}}$$

$$\Leftrightarrow x^{1,52} = \frac{200}{54}$$

$$\Leftrightarrow x = \left(\frac{200}{54}\right)^{\frac{1}{1,52}}$$

$$\Leftrightarrow x = 2,366$$

Løsningsmængden er altså:
$L = \{2,366\}$ ♥

Øvelse 1.6.9.
Tegn graferne for funktionerne: $\Lambda(p) = 0,69\cdot p^{2,13}$ og $\Psi(p) = 1,41\cdot p^{-0,63}$ i samme koordinatsystem. Løs såvel grafisk som ved beregning uligheden: $\Lambda(p) > \Psi(p)$. ♥

Da en potentiel vækstfunktion er fastlagt ved de to konstanter b og r, kan funktionsforskriften bestemmes, blot vi kender to punkter på dens graf (jfr. tilsvarende egenskaber for eksponentielle vækstfunktioner, sætning 1.4.4). I denne sammenhæng gælder følgende sætning:

Sætning 1.6.10.

Hvis det om en potentiel vækstfunktion $f(x) = b\cdot x^r$ gælder, at grafen går igennem punkterne (x_1,y_1) og (x_2,y_2), (dvs. hvis $f(x_1) = y_1$ og $f(x_2) = y_2$), så er konstanterne r og b givet ved:

$$r = \frac{\log_c(y_2) - \log_c(y_1)}{\log_c(x_2) - \log_c(x_1)} \qquad \text{og} \qquad b = \frac{y_1}{x_1^{\,r}}$$

hvor $\log_c$ er en vilkårlig logaritmefunktion. (Oftest benyttes ln eller log).

Bevis:

Ifølge forudsætningerne har vi: $y_1 = b \cdot x_1^{\,r}$ og $y_2 = b \cdot x_2^{\,r}$, hvoraf vi ser, at:

$\frac{y_2}{y_1} = \frac{b \cdot x_2^{\,r}}{b \cdot x_1^{\,r}} = \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^r$ og dermed: $\log_c(\frac{y_2}{y_1}) = \log_c(\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^r) = r \cdot \log_c(\frac{x_2}{x_1})$

hvoraf det ønskede udtryk for r fås ved division med $\log_c(\frac{x_2}{x_1})$ og anvendelse af sætning 1.1.6 3).

Udtrykket for b fås direkte af $y_1 = b \cdot x_1^{\,r}$ ved division med $x_1^{\,r}$ på begge sider af lighedstegnet. ♥

Eksempel 1.6.11.

Om en potentiel vækstfunktion g gælder, at g(28) = 17 og g(83) = 6,4. Vi vil bestemme en forskrift for g. Da g er af typen: $g(x) = b \cdot x^r$ får vi ifølge sætning 1.6.10, at:

$$r = \frac{\ln(6,4) - \ln(17)}{\ln(83) - \ln(28)} = -0,899 \quad \text{og} \quad b = \frac{17}{28^{-0,899}} = 340$$

Funktionsforskriften for g er altså givet ved: $g(x) = 340 \cdot x^{-0,899}$, $x \in R_+$ ♥

Øvelse 1.6.12.

Grafen for en potentiel vækstfunktion går igennem punkterne: (3, 2) og (13, 11).
Bestem en forskrift for funktionen og tegn dens graf. ♥

Eksempel 1.6.13.

a) Som bekendt siges to variable størrelser α og β at være ligefrem proportionale, hvis der findes en positiv konstant k, så der for alle værdier af α og β gælder, at: $\beta = k\alpha$. Hvis vi opfatter β som funktion af α, så har vi altså, at: $\beta(\alpha) = k\alpha$, dvs. β er en potentiel vækstfunktion af α (hvor eksponenten r = 1)

b) Som ligeledes bekendt siges to størrelser α og β at være omvendt proportionale, hvis der findes en positiv konstant k, så der for alle værdier af α og β gælder, at: $\alpha\beta = k$. Hvis vi opfatter β som funktion af α, så har vi altså, at: $\beta(\alpha) = k \cdot \alpha^{-1}$, dvs. β er en potentiel vækstfunktion af α (hvor eksponenten r = –1). ♥

Vi slutter afsnittet om potentielle vækstfunktioner med at undersøge disse funktioners egenskaber i relation til tilvækster/relative tilvækster. Der gælder følgende sætning, (hvor vi af hensyn til benævnelserne kalder eksponenten a i stedet for r i forskriften for den potentielle vækstfunktion):

Sætning 1.6.14.

Betragt en potentiel vækstfunktion f med forskriften: $f(x) = b \cdot x^a$, $x \in R_+$

1) Hvis den uafhængige variable x fremskrives med faktoren q, så fremskrives funktionsværdien f(x) med faktoren q^a , dvs. $f(x \cdot q) = q^a \cdot f(x)$
2) Hvis den uafhængige variable x ændres med en relativ tilvækst r_1 , så vil den afhængige variable f(x) ændres med den relative tilvækst r_2 givet ved:
$$r_2 = (1 + r_1)^a - 1 .$$
3) Hvis en relativ tilvækst på r_1 i den uafhængige variable x medfører en relativ tilvækst på r_2 i den afhængige variable f(x), så er størrelsen a givet ved:
$$a = \frac{\ln(1+r_2)}{\ln(1+r_1)}$$
4) Hvis den uafhængige variable x ændres med s %, så vil den afhængige variable f(x) ændres med t % givet ved sammenhængen:
$$1+\frac{t}{100} = \left(1+\frac{s}{100}\right)^a \qquad \text{dvs.} \qquad t = \left(\left(1+\frac{s}{100}\right)^a - 1\right)\cdot 100$$

Bemærk, at alle formlerne i det ovenstående er uafhængige af startværdien x, dvs. resultatet giver det samme for enhver værdi af $x \in R_+$

Bevis:
Ad 1): At fremskrive en x-værdi med faktoren q betyder, at vi ganger x med q. Vi ser derfor på følgende omskrivning: $f(x \cdot q) = b \cdot (xq)^a = b \cdot x^a \cdot q^a = q^a \cdot f(x)$, hvoraf det ønskede fremgår.
Ad 2): Hvis vi ændrer x med den relative tilvækst r_1 og derved får værdien x_{ny}, så gælder der pr. definition af relativ tilvækst, at: $r_1 = \frac{x_{ny} - x}{x}$, hvoraf vi får (kontrollér), at: $x_{ny} = x \cdot (1 + r_1)$.
At ændre x-værdien med den relative tilvækst r_1 svarer altså til at fremskrive x med faktoren $1 + r_1$. (Et resultat, som læseren muligvis allerede er bekendt med).
Den hertil svarende relative tilvækst r_2 for funktionen f findes herefter på følgende måde:

$$r_2 = \frac{f(x_{ny}) - f(x)}{f(x)} = \frac{f(x \cdot (1+r_1)) - f(x)}{f(x)} = \frac{b \cdot (x \cdot (1+r_1))^a - b \cdot x^a}{b \cdot x^a} = \frac{x^a \cdot (1+r_1)^a - x^a}{x^a} = (1+r_1)^a - 1$$

hvormed den ønskede formel er bevist.
Ad 3): Ifølge pkt. 2) har vi, at $r_2 = (1 + r_1)^a - 1$, og ved at omskrive dette udtryk fås det ønskede:

$$r_2 = (1 + r_1)^a - 1 \Leftrightarrow 1 + r_2 = (1 + r_1)^a \Leftrightarrow \ln(1 + r_2) = a \cdot \ln(1 + r_1) \Leftrightarrow a = \frac{\ln(1+r_2)}{\ln(1+r_1)}$$

Ad 4): Hvis en given størrelse ændres med p %, er det det samme som at fremskrive størrelsen med faktoren $1 + \frac{p}{100}$. Ved at sammenholde dette med resultatet i pkt. 1) fås den første formel i pkt. 4). Den anden formel er blot en simpel omskrivning af den første formel. (Detaljerne overlades til læseren).
Hermed er sætningen bevist. ♥

Eksempel 1.6.15.

a) Om den potentielle vækstfunktion $f(x) = 2300 \cdot x^{1,67}$ gælder, at hvis x-værdien gøres 3 gange så stor, så gøres funktionsværdien f(x) ifølge sætning 1.6.14 1) $3^{1,67} = 6,26$ gange så stor.

b) Om den potentielle vækstfunktion $g(x) = 35 \cdot x^{-1,2}$ gælder, at hvis x-værdien gives en relativ tilvækst på 0,28, så får den afhængige variable g(x) ifølge sætning 1.6.14 2) en relativ tilvækst $r_2 = (1+0,28)^{-1,2} - 1 = -0,256$, eller udtrykt i procent: Hvis x-værdien øges med 28 %, så falder funktionsværdien med 25,6 %, et resultat der også stemmer overens med pkt. 4) i sætning 1.6.14 (Kontrollér !).
En positiv relativ tilvækst i x-værdien giver altså en negativ relativ tilvækst i g(x)-værdien, hvilket stemmer fint overens med, at g ifølge sætning 1.6.4 2) er aftagende.

c) Om en potentiel vækstfunktion h gælder, at $h(20) = 100$, samt at en forøgelse af x-værdien med 10 % giver en formindskelse af funktionsværdien med 22 %. Ud fra disse oplysninger vil vi bestemme en funktionsforskrift for h. Vi ved, at h er af typen: $h(x) = b \cdot x^a$, $x \in R_+$, og ifølge pkt. 3) i sætning 1.6.14 har vi, at:

$$a = \frac{\ln(1+r_2)}{\ln(1+r_1)} = \frac{\ln(1-0,22)}{\ln(1+0,1)} = -2,607$$

Herefter findes b på følgende måde:
Da $h(20) = 100$ gælder der: $100 = b \cdot 20^{-2,607}$ og dermed, at: $b = 100 \cdot 20^{2,607} = 246387$.
I alt ses, at $h(x) = 246387 \cdot x^{-2,607}$. ♥

Øvelse 1.6.16.

Om en potentiel vækstfunktion f gælder, at $f(30) = 400$, samt at en forøgelse af den uafhængige variable med 8 % giver en forøgelse af funktionsværdien med 14 %.

a) Bestem en funktionsforskrift for f.
b) Hvor mange gange større bliver funktionsværdien, hvis den uafhængige variable bliver 4 gange større ?
c) Udregn den procentuelle forandring af funktionsværdien, når den uafhængige variable formindskes med 12 %. ♥

Potentielle vækstfunktioner er i øvrigt de eneste funktioner, der har den egenskab, der er omtalt i sætning 1.6.14 2), altså at der til en given relativ tilvækst i den uafhængige variable x svarer en bestemt relativ tilvækst i den afhængige variable f(x), som er uafhængig af værdien af x.
Der gælder nemlig følgende sætning, som ikke kan bevises her, men som vil blive bevist i kapitel 3. Læsere, der endnu ikke er bekendt med begrebet differentiabilitet, kan blot springe sætningen over.

Sætning 1.6.17.

Hvis det om en positiv, ikke-konstant, differentiabel funktion f defineret i R_+ gælder, at for en vilkårlig valgt værdi r af den relative tilvækst i den uafhængige variable x er den relative funktionstilvækst $\frac{f(x \cdot (1+r)) - f(x)}{f(x)}$ konstant (dvs. uafhængig af x), så er f en potentiel vækstfunktion.

1.7. Dobbeltlogaritmisk koordinatsystem.

Ved et dobbeltlogaritmisk koordinatsystem forstår vi et koordinatsystem, hvor begge akser har en logaritmisk inddeling, dvs. begge akser består af logaritmiske skalaer.
I princippet kan man godt bruge forskellige logaritmefunktioner til at konstruere de to akser, men det almindelige er at anvende den samme logaritmefunktion, og vi vil her benytte denne metode.
Og som ved enkeltlogaritmiske koordinatsystemer gælder, at man selv kan konstruere dobbeltlogaritmiske koordinatsystemer – eller man kan købe færdigtrykt dobbeltlogaritmisk papir.

Dobbeltlogaritmiske koordinatsystemer spiller samme rolle for potentielle vækstfunktioner, som enkeltlogaritmiske koordinatsystemer spiller for eksponentielle vækstfunktioner, idet der gælder følgende sætning:

Sætning 1.7.1.

Følgende to udsagn om en given funktion f er ensbetydende:

1) Grafen for f indtegnet i et dobbeltlogaritmisk koordinatsystem er en ret linie.
2) f er en potentiel vækstfunktion.

Bevis:

Vi skal bevise, at hvis udsagnet 1) er opfyldt, så gælder 2) også – og omvendt.
Vi starter med at antage, at vi har indtegnet grafen for f i et dobbeltlogaritmisk koordinatsystem og derved har fået en ret linie som vist på figur 1.7.1, dvs. vi antager, at 1) er opfyldt.

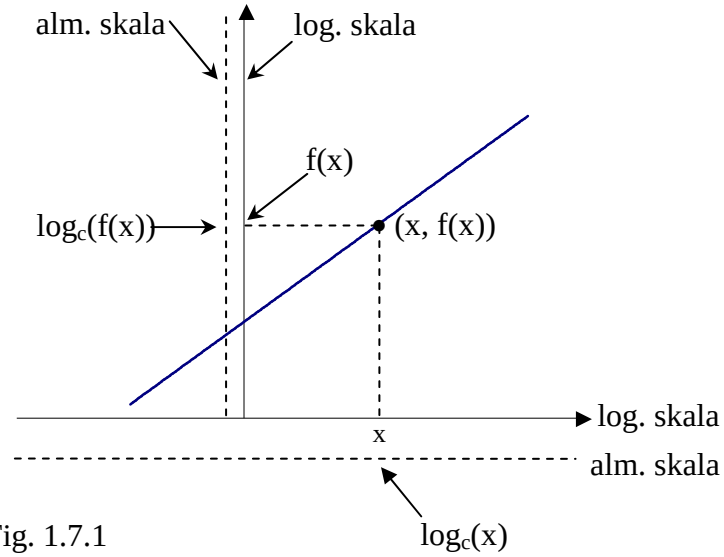


Fig. 1.7.1

På figuren er der ved siden af akserne indtegnet almindelige tallinier med almindelige skalaer. (Man skal forestille sig, at de ligger oveni akserne, men af tegnetekniske årsager er de vist ved siden af).
For et vilkårligt punkt (x, f(x)) på grafen i det dobbeltlogaritmiske koordinatsystem gælder, at det svarer til punktet $(\log_c(x), \log_c(f(x)))$ i et almindeligt koordinatsystem bestående af de almindelige skalaer ved akserne. (Jfr. definitionen af en logaritmisk skala (Definition 1.1.12)).

$\log_c$ er altså den logaritmefunktion, som er anvendt til konstruktionen af de logaritmiske skalaer.
Da punkter af formen $(\log_c(x), \log_c(f(x)))$ udgør en ret linie i et almindeligt koordinatsystem, findes der to tal r, $q \in R$, så

$$\log_c(f(x)) = r \cdot \log_c(x) + q$$

Da $Vm(\log_c) = R$ og $Dm(\log_c) = R_+$ (jfr. sætning 1.1.5), findes der et positivt tal b, så $\log_c(b) = q$.

Vi får dermed, at:

$$\log_c(f(x)) = r\cdot\log_c(x) + \log_c(b) = \log_c(x^r) + \log_c(b) = \log_c(b\cdot x^r)$$

Da en logaritmefunktion er injektiv får vi hermed, at $f(x) = b\cdot x^r$, dvs. at f er en potentiel vækstfunktion. Hermed er 2) bevist.

Antag herefter omvendt, at 2) er opfyldt, dvs. at f er af formen: $f(x) = b\cdot x^r$, hvor $b > 0$.
Vi vil nu udregne $\log_c(f(x))$, hvor $\log_c$ er den logaritmefunktion, der er anvendt til at konstruere de logaritmiske skalaer i det dobbeltlogaritmiske koordinatsystem:

$$\log_c(f(x)) = \log_c(b\cdot x^r) = \log_c(b) + \log_c(x^r) = \log_c(b) + r\cdot\log_c(x).$$

Hvis vi sætter $q = \log_c(b)$ får vi i alt, at: $\log_c(f(x)) = r\cdot\log_c(x) + q$

Som omtalt ovenfor gælder der, at når vi i et dobbeltlogaritmisk koordinatsystem afsætter punkter (x,f(x)) på grafen for f, så afsætter vi i virkeligheden – p.gr.a. konstruktionen af de logaritmiske skalaer – punkterne $(\log_c(x), \log_c(f(x)))$ i et almindeligt koordinatsystem.
Da $\log_c(f(x)) = r\cdot\log_c(x) + q$ ser vi dermed, at grafen for f bliver en ret linie i det dobbeltlogaritmiske koordinatsystem. Hermed er sætningen bevist. ♥

Som det fremgår af beviset for sætning 1.7.1, vil funktionen $f(x) = b\cdot x^r$ i et dobbeltlogaritmisk koordinatsystem have en retlinet graf, som har hældningskoefficienten r målt i forhold til et almindeligt koordinatsystem. Hvis vi fra et punkt på grafen går 1 cm udad (parallelt med 1.aksen), skal vi altså gå r cm opad (hvis r er negativ, svarer dette til |r| cm nedad). Dette omtales yderligere i det følgende eksempel.

Eksempel 1.7.2.
Vi vil tegne graferne for funktionerne $f(x) = 3\cdot x^{0,5}$ og $h(x) = 8\cdot x^{-0,7}$ i et dobbeltlogaritmisk koordinatsystem. Da vi ved, at det skal give rette linier, behøver vi kun at finde to støttepunkter for hver graf. Vi har (kontrollér), at $f(1) = 3$ og $f(9) = 9$, samt at $h(1) = 8$ og $h(9) = 1{,}718$. Graferne får dermed det på figur 1.7.2 viste udseende (se næste side).
Bemærk, at hvis vi ved grafen for f går 1 cm udad, så skal vi gå 0,5 cm opad, hvorimod vi ved grafen for h skal gå 0,7 cm nedad. hvis vi går 1 cm udad.

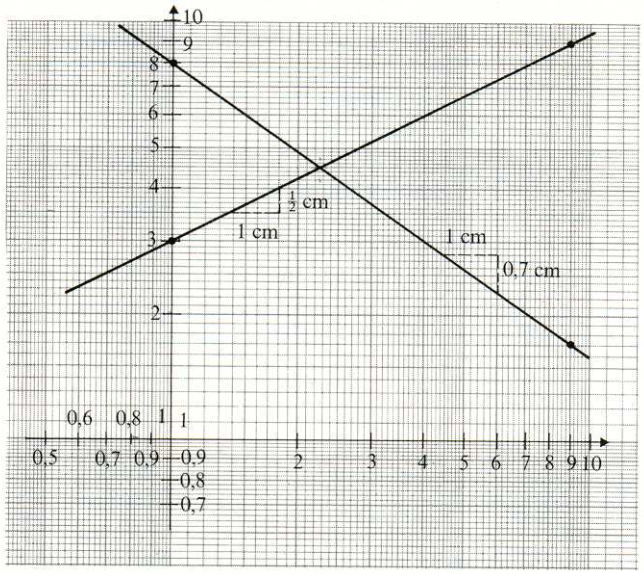


Fig. 1.7.2

Øvelse 1.7.3.
Tegn graferne for de følgende funktioner i et eller flere dobbeltlogaritmiske koordinatsystemer.
a) $f(x) = 20 \cdot x^{1,6}$ b) $g(x) = 200 \cdot x^{-0,6}$ c) $h(x) = 3x + 50$ d) $j(x) = 100 \cdot 1,6^x$
Kommentér resultaterne. ♥

Som omtalt spiller dobbeltlogaritmiske koordinatsystemer samme rolle for potentielle vækstfunktioner, som enkeltlogaritmiske koordinatsystemer spiller for eksponentielle vækstfunktioner.
Vi kan således ved indtegning f.eks. af måleresultater kontrollere påstande om, at én størrelse afhænger af en anden størrelse på en måde, som kan beskrives ved en potentiel vækstfunktion.
Og vi kan fastlægge sammenhængen mellem to variable størrelser x og y til at have udseendet $y = b \cdot x^r$, hvis punkterne (x,y) svarende til mange forskellige x- og y-værdier ligger på en ret linie i et dobbeltlogaritmisk koordinatsystem.

Øvelse 1.7.4.
I den nedenstående tabel ses en række målte data for to økonomiske størrelser U og E som funktion af prisen p. Indtegn disse punkter i dobbeltlogaritmiske koordinatsystemer og argumentér derefter for, at såvel U som E med god tilnærmelse kan beskrives ved potentielle vækstfunktioner.

p	1,2	2	3,4	4,1	5	5,8	7	7,7	8,6
U(p)	215	267	320	355	380	410	434	455	475
E(p)	700	460	310	268	230	200	175	161	150

Find på baggrund af tegningerne en funktionsforskrift for U(p) og for E(p).
Beregn den relative funktionstilvækst for hver af funktionerne svarende til en relativ pristilvækst på 8 %. ♥

1.8. Regression ved eksponentielle og potentielle vækstfunktioner.

Den følgende beskrivelse bygger på en grafregner af Texas-TI-83/84-familien, men selve princippet kan naturligvis overføres til andre fabrikater (hvorimod de konkrete tastesekvenser kan variere væsentligt fra fabrikat til fabrikat).

I afsnit 1.5 (sætning 1.5.1 og øvelse 1.5.5) og i afsnit 1.7 (sætning 1.7.1 og øvelse 1.7.4) så vi på problemstillingen om at "genkende" en eksponentiel hhv. potentiel vækstfunktion i givne data, samt på hvordan forskriften for funktionen herefter kunne bestemmes v.hj.a sætning 1.4.4 hhv. 1.6.10.

Metoden byggede på indtegning af de givne data i enkeltlogaritmisk hhv. dobbeltlogaritmisk koordinatsystem for at se, om de med god tilnærmelse lå på en ret linie – og i bekræftende fald kunne de givne data beskrives ved en eksponentiel hhv. potentiel vækstfunktion (som dermed udgør en model for beskrivelsen af dataene), og funktionsforskriften bestemmes ved aflæsning af to punkter på den rette linie (hvorefter sætning 1.4.4 hhv. 1.6.10 bringes i anvendelse).
Hele denne proces kan automatiseres (men af både faglige og pædagogiske grunde ikke erstattes) v.hj.a. grafregneren. Vi ser først på eksponentiel vækst og vender senere tilbage til potentiel vækst. Vi vil ikke her komme ind på, hvordan grafregneren foretager selve udregningen, men blot nøjes med at fortælle, hvordan vi får den til det. Interesserede læsere henvises til litteraturen om emnet.

Eksponentiel regression.

Beskrivelsen af emnet må nødvendigvis bygge på "givne data", så vi vil anvende dataene fra øvelse 1.5.5 og v.hj.a. grafregneren undersøge funktionen H(t), for hvilken vi har følgende målte data:

t	3	5,5	7	8	9,5	12	14	16,5	19
H(t)	1913	4009	6198	8334	12903	27001	48150	100020	209004

Først skal vi have dataene ind i grafregnerens hukommelse, i de såkaldte lister. Disse lister benævnes L_1 , L_2 , L_3 , L_4 , L_5 og L_6 – men vi skal her kun bruge to af dem.
Vi får fat i listerne ved at taste: [STAT] og vælge: Edit og taste [ENTER].
Hvis der er data i listerne (fra sidste gang de blev brugt), kan disse fjernes på bl.a. følgende to måder:

1) V.hj.a. piletasterne markeres listens navn øverst oppe, derefter tastes [CLEAR] og v.hj.a. piletasterne gås ned i listen igen og dataene forsvinder, eller
2) Alle data i alle lister kan fjernes ved at taste [2nd] [MEM] og her vælge: ClrAllLists – inden listerne findes frem.

Herefter tastes de nye data ind i to af listerne. Det er nemmest – men ikke nødvendigt – at bruge liste 1 og 2, hvor den uafhængige variable (dvs. t i ovenstående tabel) indtastes i L_1 og den afhængige variable, (dvs. H(t)) indtastes i L_2.
Det er nemmest at udfylde en liste af gangen, så indtast først t-værdierne i L_1 og derefter H(t) i L_2.
(Stil markøren på det øverste felt i listen, skriv værdien og tast [ENTER], osv. osv.)

Vi er nu klar til at lade grafregneren udføre den eksponentielle regression, dvs. beregne den eksponentielle vækstfunktion, der bedst passer på de givne data. Først forlades listerne ved at taste: [2nd] [QUIT], og derefter kalder regressionen frem ved at taste: [STAT], markere CALC øverst oppe v.hj.a. piltasterne, og her vælge ExpReg (f.eks. ved at markere ExpReg v.hj.a. piletasterne og derefter taste [ENTER]).
I displayet står der nu ExpReg og markøren står og blinker – venter på næste skridt. Da vi har valgt listerne L_1 og L_2, kan vi nu blot taste [ENTER], idet ExpReg default (dvs.: på forhånd) er indstillet til at anvende L_1 og L_2. Hvis vi havde indtastet dataene i andre lister, skulle deres navn anføres i displayet efter ExpReg (f.eks. ExpReg L_2 , L_5) inden der tastes [ENTER]. Listenavnene skrives i displayet ved at taste [2nd] [1], [2nd] [2], osv. (Bemærk kommaet mellem L_2 og L_5).

I displayet står nu:

ExpReg
y = a*b^x
a = 797.5871408
b = 1.340501527
r^2 = .9999957379
r = .999997869

Til dette resultat skal der knyttes en del kommentarer:

- Vær meget opmærksom på, at funktionen angives på formen: $y = a \cdot b^x$, dvs. der er byttet rundt på a og b i fht. den måde, funktionerne generelt benævnes i afsnit 1.4.
- Resultatet bliver: $H(t) = 797{,}6 \cdot 1{,}3405^t$
- Hvis de to sidste linier ikke vises i displayet, kan de hentes frem på følgende måde: Tast [2nd] [CATALOG], vælg v.hj.a. piletasterne DiagnosticOn og tast [ENTER]. DiagnosticOn står nu og venter i displayet, og der tastes [ENTER] igen, hvorefter der skrives: Done.
  (Herefter skal ExpReg aktiveres igen som omtalt ovenfor).
- Tallet r kaldes korrelationskoefficienten. Det er et tal mellem –1 og 1. Tallet er positivt for en voksende funktion og negativt for en aftagende funktion. Korrelationskoefficienten giver et mål for, hvor godt resultatet (dvs. den fundne eksponentielle vækstfunktion) tilnærmer de givne data. Jo tættere r er på 1 (for voksende funktioner) eller –1 (for aftagende funktioner), desto bedre er approximationen. I det konkrete eksempel er der altså meget fin overensstemmelse med en eksponentiel vækstfunktion, idet r = 0,999997869, altså næsten 1.
- Resultatet r^2 kan vi også bruge (idet det er oplagt, at jo tættere r er på 1 eller –1, desto tættere er r^2 på 1, så r^2 kan også bruges til at fortælle noget om tilnærmelsens kvalitet).
  r^2 kaldes undertiden forklaringsgraden eller determinationskoefficienten.

Endelig skal det bemærkes, at hvis vi gerne vil arbejde videre med resultatet, f.eks. tegne grafen eller udregne funktionsværdier for resultatfunktionen, så er det smarteste at taste f.eks. ExpReg Y_1 – altså angive hvilken af grafregnerens Y-værdier resultatet skal anbringes i – i forbindelse med regressionsudregningen. Y_1 efter ExpReg fremkommer ved at taste: [VARS], vælge: Y-VARS, her vælge: Function, og endelig vælge: Y_1
Da funktionsforskriften nu er placeret under Y_1 (se selv efter ved at taste [Y=]), kan grafen tegnes ved blot at taste [GRAPH] – og evt. tilpasse vinduet v.hj.a. [WINDOW]-tasten. Af samme årsag kan der udregnes funktionsværdier ved at taste: Y_1 (som netop omtalt), hvorefter den ønskede funktionsværdi udregnes ved i parentes efter Y_1 at anføre det tal, hvis funktionsværdi ønskes udregnet.
Bemærk, at man her alternativt kan bruge [2nd] [TABLE] og [2nd] [TBLSET] - prøv det !

Øvelse 1.8.1.

a) Tegn grafen for H(t) fra det ovenstående på grafregneren
b) Udregn H(1), H(11) og H(25) v.hj.a. grafregneren.
c) Tegn både grafen og de målte data (de givne punkter) i samme koordinatsystem.
Dette gøres på grafregneren ved at taste: [2nd] [STAT PLOT], her vælge 1, markere "On" og trykke [ENTER], evt. vælge et nyt mærke ("mark"), og derefter igen taste [GRAPH]. ♥

Øvelse 1.8.2.

For at vurdere betydningen af korrelationskoefficientens størrelse, kan vi prøve at ændre nogle få værdier for H(t), og se den heraf følgende betydning for værdien r:

a) Gå ind i listerne og lav tallet 4009 om til 6000. Find såvel den nye forskrift som den nye værdi af r – og kommentér resultatet.
b) Gå ind i listerne og lav desuden 27001 om til 45000 og 209004 om til 100000. Find såvel den nye forskrift som den nye værdi af r – og kommentér resultatet.
c) Fasthold ændringerne fra pkt. a) og b). Tegn grafen og de opgivne punkter i samme koordinatsystem (jfr. øvelse 1.8.1) – og kommentér resultatet. ♥

Øvelse 1.8.3.

Betragt funktionerne: $f(x) = 1{,}8x + 10$, $g(x) = 10 \cdot 1{,}8^x$ og $h(x) = 10 \cdot x^{1{,}8}$.
Lav en tabel over funktionsværdierne for disse tre funktioner i tallene: 1, 5, 20, 50, 110 og 200.
Gennemfør en eksponentiel regressionsberegning på baggrund af hver af disse tre tabeller – og kommentér resultaterne. ♥

Øvelse 1.8.4.

Gør v.hj.a. grafregneren rede for, at funktionen Q fra øvelse 1.5.5 med god tilnærmelse er en eksponentiel vækstfunktion og find en forskrift for Q.
Tegn grafen for Q og udregn Q(1), Q(11) og Q(25). ♥

Potentiel regression.

Som ved eksponentiel regression må vi tage udgangspunkt i "givne data", og vi vil her anvende dataene fra øvelse 1.7.4. V.hj.a. grafregneren vil vi undersøge U(p), for hvilken vi har følgende registrerede værdier:

p	1,2	2	3,4	4,1	5	5,8	7	7,7	8,6
U(p)	215	267	320	355	380	410	434	455	475

Først skal vi have dataene ind i grafregnerens hukommelse, i listerne, hvilket foregår på præcis samme måde som ved eksponentiel regression. For at få gennemført en potentiel regression vælges PwrReg inde i [STAT], CALC. I displayet står der nu: PwrReg – og markøren står og blinker. Vi vil med dette samme have det fundne resultat gemt i funktionslageret Y_1 , så vi tilføjer Y_1 som forklaret ovenfor – og taster [ENTER].

I displayet står nu:

PwrReg
y = a*x^b
a = 200.044234
b = .401374892
r^2 = .9984928563
r = .999246144

Betydningen af tallet r (og r^2) er den samme som ved eksponentiel regression. Bemærk, at funktionen gives på formen: $y = a \cdot x^b$, dvs. også her er der byttet rundt på rollerne af a og b i fht. afsnit 1.6 (hvor der i øvrigt anvendes både r og a for eksponenten i det generelle funktionsudtryk for en potentiel vækstfunktion).
Resultatet bliver altså: $U(p) = 200{,}0 \cdot p^{0{,}4014}$

Øvelse 1.8.5.

a) Tegn grafen for U(p) fra det ovenstående på grafregneren
b) Udregn U(1), U(10) og U(18) v.hj.a. grafregneren.
c) Tegn både grafen og de målte data (de givne punkter) i samme koordinatsystem. ♥

Øvelse 1.8.6.

For at vurdere betydningen af korrelationskoefficientens størrelse, kan vi prøve at ændre nogle få værdier for U(p), og se den heraf følgende betydning for værdien r:

a) Gå ind i listerne og lav tallet 410 om til 610. Find såvel den nye forskrift som den nye værdi af r – og kommentér resultatet.
b) Gå ind i listerne og lav desuden 455 om til 45 og 475 om til 100. Find såvel den nye forskrift som den nye værdi af r – og kommentér resultatet.
c) Fasthold ændringerne fra pkt. a) og b). Tegn grafen og de opgivne punkter i samme koordinatsystem – og kommentér resultatet. ♥

Øvelse 1.8.7.

Betragt funktionerne: $f(x) = 1{,}8x + 10$, $g(x) = 10 \cdot 1{,}8^x$ og $h(x) = 10 \cdot x^{1{,}8}$.
Lav en tabel over funktionsværdierne for disse tre funktioner i tallene: 1, 5, 20, 50, 110 og 200. (Jfr. øvelse 1.8.3).
Gennemfør en potentiel regressionsberegning på baggrund af hver af disse tre tabeller – og kommentér resultaterne. ♥

Øvelse 1.8.8.

Gør v.hj.a. grafregneren rede for, at funktionen E fra øvelse 1.7.4 med god tilnærmelse er en potentiel vækstfunktion og find en forskrift for E.
Tegn grafen for E og udregn E(1), E(10) og E(18). ♥

Kap. 2: Eksempler på modeller – uden anvendelse af differential- eller integralregning.

2.1. Logaritmefunktioner.

Logaritmefunktioner anvendes internt i matematikkens verden til diverse omskrivninger og til udarbejdelse af logaritmiske papirer.
Udenfor matematikkens verden finder logaritmefunktioner primært anvendelse i to sammenhænge:

- til definition af måleenheder
- til grafisk beskrivelse af data, som kan variere over et meget stort område, og hvor det er vigtigt at kunne aflæse information om værdier i såvel den lave som den høje ende af skalaen.

Der er således tale om en simpel modellering (på beskrivelsesniveau fra faglig til matematisk sammenhæng), hvorimod der kun i ringe grad er tale om en matematisk løsning på et fagligt problem med en efterfølgende faglig fortolkning af den matematiske løsning (jfr. beskrivelsen af matematiske modeller i kapitel 6)

Måleenheder og logaritmiske sammenhænge:

Kemiske opløsninger

Eksempel 2.1.1
Surhedsgraden af en kemisk opløsning afhænger af den aktuelle koncentration $[H_3O^+]$ af oxoniumioner i opløsningen. Jo større koncentrationen af H_3O^+ er, desto "større" er surhedsgraden.
Idet koncentrationerne af oxoniumioner ofte er meget små, plejer man ikke at angive koncentrationerne selv, men derimod pH-værdien defineret ved:

$$pH = -\log([H_3O^+])$$

hvor $[H_3O^+]$ som omtalt står for oxoniumion-koncentrationen.

For rent vand gælder, at $[H_3O^+] = 10^{-7}$ mol/liter, hvor enheden mol står for så mange atomer, som der er i 12 gram kulstof (C^{12}), hvilket vil sige $6{,}023\cdot10^{23}$. (I rent vand er der således $10^{-7}\cdot6{,}023\cdot10^{23}$ oxoniumioner pr. liter, dvs. $6{,}023\cdot10^{16}$ oxoniumioner pr. liter).
Vi finder derfor, at pH-værdien for rent vand – og for en *neutral opløsning* – er:

$$pH = -\log(10^{-7}) = -(-7)\cdot\log 10 = 7.$$

Hvis $[H_3O^+] > 10^{-7}$ mol/liter, så kaldes opløsningen for en *sur opløsning*, og vi har da, idet funktionen –log er aftagende), at pH-værdien er mindre end 7, altså: $pH < 7$.

Hvis $[H_3O^+] < 10^{-7}$ mol/liter, så har vi en *basisk opløsning*, og der gælder: $pH > 7$.

Vi kan således sammenfatte:

pH < 7 for en sur opløsning
pH = 7 for en neutral opløsning
pH > 7 for en basisk opløsning

Det har mange steder betydning, at pH-værdien er den rigtige, idet mange "processer" foregår bedst ved bestemte pH-værdier. Herunder kan nævnes:

1) gæringsprocesser
2) bakteriers vækstforhold
3) vækst i forskellige typer jord
4) blodets pH-værdi har betydning for cellernes funktionsduelighed
5) enzymernes aktivitet

Det skal bemærkes, at oxoniumioner tidligere blev kaldt hydroxoniumioner, samt at man undertiden (specielt i ældre beskrivelser) ser brintioner H^+ anvendt i stedet for H_3O^+ i definitionen af pH-værdi. Men brintioner eksisterer egentlig ikke i opløsninger, idet de altid er bundet til vandmolekyler H_2O, hvormed vi får oxoniumioner. ♥

Øvelse 2.1.2.

a) Bestem koncentrationen af oxoniumioner for en opløsning, hvor pH = 3
b) I visse industribyer har regn ofte en oxoniumion-koncentration på ca. 0,00008 mol/liter. Find den tilsvarende pH-værdi.
   Sammenlign med oxoniumion-koncentrationen for uforurenet nedbør, som har pH ≈ 6
c) Om en syre A gælder, at dens pH-værdi er 2,67, og om en anden syre B gælder, at dens oxoniumion-koncentration er 3 gange så stor som A's koncentration. Bestem pH-værdien for B ♥

Lydstyrke:

Eksempel 2.1.3.

For auditive sanseindtryk (dvs. høreindtryk) og til dels for visuelle sanseindtryk (synsindtryk) gælder Weber-Fechners lov, som kan udtrykkes således:

> Til lige store *relative tilvækster* i den fysiske påvirkning (intensiteten)
> svarer lige store *absolutte tilvækster* i det sansemæssige indtryk.

For at forklare/beskrive dette nærmere vil vi undersøge lyd (med en bestemt frekvens).

Ved lydens *fysiske intensitet* I forstår vi den lydenergi, der pr. sekund passerer en arealenhed vinkelret på lydens udbredelsesretning. (Lydens fysiske intensitet måles derfor i W/m^2, hvor W betyder Watt, dvs. energi pr. tidsenhed).

Hvis den fysiske intensitet f.eks. ændres fra $1 \cdot 10^{-6}$ W/m^2 til $1{,}2 \cdot 10^{-6}$ W/m^2, eller fra $5 \cdot 10^{-5}$ W/m^2 til $6 \cdot 10^{-5}$ W/m^2, så er den absolutte tilvækst i intensiteten 50 gange større i det sidstnævnte tilfælde end det førstnævnte; men den relative tilvækst er den samme i de to tilfælde (nemlig 20 %). Høre-

sansen er da indrettet således, at den i sådan en situation stort set vil betragte forskellen i lydstyrke som værende den samme i de to tilfælde.

Når man skal angive en skala for den *subjektive lydstyrke* (dvs. det sansemæssige indtryk af lydstyrken), så vælger man derfor en logaritmisk skala, idet en vilkårlig voksende logaritmefunktion $\log_c$ netop har den egenskab, at der til lige store relative tilvækster i x svarer lige store absolutte tilvækster i $\log_c(x)$. Dette indses på følgende måde:

Lad x_1 og x_2 være to givne positive tal. Hvis x_1 og x_2 begge forøges med r % (dvs. gives den samme relative tilvækst), så får vi tallene: $\left(1+\frac{r}{100}\right)\cdot x_1$ og $\left(1+\frac{r}{100}\right)\cdot x_2$. Den absolutte tilvækst i $\log_c(x)$ er da givet ved:

$$\log_c\left(\left(1+\tfrac{r}{100}\right)\cdot x_1\right) - \log_c(x_1) = \log_c\left(1+\tfrac{r}{100}\right)$$

$$\log_c\left(\left(1+\tfrac{r}{100}\right)\cdot x_2\right) - \log_c(x_2) = \log_c\left(1+\tfrac{r}{100}\right)$$

hvormed vi ser, at den absolutte tilvækst i $\log_c(x)$ er den samme – den afhænger ikke af x !

Man kunne derfor have valgt at definere den subjektive lydstyrke for en lyd med intensiteten I som $\log_c(I)$ for en eller anden given værdi af c. Problemet med denne definition ville imidlertid være, at den subjektive lydstyrke ville komme til at afhænge af hvilken enhed I måles i – og dermed kunne der skabes internationale og interfaglige problemer.

Man har derfor i stedet for valgt at definere den *subjektive lydstyrke* L svarende til *intensiteten* I på følgende måde:

$$L = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{I_o}\right)$$

hvor I_o er intensiteten af den svagest hørbare tone ("høregrænsen").
Til denne definition skal knyttes en række kommentarer:

- Høregrænsen I_o for en tone med frekvensen 1000 Hz er ca. 10^{-12} W/m^2
- Som logaritmefunktion er valgt titalslogaritmen log
- Størrelsen $\log\left(\frac{I}{I_o}\right)$ måles i enheden bel (opkaldt efter Alexander Graham Bell, der bl.a. opfandt telefonen). Men da dette i praksis er en "stor" enhed, har man valgt at gange med 10 og dermed få den subjektive lydstyrke L målt i *decibel (dB).*
- Der er stadigvæk tale om, at der til lige store relative tilvækster i intensiteten svarer lige store absolutte tilvækster i den subjektive lydstyrke, idet $L = 10\cdot\log\left(\frac{I}{I_o}\right) = 10\cdot\log(I) - 10\cdot\log(I_o)$. Da I_o er en konstant, vil det sidste led ($-10\cdot\log(I_o)$) forsvinde, når vi udregner forskellen mellem to L-værdier. Denne forskel bliver da 10 gange forskellen imellem logaritmen af de tilsvarende intensiteter, og denne forskel er som forklaret ovenfor uafhængig af I.
- Høregrænsen indlægger et nulpunkt for den subjektive lydstyrke, idet hvis $I = I_o$, så er den tilsvarende subjektive lydstyrke L_o givet ved: $L_o = 10\cdot\log\left(\frac{I_o}{I_o}\right) = 10\cdot\log(1) = 0$, dvs. den subjektive lydstyrke L_o af den svageste hørbare tone er 0 dB
- Enheden på I spiller ingen rolle, idet denne enhed også optræder på I_o og dermed forkortes væk i brøken $\frac{I}{I_o}$. ♥

Øvelse 2.1.4.

a) Den øvre grænse for lydstyrke, som øret kortvarigt kan udsættes for uden at tage skade, er omkring 125 dB. På et diskotek er der en aften en gennemsnitlig lydintensitet på 0,04 W/m^2.
Find den tilsvarende subjektive lydstyrke – og kommentér resultatet.

b) Beregn den subjektive lydstyrke for "normal" tale (i 1 meters afstand), idet intensiteten er omkring $0{,}5 \cdot 10^{-6}$ W/m^2.

c) Støjniveauet i en fabrikshal, hvor der bl.a. foregår udskæring og slibning af jernplader og betonfliser, er målt til at ligge imellem 75 og 110 dB.
Beregn de tilsvarende intervalgrænser for lydintensiteten. ♥

Øvelse 2.1.5.

Beregn forøgelsen i dB af den subjektive lydstyrke, hvis intensiteten af lyden fordobles.
Kommentér resultatet.
(Vejledning: Start evt. med en konkret intensitetsværdi og gennemfør beregningen for denne først, inden der laves en generel beregning). ♥

Øvelse 2.1.6.

I forbindelse med anlæggelse af lufthavne (og andre støjende virksomheder) er man interesseret i støjniveauets afhængighed af afstanden fra støjkilden. Hvis man f.eks. skal analysere et jetflys betydning for støjniveauet i nogle eksisterende boliger i nærheden af en påtænkt lufthavn, så skal man udover flyets "take-off"-profil (dvs. hvor er det og i hvilken højde under starten, hvor støjniveauet fra flyet er størst) også vide noget om lydintensitetens afhængighed af afstanden til lyd-/støjkilden.
Der gælder her afstandskvadratloven som siger, at ved en fordobling af afstanden falder intensiteten til en fjerdedel, eller generelt: $I(r) = \frac{I(1)}{r^2}$, hvor I(1) er intensiteten i 1 m afstand, og I(r) er intensiteten i r m's afstand. (Bemærk, at overfladen af en kugle med radius r er givet ved: $4\pi \cdot r^2$).
Man har i afstanden 12 m målt støjniveauet (den subjektive lydstyrke) fra en jetmotor til 130 dB.
Beregn støjniveauet fra en sådan motor i afstandene 100 m, 500m og 1200 m.♥

Eksempel 2.1.7.

I praksis måles lydintensiteten ved at måle det lydtryk, som tonen/lyden/støjen bevirker på det givne målested. (En lydbølges udbredelse foregår ved, at der i de enkelte punkter langs udbredelsesretningen skiftevis skabes over og undertryk, som så forplanter sig igennem luften). Måleudstyret kan måle amplituden – dvs. det maksimale udsving fra ligevægtsstillingen – i disse lufttryk-variationer.
Der gælder, at lydintensiteten er proportional med kvadratet på amplituden, dvs. der findes en konstant k, så $I = k \cdot A^2$, hvor A er amplituden.
Om den subjektive lydstyrke L målt i dB gælder da, at:

$$L = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{I_o}\right) = 10 \cdot \log\left(\frac{k \cdot A^2}{k \cdot A_o^{\,2}}\right) = 10 \cdot \log\left(\frac{A^2}{A_o^{\,2}}\right) = 10 \cdot \log\left(\left(\frac{A}{A_o}\right)^2\right)$$

dvs.

$$\boxed{L = 20 \cdot \log\left(\frac{A}{A_o}\right)}$$

♥

Elektroniske komponenter.

Decibel-skalaer anvendes ikke kun indenfor akustik (lydlære) og andre auditive forhold, men også i forbindelse med en række elektroniske komponenter som antenner, forstærkere, mm.

Eksempel 2.1.8.
I en række elektroniske apparater (radioer, fjernsyn, antenneanlæg, guitarforstærkere, osv. osv.) sidder der elektriske kredsløb hvis opgave enten er at forstærke eller dæmpe elektriske signaler – afhængig af den konkrete situation og behov. Vi taler om et forstærkertrin hhv. et dæmpningstrin.

Ved et forstærkertrin defineres *forstærkningen* (eller forstærkningsgraden) F som:

$$F = 10 \cdot \log\left(\frac{P_{ud}}{P_{ind}}\right)$$

hvor P_{ud} er signalets udgangseffekt (målt i Watt) og P_{ind} er signalets indgangseffekt (dvs. effekten inden det møder forstærkertrinet). Forstærkningen måles i *decibel (dB)*.
Da effekten P af et elektrisk signal er proportional med strømstyrken i anden potens, dvs. $P = k \cdot I^2$, kan forstærkningen også udtrykkes ved: $F = 20 \cdot \log\left(\frac{I_{ud}}{I_{ind}}\right)$ (Jfr. omskrivningen i eksempel 2.1.7).

Ved et dæmpningstrin defineres *dæmpningen* (eller dæmpningsgraden) D almindeligvis/ofte som

$$D = \left|10 \cdot \log\left(\frac{P_{ud}}{P_{ind}}\right)\right| = \left|20 \cdot \log\left(\frac{I_{ud}}{I_{ind}}\right)\right|$$

dvs. man tager den numeriske værdi for at få et positivt tal, idet en dæmpning bevirker, at $P_{ud} < P_{ind}$ hvormed logaritmen til brøken bliver negativ. Også dæmpningen måles i dB. ♥

Øvelse 2.1.9.

Argumentér for, at dæmpningen D også kan findes som: $D = 10 \cdot \log\left(\frac{P_{ind}}{P_{ud}}\right) = 20 \cdot \log\left(\frac{I_{ind}}{I_{ud}}\right)$ ♥

Øvelse 2.1.10.

a) Ved et forstærkertrin er indgangseffekten $6{,}5 \cdot 10^{-5}$ W og udgangseffekten 4 W.
Hvor stor er forstærkningen – målt i dB ?
b) Et forstærkertrin har en forstærkning på 76 dB. Hvor stor er udgangsstrømstyrken, når indgangsstrømstyrken er $3{,}2 \cdot 10^{-6}$ A ?
c) Betragt et dæmpningstrin med dæmpningen 15 dB. Hvor mange % bliver effekten af et signal dæmpet ved passage af dette dæmpningstrin ? ♥

Eksempel 2.1.11.
I mange sammenhænge (f.eks. i en radios modtagelse af signaler via en antenne eller i en seismografs opsamling af rystelser i undergrunden) er der udover det ønskede signal også iblandet "*støj*", dvs. uønskede signaler som forstyrrer de signaler, man i den givne situation er interesseret i at modtage/analysere/måle på. (Bemærk det generelle udsagn, at hvad der for en person er støj, kan for en anden person være det ønskede "signal").

Det såkaldte *signal/støj-forhold* indføres til at beskrive forholdet mellem styrken af det ønskede signal og af støjen, således at et godt signal/støj-forhold giver en stor værdi og et dårligt signal/støj-forhold giver en lille værdi. *Signal/støj-forholdet SNR målt i decibel (dB)* defineres på følgende måde:

$$\text{SNR} = 10 \cdot \log\left(\frac{\text{signalstyrke}}{\text{støjstyrke}}\right)$$

Signalstyrken er det ønskede signals gennemsnitlige effekt, og støjstyrken er tilsvarende støjens (de uønskede signalers) gennemsnitlige effekt. (Der anvendes de gennemsnitlige effekter, idet der kan være en ikke-uvæsentlig variation i de øjeblikkelige effekter).

Almindeligvis er der i det konkrete elektroniske apparat tale om spændinger eller strømstyrker, og som i de ovenstående eksempler kan SNR også udtrykkes ved forholdet imellem disse, idet faktoren 10 erstattes af faktoren 20 foran log til forholdet mellem spændingerne eller mellem strømstyrkerne. Bemærk, at med disse definitioner af SNR opnår vi, at et større SNR svarer til et renere signal.

Når man skal angive SNR for et givet apparat, bruger man ofte vendingen, at apparatets SNR er "bedre end xx dB", (altså f.eks. bedre end 65 dB) for dermed at antyde en nedre grænse og en worst-case beskrivelse. ♥

Øvelse 2.1.12
a) I databladet bagest i brugervejledningen til en radiomodtager kan læses, at dens signal/støj-forhold er bedre end 48 dB. Hvor mange gange større er signalstyrken end støjstyrken. ?
b) Om en seismograf vises, at dens SNR er bedre end 34 dB. Hvor mange % udgør støjstyrken af signalstyrken. ?
c) Udregn SNR for et apparat, hvor støjstyrken er 0,021 % af signalstyrken. ♥

Stjerners lysstyrke:

Eksempel 2.1.13.
Solen er den stjerne, der er nærmest jorden, og om dagen lyser den så kraftigt, at vi ikke kan se de øvrige stjerner (selvom de naturligvis stadigvæk er der). De øvrige stjerner på himlen, (som kan ses om natten), kan nemt være lige så stærke som eller stærkere end solen (forstået som samlet energiudsendelse pr. tidsenhed), men deres meget større afstand til jorden gør, at de virker meget svagere. Det afgørende begreb for at beskrive disse forhold er intensiteten i den stråling, vi modtager.

Intensiteten I bestemmes som den energimængde, der pr. tidsenhed modtages pr. arealenhed. Intensiteten I kan derfor måles i W/m^2. Da det er klart, at den energimængde, der registreres pr. arealenhed bliver mindre, jo længere væk en given energikilde er ("afstandskvadratloven"), er stjernernes intensitet registreret her fra Jorden ikke et mål for, hvor meget energi de i virkeligheden udsender. Dette omtales yderligere i eksempel 2.1.16.

I oldtiden inddelte den græske astronom Hipparch (eller Hipparchos) (190-125 f.Kr.) stjernerne i 6 grupper, afhængig af hvor klare de var, dvs. afhængig af den lysstyrke som det menneskelige øje så dem med. Disse 6 grupper, som kaldes *(tilsyneladende) størrelsesklasser*, blev nummereret 1 til 6, med de kraftigst lysende stjerner i gruppe 1 og de svagest lysende i gruppe 6 (dvs. gruppe 6 indeholdt de stjerner, man kun lige netop kunne se).
Hipparch angav de tilsyneladende størrelsesklasser for ca. 1000 stjerner i et katalog, hvor antallet af stjerner i klasserne 1 til 6 var: 14, 45, 208, 474, 217, 49. Dette katalog blev af Ptolemæus medtaget i den store astronomiske lærebog Almagest (udgivet omkring 140 e. Kr.), som var "værket" i en periode på mere end 1000 år. Dette er måske forklaringen på, at man i moderne tid har valgt at fastholde en skala for stjernernes observerbare intensitet, som nogenlunde stemmer overens med oldtidens visuelle observationer.
Det kræver et trænet øje at vurdere den tilsyneladende størrelsesklasse med det blotte øje. Men det er også en vanskelig opgave at måle en given stjernes intensitet – en opgave som igennem de seneste par hundrede år er blevet løst mere og mere sofistikeret via den tekniske udvikling – med anvendelse af fotografiske og fotoelektriske metoder suppleret med dataopsamling via computere.
I dag bruger man almindeligvis et CCD-kamera ("charge-coupled device" lavet af silicium).

Det visuelle (synsmæssige) indtryk af intensiteten i forhold til den fysiske registrering heraf følger Weber-Fechner's lov (se eksempel 2.1.3). Skalaen for den tilsyneladende størrelsesklasse m for en stjerne med intensiteten I defineres derfor ved følgende udtryk:

$$m = k_1 \cdot \log(I) + k_2$$

hvor k_2 er en konstant, der fastlægger skalaens nulpunkt, og k_1 bl.a. fastlægger størrelsen af enhederne på skalaen.
Gennem en række målinger fandt man ud af, at intensiteten af en gennemsnitsstjerne i den klassiske størrelsesklasse 1 var ca. 100 gange så stor som intensiteten af en gennemsnitsstjerne i størrelsesklasse 6. I fastlæggelsen af skalaen blev det derfor bestemt, at følgende ligninger skal opfyldes:

$$1 = k_1 \cdot \log(I_1) + k_2 \qquad \text{og} \qquad 6 = k_1 \cdot \log(I_6) + k_2$$

hvor I_1 og I_6 er den fysiske intensitet af de omtalte gennemsnitsstjerner. Da $I_1 = 100 \cdot I_6$ får vi heraf:

$$6 - 1 = k_1 \cdot \log(I_6) + k_2 - (k_1 \cdot \log(I_1) + k_2) \Rightarrow 5 = k_1 \cdot (\log(I_6) - \log(100 I_6)) \Rightarrow 5 = k_1 \cdot \log\left(\frac{I_6}{100 I_6}\right)$$

hvoraf vi ser, at $k_1 = -2{,}5$ (Kontrollér).
I definitionen af den tilsyneladende størrelsesklasse får vi nu, at: $m = -2{,}5 \cdot \log(I) + k_2$.
Bemærk, at k_1 er negativ, hvilket passer med den besynderlighed, at jo større intensiteten for stjernen er, desto mindre er størrelsesklassen (jfr. oldtidens definition beskrevet ovenfor).

Vi mangler endnu at få fastlagt nulpunktet på skalaen, og dermed værdien af k_2. Dette har vist sig at være en meget vanskelig sag (idet k_2 kan afhænge af egenskaber ved det anvendte apparatur, den

anvendte enhed for intensiteten, sigtbarheden på det konkrete geografiske sted, stjernens højde over horisonten, forskellig intensitet i forskellige dele af lysspektret fra stjernerne mm.) Men <u>princippet</u> er simpelt: For at bringe størst mulig overensstemmelse med den klassiske definition af den tilsyneladende størrelsesklasse, skal k_2 have en størrelse, så stjerner, der lige netop kan ses med det blotte øje, tildeles en tilsyneladende størrelsesklasse på 6.
I praksis vælges en lidt anden vej. Hvis vi tænker os, at vi kender både den tilsyneladende størrelsesklasse m_o og den fysiske intensitet I_o for en given stjerne (en såkaldt *referencestjerne*), så har vi: $m_o = -2{,}5 \cdot \log(I_o) + k_2$ og dermed: $k_2 = m_o + 2{,}5 \cdot \log(I_o)$. Indsættes dette i den generelle ligning: $m = -2{,}5 \cdot \log(I) + k_2$ får vi (kontrollér):

$$m = m_o - 2{,}5 \cdot \log\left(\frac{I}{I_o}\right)$$

Som referencestjerne skal vælges en stjerne, som lyser klart og som er let at finde, og dens tilsyneladende størrelsesklasse skal sættes til en værdi, så der bliver størst mulig overensstemmelse med det klassiske størrelsesklassesystem. Valget er faldet på den klare stjerne Vega i stjernebilledet Lyren, og dens tilsyneladende størrelsesklasse sættes til $m_o = 0$. I alt får vi da:

$$\boxed{m = -2{,}5 \cdot \log\left(\frac{I}{I_{Vega}}\right)}$$

Der er mange fordele ved denne definition:

- Ved at anvende forholdet mellem intensiteter undgår man problemer med hvilke enheder intensiteten måles i.
- Ved at anvende forholdet mellem intensiteter undgår man problemer med kalibrering af sit måleudstyr (kalibrering betyder justering af udstyret for at stemme overens med en given skala).
- Måleprincip: Når man skal måle på en given stjerne, måler man først på Vega, registrerer dens intensitet med det udstyr man bruger og den situation man nu befinder sig i, hvorefter man måler intensiteten af den givne stjerne.
- Der er som omtalt høj grad af overensstemmelse med det klassiske størrelsesklassesystem. ♥

<u>Øvelse 2.1.14.</u>

a) Vis, at der for to vilkårlige stjerner 1 og 2 gælder, at: $m_1 - m_2 = -2{,}5 \cdot \log\left(\frac{I_1}{I_2}\right)$

b) Vis, at der for to vilkårlige stjerner 1 og 2 gælder, at: $\frac{I_1}{I_2} = 10^{0{,}4 \cdot (m_2 - m_1)}$

c) To stjerner X og Y har de tilsyneladende størrelsesklasser 3,4 hhv. 4,4.
Hvor mange gange større er intensiteten af X end af Y ? Kommentér resultatet. ♥

<u>Øvelse 2.1.15.</u>

a) Stjerner der lyser stærkere end Vega har en <u>negativ</u> tilsyneladende størrelsesklasse. Hvorfor ?

b) Stjernen Sirius har en tilsyneladende størrelsesklasse på –1,46 og Solen har en tilsyneladende størrelsesklasse på –26,74.
Som omtalt kan intensiteterne måles i W/m^2, og i en måling findes, at $I_{Sol} = 1353\ W/m^2$.
Bestem værdierne af I_{Sirius} og I_{Vega} ♥

Eksempel 2.1.16.
Som omtalt i indledningen til eksempel 2.1.13, vil den energimængde, der registreres pr. arealenhed bliver mindre, jo længere væk en given energikilde er, hvormed stjernernes intensitet registreret her fra Jorden ikke er et mål for, hvor meget energi de i virkeligheden udsender. Dette ligger gemt i ordet *tilsyneladende* størrelsesklasse. (Nogle stjerner ser ud til at lyse kraftigere end andre stjerner, selvom de i realiteten ikke udsender så meget energi – de er bare tættere på Jorden).

Skal vi sammenligne to stjerners energiudstråling, så skal de altså ligge i samme afstand fra Jorden. Dette er desværre sjældent tilfældet i praksis. Vi laver derfor et tankeeksperiment: Vi flytter alle stjerner hen i samme afstand fra Jorden, registrerer deres intensitet dér – og kan derefter sammenligne dem. De stærkest lysende stjerner vil da være dem med den største energiudsendelse og de svagest lysende stjerner dem med den mindste energiudsendelse.

Selvom det kun er et tankeeksperiment, har det vist sig formålstjenligt at indføre den størrelsesklasse, som de enkelte stjerner ville have, hvis de var i en bestemt afstand fra Jorden. Som denne afstand har man af forskellige årsager valgt 10 parsec, hvor parsec er en særlig længdeenhed, hvis definition vi ikke skal komme nærmere ind på (1 parsec = $3{,}086\cdot10^{16}$ m).

Vi fastsætter hermed følgende: Ved den *absolutte størrelsesklasse* M for en stjerne forstår vi den størrelsesklasse, som stjernen ville have, hvis den befandt sig i afstanden 10 parsec fra Jorden.

Ifølge eksempel 2.1.13 har vi, at: $M = -2{,}5\cdot\log(I_{10}) + k_2$, hvor I_{10} er den fysiske intensitet vi ville måle, hvis stjernen var i afstanden 10 parsec. Vi har desuden, at: $m = -2{,}5\cdot\log(I_r) + k_2$, hvor I_r er den faktisk registrerede intensitet. Indekset r på I_r skal angive stjernens reelle afstand til Jorden. På baggrund heraf ses (kontrollér), at:

$$M - m = -2{,}5\cdot\log\left(\frac{I_{10}}{I_r}\right)$$

Som omtalt gælder afstandskvadratloven for intensiteter: $I(r) = \frac{I(1)}{r^2}$, hvor I(1) er intensiteten i afstanden 1 længdeenhed og I(r) er intensiteten i afstanden r længdeenheder fra energikilden.
I den ovenstående situation med stjernerne får vi:

$$I_r = \frac{I(1)}{r^2} \qquad \text{og} \qquad I_{10} = \frac{I(1)}{10^2}$$

hvor afstandene måles i parsec.

Vi ser, at: $\frac{I_{10}}{I_r} = \frac{r^2}{10^2}$ og dermed, at: $M - m = -2{,}5\cdot\log\left(\frac{r^2}{10^2}\right) = -5\cdot\log(r) + 5$ (Kontrollér !)

Der gælder altså følgende sammenhæng for en given stjerne mellem den absolutte størrelsesklasse, den tilsyneladende størrelsesklasse og afstanden (målt i parsec):

$$\boxed{M = m - 5\cdot\log(r) + 5}$$

For nogle stjerner er man ved forskellige avancerede metoder i stand til at bestemme (måle eller estimere) afstanden r, for andre er man ved andre avancerede metoder i stand til at vurdere den absolutte størrelsesklasse M. Ved kendskab til den tilsyneladende størrelsesklasse m kan M eller r herefter beregnes.

Kendskab til stjernernes afstand indgår i en række astronomiske modeller, herunder universets opbygning og ekspansion. Kendskab til en stjernes absolutte størrelsesklasse indgår i andre astronomiske modeller, hvor stjernens samlede energiudsendelse kan bestemmes ud fra M. Denne samlede energiudsendelse spiller en afgørende rolle for hvordan man skønner, at stjernen er opbygget og hvor langt den er i sin udvikling.
Nu er nærværende bog ikke en lærebog i astronomi, men derimod en bog, hvor bl.a. anvendelse af logaritmiske skalaer og formler skulle præsenteres. Vi standser derfor gennemgangen her – og overlader interesserede læsere til den astronomiske litteratur på områderne. ♥

Øvelse 2.1.17.

a) Vis, at hvis to stjerner har samme absolutte størrelsesklasse (og dermed samme totale energiudstråling pr. tidsenhed), så gælder der følgende formel mellem deres tilsyneladende størrelsesklasser m_1 og m_2 og deres afstande r_1 og r_2 til Jorden:

$$m_1 - m_2 = 5 \cdot \log\left(\frac{r_1}{r_2}\right)$$

b) Hvor stor er forskellen i den tilsyneladende størrelsesklasse for to lige lysstærke stjerner, hvor den ene er dobbelt så langt væk fra jorden som den anden ?

c) Hvor stor en procentuel afstandsforskel svarer til en forskel på 1 i den tilsyneladende størrelsesklasse for to lige lysstærke stjerner ? ♥

Øvelse 2.1.18.

Som nævnt i det ovenstående gælder, at $m_{Vega} = 0$ og $m_{Sol} = -26{,}74$.

a) Afstanden til Vega er 7,5 parsec. Hvor stor er Vegas absolutte størrelsesklasse ?

b) Middelafstanden til Solen er ca. $1{,}496 \cdot 10^{11}$ m. Hvor stor er Solens absolutte størrelsesklasse ?

Sammenlign de to resultater og kommentér. ♥

Øvelse 2.1.19.

Om en stjerne har man vurderet, at dens absolutte størrelsesklasse er – 3,7 og dens tilsyneladende størrelsesklasse er 3,1. Hvor langt fra Jorden befinder denne stjerne sig ? ♥

Fotografering.

Uanset om man fotograferer analogt (på filmruller) eller digitalt er der fire parametre/faktorer til at bestemme lyspåvirkningen af filmen eller de digitale sensorer:

- Lysstyrken fra selve lyskilden (dvs. lysstyrken på motivet)
- Blænden (dvs. størrelsen af den åbning, der opstår, når man trykker på udløseren på kameraet)
- Lukketiden (dvs. hvor lang tid blænden er åben – burde måske hedde åbningstiden, men ….)
- Filmens eller sensorernes følsomhed overfor lyset.

På de fleste moderne kameraer er der en eller anden form for automatik, som aflæser filmens lysfølsomhed, måler lysstyrken på motivet og fastlægger lukketiden og/eller blænden, men på mange af de specielt lidt dyrere kameraer kan man slå denne automatik fra og selv foretage sine valg af disse parametre (hvilket specielt bruges af professionelle fotografer, fotoentusiaster mm.).

Eksempel 2.1.20
Verdens første fotografi blev taget i 1826 af Joseph Niépce. Eksponeringstiden (dvs. den tid lyset fik lov at påvirke den lysfølsomme fotografiske plade) var ca. 8 timer, og resultatet var derefter.
Op igennem 1800-tallet blev der gjort en række opdagelser og opfindelser, som både forbedrede fotografiets kvalitet, anvendelsesmuligheder og tilgængelighed. I 1878 blev Eastman Kodak Company (kort: Kodak) grundlagt af amerikaneren George Eastman, og i 1888 blev der i Berlin grundlagt en virksomhed med et langt navn, som blev forkortet til Agfa. Disse to selskaber var i lang tid de førende i hhv. USA og Europa indenfor fotoartikler.
I slutningen af 1800-tallet var man kommet så langt i udviklingen, at der viste sig behov for at kunne angive en films *lysfølsomhed* – eller dens *hastighed*, som det også blev og stadig bliver kaldt.
To engelske videnskabsmænd (F. Hurter og V.C.Driffield) opfandt en metode og en skala – den såkaldte **H&D-skala** – til at definere en films lysfølsomhed. Nogenlunde samtidig (i 1894) opfandt tyskeren Julius Scheiner en anden metode til at angive filmens hastighed. Den tilhørende skala kaldes **Scheiner-Grad.**
Udviklingen fortsatte med øget intensitet op igennem 1900-tallet. F.eks. blev spejlreflekskameraet opfundet i 1903, i 1906 blev der opfundet film, som er lige følsom overfor alle dele af farvespektret og som derfor giver en bedre/mere korrekt gråtoning af billedet (som stadigvæk var "sort-hvidt"), og i 1928 en lysmåler, så man bedre kunne bestemme den korrekte eksponeringstid til de "hurtigere" film, der i bedre og bedre kvalitet var kommet på markedet siden slutningen af 1800-tallet.

Den tyske virksomhed Agfa videreudviklede på Hurter og Driffields arbejde og fandt i begyndelsen af 1930'erne en praktisk metode til måling af films lysfølsomhed, en metode som blev accepteret som national standard: **DIN-skalaen**. Denne metode/skala afløste H&D-skalaen og Scheiner-Grad. (DIN kommer af: Deutsche Industrie Norm eller som det hedder i dag: Deutsches Institut für Normung). Nogenlunde samtidig opfandt amerikaneren Edward Weston den første elektroniske lysmåler – og firmaet Weston indførte sin egen skala, **Weston-skalaen**, der var designet til at skulle bruges sammen med den nye lysmåler-type, der hurtigt blev meget populær. Omkring 1940 kom Kodak med deres bud på en skala, som af ASA (American Standard Association) blev gjort til den amerikanske norm på området, **ASA-skalalen**, ligesom British Standard (**BS**) også arbejdede med emnet.

De omtalte skalaer til bestemmelse og angivelse af films lysfølsomhed bygger på forskellige – og undertiden besværlige – metoder, som også bevirker, at nogle af dem (ASA/Weston) er lineære skalaer, hvor en fordobling eller halvering af skalaværdien svarer til en fordobling eller halvering af følsomheden, hvorimod andre (DIN/H&D/Scheiner) er logaritmiske skalaer (bygger på sansemæssige indtryk).
I 1960-1962 blev der arbejdet på en international metode/standard (**ASA/BS/DIN**), som byggede på lidt af hvert fra de tidligere skalaer, men samtidig blev baseret på en væsentligt simplere metode.
I denne standard blev der fastlagt følgende sammenhæng:

$$DIN = 1 + 10 \cdot \log(ASA)$$

En ASA-værdi på 100 giver således en DIN-værdi på 21, og en DIN-værdi på 27 svarer til en ASA-værdi på 400 i afrundede tal (Kontrollér !). ASA er stadigvæk en lineær skala, og DIN er, som det fremgår, baseret på en logaritmefunktion.

I Sovjetunionen og Østeuropa brugte man deres eget **GOST-system** til angivelse af lysfølsomhed. GOST er et lineært system på linie med ASA, men med lidt lavere værdier i skalaen.

Siden har den internationale standardiseringsorganisation ISO (som beskæftiger sig med meget andet end film) overtaget specifikationen. F.eks. angiver standarden ISO 5800: 1987 (altså nr. 5800 fra året 1987) hvordan man skal måle og angive hastigheden/lysfølsomheden for farve-negativ film. ISO bruges nu i stedet for de andre omtalte skalaer, om end der er reminiscenser fra de tidligere systemer i måden man angiver værdien på. ISO lader nemlig filmhastigheden blive anført med to værdier: en lineær og en logaritmisk. F.eks. er en ISO $400/27^{o}$ film en film, hvor 400 svarer til ASA/BS-værdien og 27^{o} svarer til DIN-værdien. (Tegnet ^{o} har ikke noget med temperatur at gøre !).

Bemærk, at i alle skalaerne er det således, at jo større filmhastighed/lysfølsomhed, desto hurtigere eller mere lysfølsom er filmen, hvormed der kræves mindre lys til at opnå et godt resultat. På denne måde tillader brugen af "hurtigere" film, at man kan anvende kortere lukketid eller mindre blænde. Bemærk ligeledes, at en films hastighed/lysfølsomhed er fastlagt i produktionsprocessen og ikke kan ændres under brugen af filmen. ♥

Øvelse 2.1.21.
I eksempel 2.1.20 omtales, at en fordobling i ASA-værdien svarer til en fordobling i lysfølsomheden af de betragtede film.
Argumentér for, at en fordobling hhv. en halvering af lysfølsomheden svarer til en forøgelse hhv. en formindskelse på ca. 3 i DIN. ♥

Øvelse 2.1.22.
Lav en tabel, som angiver (afrundede) ASA-værdien for film med heltallige DIN-værdier fra 15 til og med 33, og kommentér resultatet. ♥

Eksempel 2.1.23.
Som omtalt i indledningen til dette delafsnit om fotografering er der fire faktorer, der bestemmer påvirkningen af filmen (eller de digitale sensorer):

- Lysstyrken fra selve lyskilden (dvs. lysstyrken på motivet)
- Blænden (dvs. størrelsen af den åbning, der opstår, når man trykker på udløseren på kameraet)
- Lukketiden (dvs. hvor lang tid blænden er åben)
- Filmens (eller sensorernes) følsomhed overfor lyset, (som vi har beskæftiget os indgående med i eksempel 2.1.20).

Den lysmængde, der slipper ind i kameraet, afhænger af blændens og af lukketidens størrelser. Jo større disse er, desto mere lys kommer der ind. Den indslupne lysmængdes påvirkning af filmen afhænger af filmens lysfølsomhed (der som omtalt i eksempel 2.1.20 også kaldes filmens hastighed). Jo større lysfølsomhed/filmhastighed, desto større påvirkning.
Som et **samlet mål** for disse tre faktorers virkning, dvs. for den lysmængde der slipper ind i kameraet **og** for dens påvirkning af filmen, benyttes begrebet/enheden *exposure value* (eksponeringsværdi), der forkortes *EV*.
EV-skalaen er indrettet på den lidt "bagvendte" måde, at jo større EV, desto mindre blændeåbning, lukketid eller filmhastighed – eller en kombination heraf – skal der til for at opnå et godt resultat. Denne bagvendthed fjernes måske, hvis vi ser på problemstillingen på en lidt anden måde. Jo større lysstyrke der er på motivet, desto mindre blændeåbning, lukketid eller filmhastighed skal der til at give et godt resultat. En stor EV værdi svarer dermed til et kraftigt belyst motiv.

Måleenhed EV ses derfor ofte anvendt på (løse eller indbyggede) lysmålere. Disse indstilles først til en bestemt lysfølsomhed (svarende til lysfølsomheden for den film man aktuelt bruger), hvorefter lysstyrken på motivet aflæses på (registreres af) lysmåleren. Herefter indstilles kameraet (gennem valg af film (med en vis følsomhed), blændestørrelse og lukketid) til at passe til motivets EV-værdi. Vi skal altså have lysstyrken på motivet til at passe til den rigtige kombination af blænde, lukketid og filmhastighed i kameraet.

EV-skalaen er indrettet således, at hvis lysstyrken på motivet fordobles, så forøges EV med 1, og hvis lysstyrken på motivet halveres, så formindskes EV med 1.
Hvis vi ser på situationen fra "kameraets synsvinkel", så svarer dette til, at hvis den samlede påvirkning af en film med en given kombination af "kamera-parametrene": blændestørrelse, lukketid og filmhastighed fordobles, så aftager EV med 1, og hvis den samlede påvirkning halveres, så stiger EV med 1.
En fordobling af den samlede påvirkning af filmen kan opnås ved at fordoble blændens areal, ved at fordoble den tid blænden er åben (dvs. lukketiden) **eller** ved at fordoble filmens lysfølsomhed.
Da hver af disse fordoblinger vil føre til reduktion i EV-værdien med 1, vil en oplagt definition af EV ud fra kamera-parametrene bygge på anvendelse af logaritmefunktionen $\log_2$ med grundtal 2 på følgende måde:

$$EV = \text{konst.} - \log_2(\text{blænderareal} \cdot \text{lukketid} \cdot \text{lysfølsomhed})$$

idet der om $\log_2$ gælder, at: $\log_2(2x) - \log_2(x) = \log_2\left(\frac{2x}{x}\right) = \log_2(2) = 1$ for et givent $x > 0$.
En fordobling af x giver altså en forøgelse på 1 i $\log_2$-værdien, hvormed en fordobling giver en formindskelse på 1 i $-\log_2$-værdien.
Konstanten bruges til at fastlægge nulpunktet for EV-skalaen. Bemærk, at ved at gange de tre "kamera-parametre" med hinanden vil en fordobling i blot en af dem give en formindskelse på 1 i EV.

For at fuldende definitionen af EV-skalaen mangler vi nu at fastlægge, hvordan og i hvilke enheder blændeareal, lukketid og lysfølsomhed skal måles, samt hvordan nulpunktet – og dermed konstanten – skal fastlægges.
Vi starter med de nemmeste: lukketiden og filmens lysfølsomhed.
Lukketiden måles i sekunder, og lysfølsomheden måles i den første værdi i ISO-angivelsen (altså ASA-tallet) delt med 100. (Vedr. ISO og ASA: se eksempel 2.1.20. Bemærk, at der anvendes den lineære ASA-skala og ikke den logaritmiske DIN-skala for at sikre, at en fordobling af værdien giver en fordobling af lysfølsomheden). Der deles med 100 for at undgå for store EV-værdier.

Blændearealet er noget mere kompliceret, som det følgende vil vise.
Den linse, der anvendes i kameraet, har en vis brændvidde (afstanden fra centrum af linsen til det punkt, hvor parallelle stråler, som sendes vinkelret ind på linsen langs med linsens akse, samles). Denne brændvidde kaldes på engelsk: focal length og benævnes med "f".
Blændens størrelse angives nu ved diameteren af blænden udtrykt i brøkdele af f. Hvis vi f.eks. har en f/11-blændestørrelse, så betyder det, at blændens diameter er 1/11 af linsens brændvidde (den skrå streg i notationen f/11 er altså et divisionstegn !). Hvis vi derfor har en 80 mm linse, dvs. en linse med en brændvidde på 80 mm, så er diameteren i f/11-blænden 80/11 mm, dvs. ca. 7,3 mm.
Blændeåbningens areal er derfor proportional med $(f/11)^2$ (overvej dette !), hvormed tallet der anføres efter f/ er et mål for blændearealet for et givet kamera. Dette tal kaldes *f-tallet* for blænden.

Af praktiske årsager kan man ikke have alle mulige blændeåbninger i et kamera. I moderne kameraer (med tilhørende linser) har man almindeligvis valgt at kunne indstille kameraets blændeværdi på følgende positioner (eller en delsekvens heraf): f/1, f/1.4, f/2, f/2.8, f/4, f/5.6, f/8, f/11, f/16, f/22, f/32, f/45 og f/64, (hvor der af opskrivningsmæssige årsager er brugt decimal-punktum, hvilket også er almindeligt i praksis, hvor man på kameraet/linsen mm. oftest blot anfører f-tallet). Hvis vi kun ser på f-tallet fremgår det, at denne sekvens af værdier netop svarer til, at man kommer fra det ene f-tal til det næste ved at gange med $\sqrt{2}$. (Bemærk, at der af praktisk årsager benyttes afrundede værdier for f-tallene). Bemærk desuden, at hvis f-tallet ganges med $\sqrt{2}$, så svarer det netop til, at blændeåbningens areal bliver halveret (overvej !!), hvormed der slipper halvt så meget lys igennem.

I definitionen af EV-skalaen anvendes f-tallet som mål for blændens størrelse. f-tallet har ingen enhed og er uafhængig af hvilken enhed brændvidden for linsen måles i. Som omtalt er blændearealet proportional med $(\text{f-tallet})^{-2}$, og det er netop denne størrelse man har valgt at lade indgå i definitionen af EV.

Vi har dermed nået frem til, at:

$$\text{EV} = \text{konst.} - \log_2((\text{f-tallet})^{-2} \cdot t \cdot \text{ASA}/100),$$

hvor t er lukketiden målt i sekunder og ASA står for filmens ASA-værdi (det første tal i filmens ISO-værdi). Vi mangler nu blot at fastlægge konstanten. Værdien af denne findes af, at man pr. definition sætter EV = 0 for en ISO100 –film, når lukketiden t er 1 sekund og f-tallet er 1. Dette giver os:

$$0 = \text{konst.} - \log_2((1)^{-2} \cdot 1 \cdot 100/100) = \text{konst.} - \log_2(1) = \text{konst.}$$

hvoraf vi ser, at konstanten er 0.
Det endelige udtryk for EV-skalaen ser dermed således ud:

$$\text{EV} = -\log_2\left(\frac{1}{(\text{f}-\text{tallet})^2} \cdot t \cdot \frac{\text{ASA}}{100}\right)$$

Bemærk, at man ved angivelse af EV-værdier ofte runder af til hele tal, således at hvis f.eks. f-tallet er 5.6, t = 1/125 sek. og ASA = 400, så er: EV = 9,937, men det vil blive anført som EV = 10.

Afslutningsvist skal det bemærkes, at nogle kameraer har en speciel indstillingsmulighed (en såkaldt eksponeringskompensering) – typisk med værdierne +2, +1, 0, –1 og –2 – som fotografen kan bruge til bevidst at under- eller overbelyse filmen. De angivne talværdier er angivet i EV. ♥

Øvelse 2.1.24.
Anvend sætning 1.1.9 og formlen for EV i eksempel 2.1.23 til at udregne EV-værdierne i følgende situationer (husk at afrunde værdierne):
a) f-tallet = 1.4, lukketid = 1/60 sek. for en ISO 400/27°-film.
b) t = 1/250, ASA = 800 og f-tallet = 22
c) ASA = 200, f-tallet = 5.6 og t = 1/500 ♥

Øvelse 2.1.25.
Vis, at formlen for EV også kan udtrykkes på følgende måder:

$$\text{EV} = \log_2\left(\frac{(\text{f}-\text{tallet})^2}{\text{t}}\cdot\frac{100}{\text{ASA}}\right) \quad \text{og} \quad \text{EV} = 3{,}32\cdot\log\left(\frac{(\text{f}-\text{tallet})^2}{\text{t}}\cdot\frac{100}{\text{ASA}}\right)$$

Benyt hver af disse formler til at bestemme EV-værdien i øvelse 2.1.24 a). ♥

Øvelse 2.1.26.
På mange kameraer er lukketiden angivet i spring, typisk med følgende værdier (i sekunder):
1, ½, ¼, 1/8, 1/15, 1/30, 1/60, 1/125, 1/250, 1/500, 1/1000, 1/2000. Bemærk, at der i alt væsentligt er tale om en halvering af lukketiden fra et skridt til det næste i denne række af værdier.
På tilsvarende måde er f-tallene som omtalt i eksempel 2.1.23 almindeligvis angivet i spring med følgende værdier: 1, 1.4, 2, 2.8, 4, 5.6, 8, 11, 16, 22, 32, 45 og 64, hvor et spring fra en værdi til den næste svarer til en halvering af blændeåbningens areal.
Betragt en given film med en given lysfølsomhed/filmhastighed, som fastholdes i det følgende, og antag, at der på motivet er en bestemt lysstyrke – hvormed der skal anvendes en bestemt EV-værdi.

a) Argumentér for, at for at sikre et godt billede skal et spring fremad i rækken af værdier for lukketiden modsvares af et spring tilbage i rækken af værdier over f-tallene – og omvendt.

I praksis vil den såkaldte dybdeskarphed i billedet afhænge af blænden: Jo større blændeareal, desto mindre et område vil fremstå skarpt på billedet. Denne effekt kan derfor opnås ved at vælge blænden – og dermed lukketiden passende.

b) På et givet motiv er lysstyrken EV = 12, og der benyttes en 200 ASA film. Opstil en liste af sammenhørende værdier af f-tal (blænden) og lukketiden t, som vil give gode resultater for et kamera, som har følgende lukketider til rådighed: 1/8, 1/15, 1/30, 1/60, 1/125, 1/250, 1/500. Hvilket af f-tallene giver den mindste dybdeskarphed (bruges til portrætfoto, hvor personen skal stå skarpt i billedet, medens baggrunden skal stå uskarp) ? ♥

Øvelse 2.1.27.
Betragt en given værdi af f-tallet og lukketiden t.

a) Argumentér for, at der findes en konstant c, så $\text{ASA} = \text{c}\cdot 2^{-\text{EV}}$
b) Bestem værdien af c, hvis f-tallet er 11 og lukketiden er 1/60 sek.
c) Hvilken filmfølsomhed bør vælges, hvis der på et motiv er en lysstyrke på EV = 10, og vi kun råder over et kamera, som har en bestemt blændestørrelse (svarende til f-tallet 11) og en bestemt lukketid på 1/60 sek. ? ♥

Øvelse 2.1.28.
Mange kameraer kan indstilles "på tid", dvs. man bestemmer selv lukketiden/eksponeringstiden.

a) Hvor lang tid skal kameralinsen være åben for med en 200 ASA film og et f-tal på 2.8 at kunne få et godt billede ud af et nattemotiv, hvor EV = – 4 ?
b) Et kamera har en speciallukketid på 30 sekunder beregnet til aftenfotografering.
Hvilket f-tal skal vælges for blænden for at få et godt billede ud af et aftenmotiv med EV = – 3 , når der benyttes en 800 ASA film ? ♥

Toneintervaller og musikskalaer.

Den historiske udvikling af musikskalaer og toneintervaller, transponeringsmuligheder (at spille en given melodi i en anden toneart end den er skrevet), renhed eller urenhed i klangbilledet, opfindelse af nye musikinstrumenter eller ny stemning af kendte musikinstrumenter, så de passer til forskellige skalaer osv. osv. er en omfattende sag at beskrive og ligger helt udenfor rammerne af denne bog.
I det følgende gives blot nogle få grundlæggende informationer, hvorefter der fokuseres på den matematiske side af emnet.

Eksempel 2.1.29.
Man kan ud fra høresansens anatomiske grundlag argumentere for – og ud fra tusindvis af psykologiske eksperimenter dokumentere –, at mennesker vurderer forskellen imellem toner ud fra forholdet mellem tonernes frekvenser. (Frekvenser, dvs. antal svingninger pr. sekund, måles i Hertz (Hz)).
Uanset tonernes "højde" (dvs. frekvens) vil man altså opfatte det samme toneinterval imellem to toner, når blot forholdet mellem deres frekvenser er ens.
Det vil derfor være oplagt at anvende logaritmefunktioner til beskrivelse af det *sansemæssige indtryk af et toneinterval* (SIT) på følgende måde:

$$\text{SIT} = k\cdot\log_c\left(\frac{f_2}{f_1}\right)$$

hvor k er en konstant, der er med til at fastlægge enheden sammen med c, der er logaritmefunktionens grundtal, og hvor f_1 og f_2 er de to toners frekvenser.
En almindelig anvendt enhed for SIT er en *oktav*, som svarer til en fordobling af frekvensen, (dvs. at 1 oktav svarer til, at $f_2 = 2\cdot f_1$). Hvis vi lader c = 2, dvs. hvis vi bruger 2-talslogaritmen, så bliver k = 1, (overvej !!), og vi får følgende simple formel:

$$\boxed{\text{SIT } \textit{oktaver} = \log_2\left(\frac{f_2}{f_1}\right)}$$

Ofte anvendes dog enheden millioktav, dvs. 1/1000 oktav, idet enheden oktav er for stor til beskrivelse af diverse musikteoretiske emner f.eks. om finstemning af instrumenter.
Som det måske er læseren bekendt – og som det omtales i det følgende eksempel – opdeles en oktav i 12 toner. Man har derfor også fundet det relevant at indføre en SIT-enhed, som kaldes *cent*, og som er fastlagt ved, at en oktav er 1200 cent.
Der gælder altså:

$$\text{SIT } \textit{millioktaver} = 1000\cdot\log_2\left(\frac{f_2}{f_1}\right) \qquad \text{og} \qquad \text{SIT } \textit{cent} = 1200\cdot\log_2\left(\frac{f_2}{f_1}\right)$$

Uanset hvilken af de omtalte måleenheder, der anvendes for SIT, så har de den store fordel, at hvis man tager to intervaller, der ligger i forlængelse af hinanden, så fremkommer der et nyt interval, hvis størrelse blot findes som summen af de to oprindelige intervaller (noget der bestemt ikke er "naturgivent" på forhånd). Dette kan lidt mere præcist udtrykkes på følgende måde:
Lad det ene interval SIT_1 være givet ved at det går fra tonen med frekvensen f_1 til tonen med frekvensen f_2, medens det andet interval SIT_2 går fra tonen med frekvensen f_2 til tonen med frekvensen f_3. (Frekvenserne f_1 , f_2 og f_3 er anført i voksende orden). Herved fremkommer der i alt et interval SIT_{ialt} fra tonen med frekvensen f_1 til tonen med frekvensen f_3, hvorom der gælder:

$$\boxed{\text{SIT}_1 + \text{SIT}_2 = \text{SIT}_{\text{ialt}}}$$

Dette indses således:
Uanset hvilken af de omtalte SIT-enheder, der anvendes, så gælder der:

$$SIT_1 = k\cdot\log_2\left(\frac{f_2}{f_1}\right) \quad , \quad SIT_2 = k\cdot\log_2\left(\frac{f_3}{f_2}\right) \quad \text{og} \quad SIT_{ialt} = k\cdot\log_2\left(\frac{f_3}{f_1}\right)$$

hvor k enten er 1, 1000 eller 1200.
Vi ser heraf, ved anvendelse af almindelige regneregler for logaritmer (kontrollér), at:

$$SIT_1 + SIT_2 = k\cdot\log_2\left(\frac{f_2}{f_1}\right) + k\cdot\log_2\left(\frac{f_3}{f_2}\right) =$$

$$k\cdot\left(\log_2(f_2)-\log_2(f_1)\right) + k\cdot\left(\log_2(f_3)-\log_2(f_2)\right) = k\cdot\left(\log_2(f_3)-\log_2(f_1)\right) = SIT_{ialt}$$

hvormed det ønskede er bevist. ♥

Øvelse 2.1.30.
Betragt tre toner med frekvenserne 410 Hz, 690 Hz og 905 Hz.
Bestem værdien af de tre intervaller imellem disse toner – udtrykt i hver af de tre SIT-enheder omtalt i eksempel 2.1.29. ♥

Eksempel 2.1.31.
Når man f.eks. på en violin, en guitar eller et klaver anslår (”knipser”) en streng, så vibrerer den med en bestemt (grund)frekvens – resonanstonen –, som afhænger af strengens længde, tykkelse og udspændingskraft. Jo længere en streng, desto dybere en tone, jo tykkere en streng, desto dybere en tone og jo større en udspændingskraft (dvs. jo strammere strengen er udspændt) desto højere en tone. Ved at variere på disse størrelser kan man altså få en streng til at spille forskellige toner (forskellige frekvenser).
Man kan også have flere forskellige strenge af forskellig længde, tykkelse og/eller udspændingskraft ved siden af hinanden. Når man anslår flere af disse strenge samtidigt, kan resultatet blive alt fra noget der af øret (dvs. af hjernen via øret) opfattes som velklingende og harmonisk til noget, der lyder afskyeligt og ”gør ondt” for det musikalske øre. Hvordan resultatet opfattes afhænger primært af forholdet imellem de anslåede strenges (grund)frekvenser.

Det menneskelige sanseapparat er indrettet således, at simple forhold mellem frekvenserne lyder ”pænest”. I deres rene udgave er de grundlæggende pæne intervaller (primærintervallerne): *oktav, kvint og kvart* defineret på følgende måde:
I intervallet en ”oktav” er forholdet mellem tonernes frekvenser lig med 2:1 (jfr. eksempel 2.1.29), i en ”kvint” er forholdet mellem frekvenserne lig med 3:2, og i en ”kvart” er forholdet 4:3.
Det ses (kontrollér), at en ”ren” kvint er lig med (har en SIT-værdi på) 584,96 millioktaver og en ”ren” kvart er lig med (har en SIT-værdi på) 415,04 millioktaver.

En oktav er et særlig ”pænt” – om end lidt kedeligt klingende – interval, idet to toner med en oktavs forskel lyder ens i sit klangbillede, blot er den ene dybere end den anden. Når man spiller en melodi med en given tone som udgangspunkt – og bagefter spiller melodien en oktav højere – så lyder det på en måde ”ens”, men dog alligevel forskelligt p.gr.a. tonernes højdeforskel. Denne ensartethed kan let forklares ud fra begreberne grundtoner og overtoner for en svingende streng, men vi vil ikke gå dybere ind emnet, der blot omtales her, idet det spiller en rolle for tonernes navngivning.
To toner med en oktav imellem gives det samme navn (bortset fra et evt. ”placeringsnummer”).

Når man skal stemme f.eks. en violin, en guitar eller et klaver, så gøres det ved at ændre på udspændingskraften, idet strengenes dimensioner er givet ud fra instrumentets design.
Et af de store spørgsmål igennem den europæiske historie har været, hvordan man skulle stemme klaveret og dermed fordele toner over klaverets tangenter, hvilket dermed selvsagt fik betydning for alle andre instrumenter, der skulle spille sammen med et klaver.

Principielt kunne man opdele en oktav i et vilkårligt antal intervaller – og dermed placere toner ved forskellige mellemliggende frekvenser, hvilket er gjort i andre kulturer igennem tiden –, men dels er der en grænse for, hvor små frekvensforskelle øret kan opfatte (dette er i øvrigt forskelligt fra person til person), dels taler en række praktiske forhold (bl.a. i konstruktionen af instrumenterne) for, at antallet af mellemliggende toner holdes på et behersket niveau. Desuden ville man gerne sørge for muligheden af at kunne udnytte de velklingende intervaller kvint, kvart (og andre).
I den (vest)europæiske musikudvikling faldt valget på inddeling af en oktav i 12 såkaldte halvtoner.

Men udover dette skulle der jo også tildeles frekvenser til de enkelte toner (dvs. foretages en stemning af strengene). Som vi straks skal se, gav dette anledning til problemer.
En oktav (med udgangspunkt i tonen med navnet C) ser ud som vist på figur 2.1.1, hvor alle toners navne er angivet. Efter tonen B (som i bl.a. Danmark oftest kaldes H) kommer det næste C, blot en oktav højere, hvorefter det hele gentager sig (se figur 2.1.2, som viser alle tangenterne på et klaver).

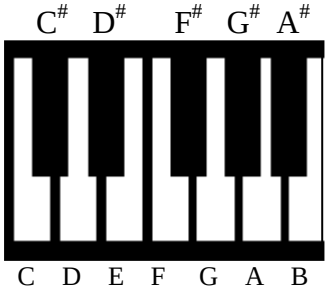
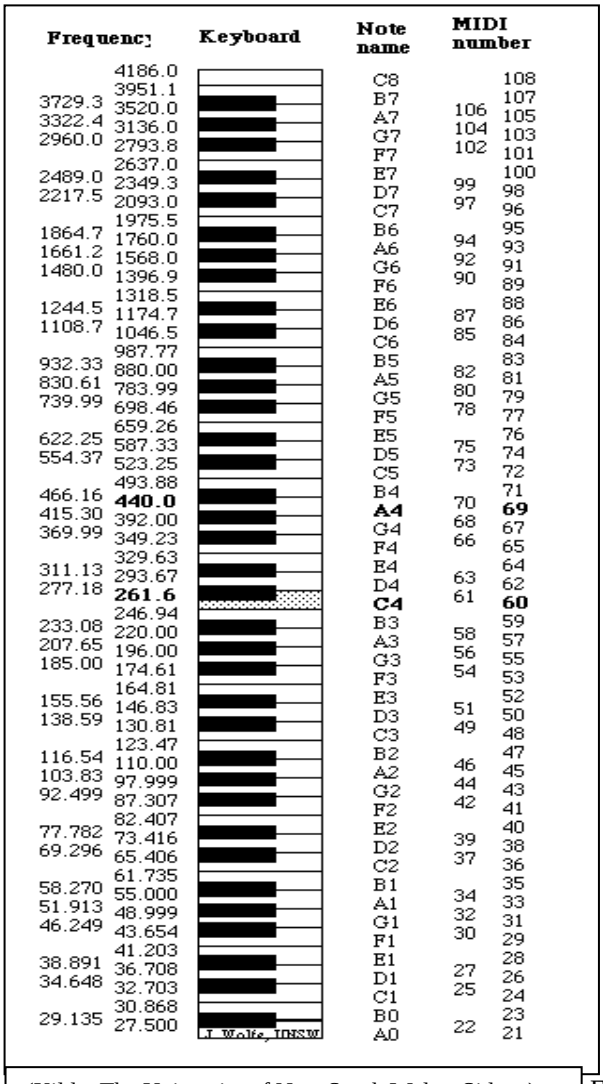


Fig. 2.1.1

På figur 2.1.2 er kun anført navne på tonerne for de hvide tangenter, men med placeringsnummer - se kolonnen: ”Note name”. (Dette er en nutidigt valgt notation. I musikhistorisk sammenhæng hed tonen C4 f.eks. C’).
Kolonnerne ”frequency” omtales kort nedenfor, og kolonnen ”MIDI number” omtales i det næste eksempel.
En *kvint* svarer til et spring på 7 halve toner !
Der er f.eks. en kvint fra C til G eller fra $D^{\#}$ til $A^{\#}$ - kontrollér på figuren !!
Hvis man (tålmodigt !) tæller 12 kvinter frem fra tonen C1 på klaveret, havner man på tonen C8. Dette betyder, at 12 kvinter skal svare til 7 oktaver.
Hvis frekvensen af tonen C1 kaldes f, så har tonen, som ligger en ren kvint over f, frekvensen $f \cdot \frac{3}{2}$, idet intervallet ”en ren kvint” svarer til frekvensforholdet 3:2. Man går altså en ren kvint frem ved at gange frekvensen med $\frac{3}{2}$.



(Kilde: The University of New South Wales, Sidney)

Fig. 2.1.2

Når vi går 12 kvinter frem, så får vi altså tonen med frekvensen $f\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{12} = f\cdot\frac{531441}{8192} = f\cdot 129{,}746$
Som omtalt svarer et toneinterval på en oktav til frekvensforholdet 2:1. Når vi går 7 oktaver frem fra tonen med frekvensen f, så får vi altså en tone med frekvensen $f\cdot 2^7 = f\cdot 128$.
Som det ses, er der uoverensstemmelse mellem de to frekvenser for tonen C8, idet 12 rene kvinter giver en for stor frekvens i forhold til de tilsvarende 7 oktaver.
Dette problem har man igennem tiden løst på forskellige mere eller mindre tilfredsstillende måder, og der har været megen debat herom – begge dele er dog noget vi ikke skal komme ind på hér.

Da oktaven med frekvensfordobling er et helt fundamentalt princip, endte man med at give afkald på at anvende rene kvinter. Man definerede, at der skulle være den samme afstand (dvs. SIT-værdi) imellem alle de 12 halvtoner, der udgør en oktav. Dette betyder, at afstanden mellem to halvtoner, f.eks. fra G til $G^{\#}$, er givet ved:

$$\text{SIT(½ tone)} = \frac{1}{12}\text{ oktav} = \frac{1}{12}\cdot\log_2\left(\frac{2}{1}\right) = \log_2\left(\left(\frac{2}{1}\right)^{\frac{1}{12}}\right) = \log_2\left(\frac{2^{\frac{1}{12}}}{1}\right) = \log_2\left(\frac{\sqrt[12]{2}}{1}\right)$$

dvs. at forholdet imellem frekvenserne for to på hinanden følgende halvtoner er $\sqrt[12]{2}:1$. Med 7 decimalers nøjagtighed er $\sqrt[12]{2}$ = 1,0594631, dvs. at frekvensen skal øges med ca. 6 % når vi går fra en tone til den næstfølgende halvtone.

Et klaver stemt på denne måde siges at være "tempereret".
Størrelsen en kvint og en kvart bliver ændret, nu hvor de ikke længere kan optræde i den rene form.
En kvint er som omtalt et spring på 7 halvtoner mellem starttonen og sluttonen. Hvis starttonen i kvinten har frekvensen f, så har sluttonen i kvinten altså frekvensen $f\cdot(\sqrt[12]{2})^7$, hvormed vi ser, at:

$$\text{SIT(kvint)} = \log_2\left(\frac{f\cdot(\sqrt[12]{2})^7}{f}\right) = \log_2\left((\sqrt[12]{2})^7\right) = \frac{7}{12}\text{ oktav}$$

hvilket vi naturligvis kunne have fået meget nemmere ved blot at bemærke, at hvert halvtonespring svarer til $\frac{1}{12}$ oktav, og i kvinten er der 7 halvtonespring. Da $\frac{7}{12}$ oktav = 583,33 millioktaver, ses det, at en kvint er gjort 1,63 millioktaver mindre end en ren kvint på 584,96 millioktaver. Dette er imidlertid så lille en forskel, at kun de færreste mennesker kan høre denne forskel, hvormed den tempererede toneskala er brugbar til de fleste praktiske formål.
Det overlades til læseren at argumentere for, at en kvart i den tempererede toneskala er gjort 1,63 millioktaver større end en ren kvart. (En *kvart* svarer til et spring på 5 halvtoner mellem start- og sluttonen i kvarten).

Hvis vi nu vender os mod frekvenserne af de konkrete toner på klaveret, så synes der at være enighed om at tage udgangspunkt i, at tonen A4 (se figur 2.1.2), der også kaldes "kammertonen", har en frekvens på 440 Hz. Herefter kan alle andre frekvenser regnes ud ved at tælle, hvor mange halvtonespring der er fra A4 til den givne tone, og så enten gange (for højere toner) eller dividere (for dybere toner) med $\sqrt[12]{2}$ opløftet i antallet af spring. Der er f.eks. 7 halvtonespring fra A4 til E5 (jfr. figur 2.1.2), hvoraf det ses, at frekvensen af E5 skal være: $440\cdot(\sqrt[12]{2})^7$ Hz = 659,26 Hz, hvilket præcist svarer til den værdi, der står i kolonnen over frekvenserne på figuren.
Vi afslutter eksemplet med at bemærke, at hvis SIT-enheden cent anvendes, så er et halvtonespring i en tempereret toneskala lig med 100 cent, idet en oktav svarer til 1200 cent (jfr. eksempel 2.1.29). Der kommer hermed ganske pæne talværdier frem ved anvendelse af denne enhed. ♥

Eksempel 2.1.32.
I dette afsluttende eksempel vil vi se lidt på begrebet MIDI og MIDI number (også kaldet MNN – en forkortelse for MIDI Note Number).
MIDI er en forkortelse for: *Musical Instrument Digital Interface*. Dette er en såkaldt standard for dataudveksling mellem elektroniske musikinstrumenter (på samme måde som TCP/IP er en standard – en protokol – for dataudveksling mellem computere over netværk).
I MIDI-systemet er tonerne nummereret fra 0 til 127 (bemærk: $128 = 2^7$ værdier), med dybe toner svarende til lave numre. På figur 2.1.2 ses MIDI-numrene svarende til klaverets toner i den højre kolonne. Det ses, at C4 har fået nummeret 60, og at kammertonen dermed får nummeret 69.

Hvis vi vil finde frekvensen f_n for tonen med MIDI-nummeret n, så kan den findes efter følgende formel (jfr. eksempel 2.1.31 – gennemfør argumentet !):

$$f_n = 440\cdot\left(\sqrt[12]{2}\right)^{n-69} = 440\cdot 1{,}0594631^{n-69}$$

For dem der arbejder med MIDI er det desuden af betydning at kunne finde det MIDI-nummer, der svarer til en given frekvens, hvilket gøres ved at isolere n i ligningen: $f = 440\cdot\left(\sqrt[12]{2}\right)^{n-69}$. Ved anvendelse af $\log_2$ får vi:

$$f = 440\cdot\left(\sqrt[12]{2}\right)^{n-69} \Leftrightarrow \log_2(f) = \log_2(440) + (n-69)\cdot\log_2\left(\sqrt[12]{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \log_2(f) - \log_2(440) = (n-69)\cdot\tfrac{1}{12}$$

$$\Leftrightarrow 12\cdot\log_2\left(\frac{f}{440}\right) = n - 69$$

altså:

$$n = 69 + 12\cdot\log_2\left(\frac{f}{440}\right)$$

For det første er det ikke sikkert at n giver et helt tal, hvormed der i forhold til valg af keyboardtone for en given frekvens kan komme på tale at skulle afrunde til nærmeste værdi. For det andet er det med ikke-heltallige værdier muligt at arbejde med såkaldt mikrotonalitet, hvilket vi dog ikke skal komme ind på her. ♥

Øvelse 2.1.33.
a) Vælg 3-4 tilfældige frekvenser for nogle toner på keyboardet på figur 2.1.2, find de tilsvarende MIDI-numre – og sammenlign med de værdier, der er anført på figuren.
b) Bestem MIDI-numrene for frekvenserne 500 Hz, 1000 Hz og 2000 Hz. ♥

Grafisk beskrivelse af data v.hj.a. logaritmiske skalaer:

Da der på logaritmiske skalaer gælder, at afstanden mellem 10 og 100 er den samme som mellem 100 og 1000, mellem 1000 og 10000 osv., og den samme som mellem 1 og 10, mellem 0,1 og 1, mellem 0,01 og 0,1 osv. er logaritmiske skalaer velegnede som akse(r) i koordinatsystemer, hvor der skal illustreres størrelser, som kan variere over et meget stort område, og hvor det er vigtigt at kunne aflæse information om værdier i såvel den lave som den høje ende af skalaen. (Man skal blot passe på ikke at blive vildledt af det "synsindtryk" man får af grafen).

Eksempel 2.1.34.
Hvis man skal illustrere verdens olieforbrug i årene 1890 til 1970, så vil vi i et almindeligt koordinatsystem få kurven vist på figur 2.1.3 a), medens vi i et koordinatsystem med en logaritmisk skala som andenakse får kurven vist på figur 2.1.3 b).

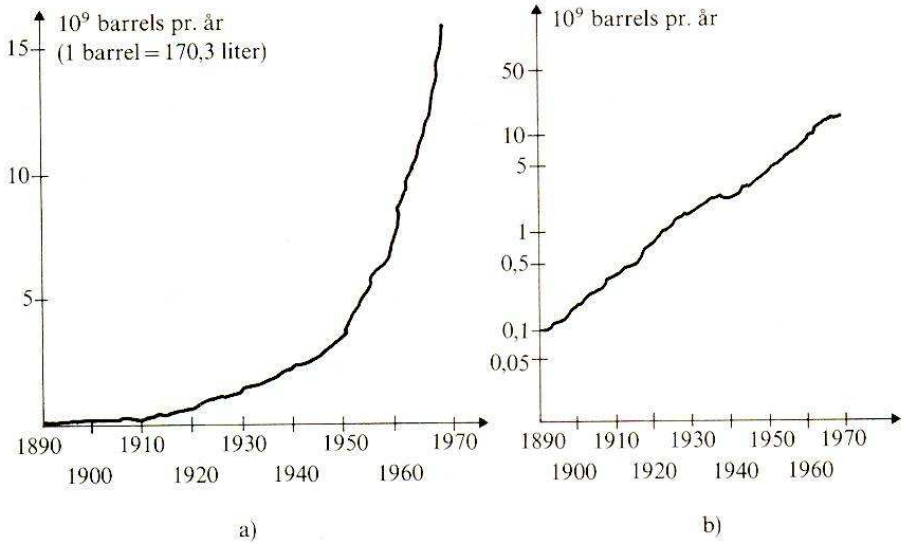


Fig. 2.1.3

På figur 2.1.3 a) kan vi klart se, at der skete en kraftig forøgelse af forbruget, men til gengæld er det næsten umuligt at aflæse information om forbruget i de første år. Denne mangel afhjælper den logaritmiske skala på figur 2.1.3 b), hvor forbrugsforøgelsen til gengæld ikke ser så alvorlig ud. ♥

Eksempel 2.1.35.
Ved en geologisk karakterisation ("teksturkarakterisation") af jordarter opdeles prøvematerialet efter partikelstørrelse i ler, silt, sand, grus og sten.
Hvis materialets partikeldiameter (kornstørrelse) kaldes d, så anvendes betegnelsen:

ler	når	$d \leq 0{,}002$ mm
silt	når	$0{,}002 \text{ mm} < d \leq 0{,}06$ mm
sand	når	$0{,}06 \text{ mm} < d \leq 2$ mm
grus	når	$2 \text{ mm} < d \leq 60$ mm
sten	når	$d > 60$ mm

Denne klassificering af kornstørrelsen anføres bedst på en logaritmisk skala, idet en almindelig skala enten bliver urimeligt lang eller også umuliggør information om ler-, silt- og sandbestanddelene.

Når en jordprøve analyseres, kan man angive hvor stor en procentdel af prøvens masse (vægt) de forskellige kornstørrelsestyper udgør. Men man kan også udregne, hvor mange procent af prøven, der har en kornstørrelse mindre end eller lig med forskellige diametre d. (Man kan altså f.eks. angive, hvor mange procent der af en given jordprøve har en diameter mindre end 0,03 mm).
Foretages en sådan analyse for flere forskellige værdier af d, kan de opnåede resultater indtegnes i et koordinatsystem som nedenfor (hvor der er tegnet tre forskellige mulige kurver).

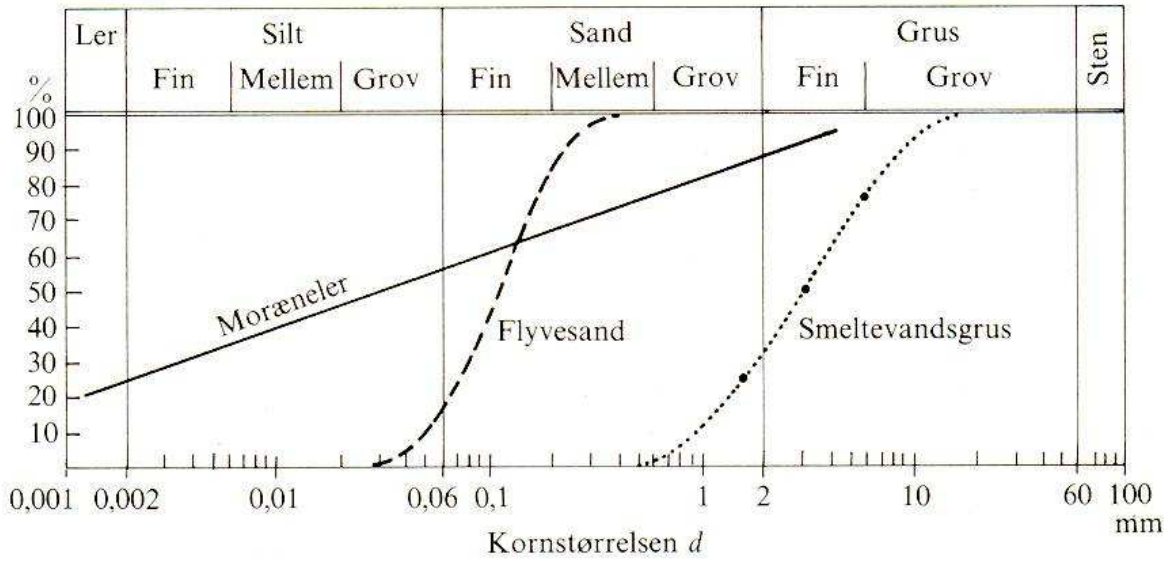


Fig. 2.1.4

Vi ser, at moræneler, der er en gletcheraflejring fra istiden, er en udpræget blandingsjordart, idet der både er ler, silt, sand og grus heri. Derimod er flyvesandet, som er en vindaflejring, ret homogent sammensat.
Vi ser ligeledes af kurverne, at f.eks. 40 % af moræneleret har en kornstørrelse på under 0,01 mm, og at 5 % af flyvesandet har en kornstørrelse på under 0,04 mm.

Ved en kort angivelse af en given jordarts kornstørrelsesammensætning anfører man ofte de følgende tre størrelser:

1) Medianen, dvs. den kornstørrelse, som 50 % af materialet er mindre end
2) 1. kvartil, dvs. den kornstørrelse, som 25 % af materialet er mindre end.
3) 3. kvartil, dvs. den kornstørrelse, som 75 % af materialet er mindre end.

Hvis vi f.eks. ser på smeltevandsgruset på figur 2.1.4, så er medianen 3,0 mm, 1. kvartil er 1,5 mm og 3. kvartil er 6 mm. ♥

Øvelse 2.1.36.
Find i en statistisk oversigt bruttonationalproduktet (BNP) for Danmark, Frankrig og USA for en tiårsperiode eller lign. (BNP skal udtrykkes i samme møntenhed, f.eks. dollar).
Indtegn de tre kurver i et almindeligt koordinatsystem samt i et koordinatsystem, hvor andenaksen er logaritmisk. (Alle tre kurver indtegnes i samme koordinatsystem).
Kommentér resultatet. ♥

Eksempel 2.1.37.
Evnen til at høre/opfatte toner afhængig bl.a. af alder og individuel hørelsesfunktion og –situation. Den bedst fungerende hørelse omfatter frekvenserne fra omkring 20-30 Hz til ca. 20.000 Hz, hvorfor en god højtaler bør være i stand til at dække dette frekvensområde. Når man skal beskrive en højtalers evne hertil, anvendes ofte en figur som den følgende (hvis tekniske detaljer vi ikke skal komme ind på – vi skal blot se figuren). Bemærk den logaritmiske førsteakse.

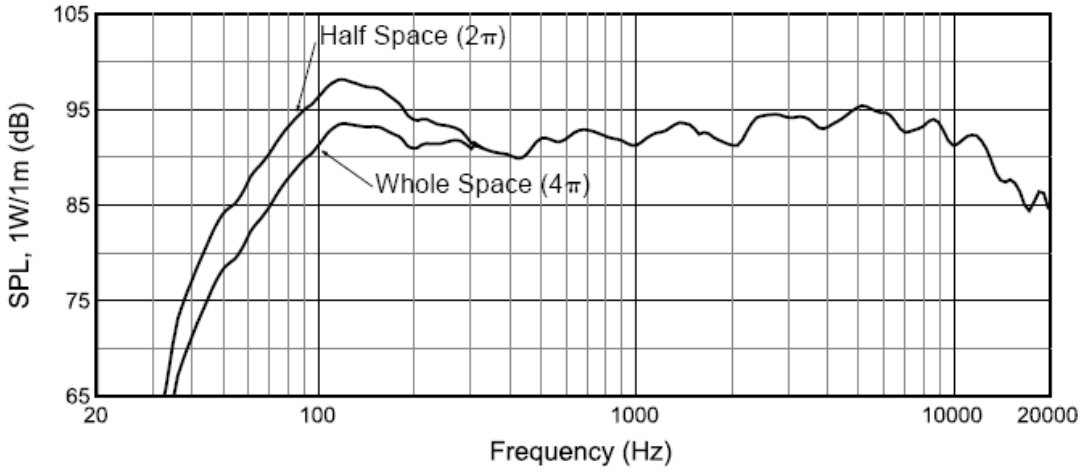


Fig. 2.1.5 (Kilde: JBL)

Det ses, at de dybeste bastoner og de højeste diskanttoner gengives knap så godt som resten af frekvensområdet. ♥

Øvelse 2.1.38.
Find på Internettet eksempler på anvendelse af logaritmiske skalaer ved tegning af kurver.
Søg f.eks. under statistiske eller tekniske informationer. ♥

2.2. Eksponentielle vækstfunktioner.

I det følgende gives nogle få eksempler på eksponentielle vækstfunktioner indenfor fysik (radioaktivitet og stråling), biologi (populationsvækst), medicin (udskillelse af medicin) og geografi (befolkningsudvikling). Der er imidlertid mange andre emner/områder, hvor eksponentielle vækstfunktioner kan bringes i anvendelse. Dette gælder specielt, når vi har differential- og integralregning til rådighed og/eller når vi ser på modeller, hvor eksponentielle vækstfunktioner indgår som en del af funktionsudtrykket i modellen. Vi skal i kapitel 4 komme ind på nogle af disse eksempler, og vi skal f.eks. se, at der gælder: $T(t) = (T(0) - T_o)\cdot e^{-at} + T_o$ for temperaturudligning imellem et stort legeme med temperaturen T_o, som er i termisk kontakt med et lille legeme med temperaturen T til tiden t.

Her og nu holder vi os som omtalt til nogle få eksempler.
I afsnit 2.3 om enkeltlogaritmiske koordinatsystemer anføres desuden en beskrivelse af en række forsøg, man kan udføre med henblik på undersøgelse af, om der er tale om eksponentielle vækstfunktioner og/eller med henblik på bestemmelse af parametre, der beskriver denne vækst.

Radioaktivitet og stråling:

Eksempel 2.2.1.
Visse atomkerner har den egenskab, at de før eller siden "går i stykker" under udsendelse af radioaktiv stråling (som består af små "partikler"), hvorefter den tilbageblevne del af kernen ordner sig i en ny slags atomkerne. Vi siger kort, at den radioaktive kerne henfalder.
Strålingen fra en klump radioaktivt materiale kan måles med et såkaldt Geiger-Müller-rør ("Geigertæller"), idet man måler strålingens aktivitet (dvs. antal udsendte partikler pr. sekund).

Vi skal i kapitel 4 argumentere for, at hvis vi til tiden t har et stort antal kerner N(t) af et givet radioaktivt stof, som endnu ikke er henfaldet, så kan N(t) beskrives ved en eksponentielt aftagende funktion $N(t) = N_o \cdot e^{-kt}$, hvor N_o er antallet af kerner til tiden 0 (altså når målingen begynder), og hvor størrelsen k kaldes stoffets henfaldskonstant.
Funktionen N(t), der beskriver antallet af ikke-henfaldne kerner til tiden t, opfylder altså:

$$N(t) = N_o \cdot e^{-kt} \qquad \text{eller:} \qquad N(t) = N_o \cdot \exp(-kt)$$

Antallet af ikke-henfaldne kerner er eksponentielt aftagende.

Ifølge sætning 1.4.17 er halveringstiden $T_{½}$ (dvs. den tid der går inden halvdelen af de radioaktive kerner er henfaldet) knyttet sammen med henfaldskonstanten k i følgende ligninger (overvej!):

$$T_{½} = \frac{\ln 2}{k} \quad \text{og} \quad k = \frac{\ln 2}{T_{½}} \,. \quad ♥$$

Øvelse 2.2.2.
Beskrivelsen af radioaktivt henfald i eksempel 2.2.1 kan bl.a. anvendes til aldersbestemmelse af historiske objekter. En metode bygger på det radioaktive kulstof 14 (skrives: C^{14}). En levende organisme har nemlig et ganske bestemt indhold af dette stof; men når organismen dør, vil dette indhold aftage eksponentielt som beskrevet i eksempel 2.2.1.
På baggrund af halveringstidsbestemmelser er konstanten k fastlagt til ca. $1{,}22 \cdot 10^{-4}$ (med enheden år^{-1}), hvorfor indholdet af C^{14} kan beskrives ved funktionen: $N(t) = N_o \cdot e^{-1{,}22 \cdot 10^{-4} \cdot t}$, hvor N_o er det oprindelige indhold af C^{14}, og hvor t måles i år (efter at organismen er død).

a) I nogle knogler er indholdet af C^{14} bestemt til 72,3 % af det oprindelige indhold.
   Hvor gamle er disse knogler ?

For at vurdere metodens nøjagtighed kan vi prøve at ændre lidt på værdien af k i udregningerne:

b) Hvilken alder ville vi få for de omtalte knogler, hvis $k = 1{,}24 \cdot 10^{-4}$ år^{-1} og hvis $k = 1{,}20 \cdot 10^{-4}$ år^{-1}
   Kommentér resultatet. ♥

Øvelse 2.2.3.
Uran har to naturligt forekommende radioaktive isotoper: Uran-235 (U^{235}) med en halveringstid på $7{,}1 \cdot 10^{8}$ år, og Uran-238 (U^{238}) med en halveringstid på $4{,}5 \cdot 10^{9}$ år.
Det antages, at der ved dannelsen af uranholdigt mineral var lige mange atomer af de to isotoper.
Giv en vurdering af Jordens alder, idet det oplyses, at der i Jordens uranmalm er ca. 140 gange så meget U^{238} som U^{235}. ♥

Eksempel 2.2.4.
Vi vil i dette eksempel undersøge intensiteten af visse typer stråling, når strålingen trænger ind igennem stof/materiale. (Der er tale om gammastråling, røntgenstråling og i en række sammenhænge også betastråling).
Strålingens intensitet et givet sted defineres som antallet af "partikler", som pr. sekund passerer en arealenhed (f.eks.1 cm^2) placeret vinkelret på strålingsretningen det pågældende sted.
Strålingens intensitet i dybden x af materialet betegnes med I(x). På grund af absorption vil I(x) aftage efterhånden som strålingen trænger ind igennem stoffet, dvs. efterhånden som x forøges.
Vi skal i kapitel 4 vise, at intensiteten I(x) i dybden x af absorptionsmaterialet er givet ved:
$I(x) = I_o \cdot e^{-\mu x}$, hvor I_o er strålingens intensitet ved overfladen af materialet (dvs. $I_o = I(0)$ = intensiteten inden strålingen begynder at trænge ind i materialet), og hvor μ kaldes absorptionskoefficienten for det pågældende materiale i relation til den givne stråling. μ måles i m^{-1}, når x måles i m.

Funktionen I(x), der beskriver intensiteten i dybden x af absorptionsmaterialet, opfylder altså:

$$I(x) = I_o \cdot e^{-\mu x} \quad \text{eller} \quad I(x) = I_o \cdot \exp(-\mu x)$$
Intensiteten af strålingen er eksponentielt aftagende.

Ifølge sætning 1.4.17 er halveringstykkelsen $x_{½}$ (dvs. den tykkelse materialet skal have for at absorbere halvdelen af den pågældende stråling) knyttet sammen med absorptionskoefficienten μ i følgende ligninger (overvej!):

$$x_{½} = \frac{\ln 2}{\mu} \quad \text{og} \quad \mu = \frac{\ln 2}{x_{½}} .$$

Det bemærkes, at absorptionskoefficienten (og dermed halveringstykkelsen) afhænger af absorptionsmaterialet, af strålingstypen og af strålingsenergien. ♥

Øvelse 2.2.5.
Absorptionskoefficienten for bly (jfr. eksempel 2.2.4) er for en given γ-stråling lig med 0,82 cm^{-1}.
a) Hvor tyk skal en blyplade være for at bremse 80 % af den pågældende stråling ?
b) Hvor stor er halveringstykkelsen for den pågældende stråling ? ♥

Øvelse 2.2.6.
I hospitalsverdenen mm. anvendes røntgenstråling som bekendt til at tage røntgenbilleder af udvalgte dele af kroppen. Undertiden er der behov for at beskytte andre dele af kroppen eller for at beskytte personale, forældre m.v., der hjælper den person, der skal røntgenfotograferes. Til dette har man udviklet nogle "bly-forklæder", som tages på for at beskytte kroppen.
En given røntgenstråling har halveringstykkelsen 0,11 mm for absorption i bly.
Hvor tykt skal et "bly-forklæde" være for at der højst er 1 % af røntgenstrålingen, som trænger igennem det ? ♥

Biologi og medicin

Eksempel 2.2.7.

Vi betragter i dette eksempel en gærcellepopulation, som vokser ved celledeling under optimale vilkår (fastlagt ved korrekt temperatur, rigelig næringsmængde og plads, o.lign.).
Vi skal i kapitel 4 vise, at hvis N(t) betegner antallet af gærceller pr. ml i en næringsopløsning til tiden t, så gælder der:

$$N(t) = N_o \cdot e^{rt} \quad \text{eller:} \quad N(t) = N_o \cdot \exp(rt)$$

Under optimale vilkår vokser antallet af gærceller eksponentielt

hvor N_o er antallet af gærceller pr. ml til tiden 0 (altså ved starten af forsøget/målingen) og hvor r er en konstant, der beskriver sandsynligheden for celledeling pr. celle pr. tidsenhed.

Denne model for en gærcelle-populations vækst gælder som omtalt kun ved optimale vilkår. Hvis der bliver pladsmangel, næringsmangel, for høj koncentration af affaldsstoffer eller en forkert temperatur, vil reproduktionsraten (dvs. det enkelte "individs" evne til reproduktion pr. tidsenhed) begynde at aftage, hvilket kan føre til en såkaldt logistisk vækst med mætning.

Den omtalte matematiske model kan også beskrive andre populationers vækst. Hvis der i en given population både er tale om "fødsler" og "dødsfald", så angiver størrelsen r forskellen imellem fødselsraten (dvs. antallet af fødsler pr. individ pr. tidsenhed) og dødsraten (dvs. antallet af dødsfald pr. individ pr. tidsenhed). Dette vil vi imidlertid ikke komme yderligere ind på her. ♥

Øvelse 2.2.8.

Størrelsen af en given bakteriekultur er eksponentielt voksende og kan på samme måde som gærcellerne i eksempel 2.2.7 beskrives ved en funktion af typen $N(t) = N_o \cdot e^{rt}$.

a) Bestem r, idet N_o = 2,5 millioner (pr. ml) og N(50 min.) = 3 millioner (pr. ml).
b) Hvor lang tid går der, før N(t) = 4,2 millioner (pr. ml) ?
c) Bestem fordoblingstiden for bakteriekulturen. ♥

Øvelse 2.2.9.

Salgschefen for et eksportfirma skal på en forretningsrejse til det centrale Afrika. Før afrejsen vaccineres salgschefen mod forskellige sygdomme. Det injicerede stofs mængde i kroppen aftager eksponentielt med tiden, idet det nedbrydes og udskilles.
Halveringstiden i organismen er ca. 9 dage, og der injiceres 5 ml af stoffet før afrejsen.

a) Angiv et funktionsudtryk for kroppens indhold af vaccine som funktion af tiden målt i dage.
b) Lægerne regner med, at vaccinen giver beskyttelse, så længe legemet indeholder mindst ½ ml. Hvor lang tid kan forretningsrejsen højst vare, hvis salgschefen skal være beskyttet mod sygdommene ? ♥

Befolkningsudvikling

Eksempel 2.2.10.
Indiens befolkningstal voksede i perioden 1964 til 1978 med ca. 2,2 % om året. Da befolkningstallet i år 1964 var 472,1 mill., kan vi ved anvendelse af formlen: $S(x) = S(0)\cdot(1+\frac{P}{100})^x$ (se side 25) angive følgende tilnærmede udtryk b(t) for Indiens befolkningstal:

$$b(t) = 472{,}1 \cdot 1{,}022^{\,t}$$

hvor t er tiden målt i år siden 1964 (Jfr. øvelse 2.3.1).

Det overlades som en øvelse til læseren at udregne Indiens befolkningstal i årene 1990 og 2000, samt at prøve at finde de korrekte værdier (f.eks. via Internettet) – og herved vurdere modellens langsigtede holdbarhed. ♥

Øvelse 2.2.11.
Bestem fordoblingstiden for Indiens befolkningstal i henhold til modellen i eksempel 2.2.10. ♥

Øvelse 2.2.12.
Af en række årsager er der mange steder verden over tale om en "flugt" fra land til by, specielt i de fattigere dele af verden – og da specielt til storbyer/hovedstæder. Mexico City er en af de værst ramte af denne effekt. I 1950 havde byen knap 3 mill. indbyggere, og i år 2000 var der ca. 28 mill. indbyggere, hvor forstæderne tælles med som defacto-indbyggere i byen p.gr.a. pladsmangel inden-for den geografiske bygrænse.

a) Hvor stor har den årlige procentuelle vækst været i gennemsnit i perioden fra 1950 til 2000 ?
b) Hvor stor er fordoblingstiden i denne befolkningsudvikling ?
c) Prøv at finde tilsvarende værdier for Tokyo – samt den (af den Japanske regering) forventede udvikling af befolkningstallet i byen. Kommentér resultatet. ♥

Øvelse 2.2.13.
På grund af fraflytning og naturlig bortgang er befolkningstallet på en ø aftaget med 1,6 % om året siden 1982, hvor der var 912 øboere.

a) Angiv en funktionsforskrift for antallet af øboere som funktion af tiden siden 1982.
b) Hvor mange mennesker boede der på øen i 1993 ?
c) I hvilket årstal må vi forvente, at befolkningstallet kommer under 600 ? ♥

2.3. Enkeltlogaritmisk koordinatsystem og eksponentiel regression.

Øvelse 2.3.1.
I tabellen ses Indiens befolkningstal (målt i millioner) for hvert andet år fra 1964 til 1978:

Årstal	1964	1966	1968	1970	1972	1974	1976	1978
Befolkningstal	472,1	493,2	515,4	538,9	562,5	586,1	613,3	638,4

Gør rede for, at befolkningstallet b tilnærmelsesvist kan beskrives ved en eksponentiel vækstfunktion med forskriften: $b(t) = 472{,}1 \cdot 1{,}022^{t}$, hvor t er tiden målt i år siden 1964. ♥

Øvelse 2.3.2.
Egyptens befolkningstal (målt i millioner) udviklede sig i perioden 1965 til 1986 som beskrevet i følgende tabel:

Årstal	Befolkningstal	Årstal	Befolkningstal
1965	29,4	1975	37,2
1966	30,1	1976	37,9
1967	30,9	1977	38,8
1968	31,7	1978	39,8
1969	32,5	1979	41,0
1970	33,3	1980	42,3
1971	34,1	1981	43,5
1972	34,8	1982	44,7
1973	35,6	1983	45,9
1974	36,4	1986	48,2

a) Indtegn værdierne på et stykke almindeligt mm-papir (altså et sædvanligt koordinatsystem) og kommentér resultatet.
b) Indtegn værdierne fra årene 1965 til 1976 i et enkeltlogaritmisk koordinatsystem og kommentér resultatet. Gør det samme med værdierne fra årene 1978 til 1983.
c) Egyptens befolkningstal i 1996 var 59,2 millioner. Kommentér dette i forhold til de ovenfor undersøgte vækstforhold. Er der systematik i dataene ? ♥

Øvelse 2.3.3.
Atmosfærisk luft indeholder altid større eller mindre mængder vanddamp. Den mængde vanddamp, der maksimalt kan indeholdes i atmosfærisk luft (vi taler da om *dampmættet luft*) afhænger af temperaturen – jo højere temperatur, desto større mængde vanddamp.
Dette forhold har store klimatologiske konsekvenser, for hvis en varm vanddampholdig luftmasse afkøles, vil vi ved en given temperatur få dampmættet luft. Hvis luften afkøles yderligere, kan luften ikke indeholde al vanddampen. Der vil således ske en fortætning af vanddamp i et uhyre stort antal små vanddråber, dvs. der dannes skyer. Ved yderligere fortætning vil der fremkomme nedbør.
I nedenstående skema ses den mængde vanddamp (målt i g/m^3), som findes i dampmættet luft ved forskellige temperaturer:

Temp. ^oC	–10	–5	0	5	10	15	20	25	30	35	40
vanddamp g/m^3	2,4	3,4	4,9	6,8	9,3	12,9	17,2	23,0	30,5	40,0	52,0

Undersøg om vi her har en eksponentielt voksende funktion, og find i bekræftende fald en funktionsforskrift for denne (find den forskrift, der bedst muligt passer til dataene). ♥

Øvelse 2.3.4.

En virksomhed sælger en sæsonpræget modevare. I nedenstående tabel ses salgstallet (stk. pr. uge) som funktion af ugenummeret efter sæsonstart.

Ugenr.	Salgstal	Ugenr.	Salgstal
1	14200	7	4480
2	11620	8	3810
3	9710	9	3105
4	8005	10	2560
5	6705	11	2110
6	5475	12	1750

a) Indtegn salgstallet som funktion af ugenummeret i et almindeligt koordinatsystem – og forbind punkterne med en blød kurve. Bemærk, at det godt kan se ud til, at salgstallet som funktion af ugenummeret er en eksponentielt aftagende funktion.
b) Indtegn punkterne i et enkeltlogaritmisk koordinatsystem og argumentér for, at det faktisk ser ud til at være en eksponentielt aftagende funktion.
c) Bestem en forskrift for funktionen s(n), der angiver salgstallet som funktion af ugenummeret n. Bemærk, at s(n) kun har betydning for heltallige værdier af n. (Hvorfor?). ♥

Øvelse 2.3.5.

Der prikkes et lille hul på en gasballon, så gassen siver ud. Ved at måle sammenhængen mellem rumfanget (i cm^3) og tiden (i sek.) fremkommer følgende kurve:

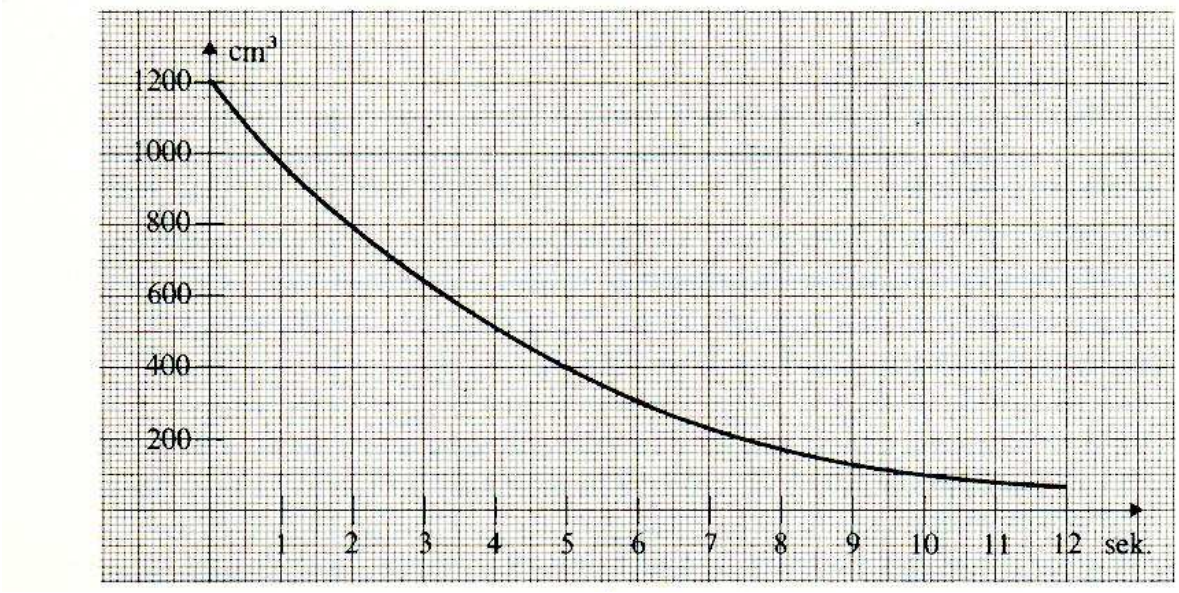


Fig. 2.3.1.

Undersøg, om der er tale om en eksponentielt aftagende funktion. ♥

Forsøg til belysning af eksponentiel vækst.

I det følgende vil der blive omtalt en række forsøg, der alle har det til fælles, at det skal undersøges, om de fremkomne data kan beskrives ved eksponentielle vækstfunktioner.
Samtlige forsøgsresultater skal derfor behandles på følgende måde:

1. Indtegn i et enkelt-logaritmisk koordinatsystem
2. Hvis der foreligger en eksponentiel vækstfunktion, find da:
    a. en forskrift for funktionen (benyt to punkter på linien i det enkeltlogaritmiske koordinatsystem, eller anvend eksponentiel regression på regnemaskinen)
    b. vækstraten og halverings- eller fordoblingskonstanten
    c. tilvækst i den uafhængige variable, der giver en relativ tilvækst på 10 % (for voksende funktioner) eller – 10% (for aftagende funktioner)
3. Tegn (en del) af kurven i et almindeligt koordinatsystem.

Forsøg 1: Væskes udstrømning af beholder

Vi ser på en beholder med vand, hvor der i bunden er et lille hul, som vandet kan løbe ud af.
Vi skal måle på vandsøjlehøjden som funktion af tiden.

Jo højere vandsøjlen er, desto større tryk er der på vandet ved hullet. Og da det er vandtrykket ved hullet, der afgør, hvor hurtigt vandet strømmer ud, kan vi forvente en aftagende udstrømningshastighed. Vandsøjlens højde h falder altså ikke lige meget pr. sekund.
Forsøget udføres ved at måle vandhøjden for hvert 5. eller hvert 10. sekund, idet der holdes en finger for hullet under målingen.

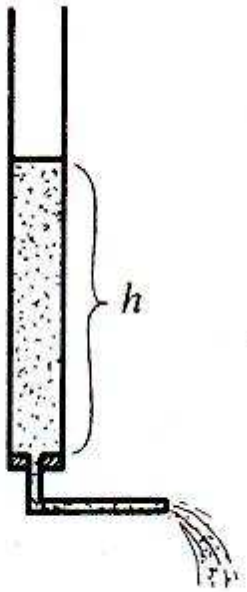


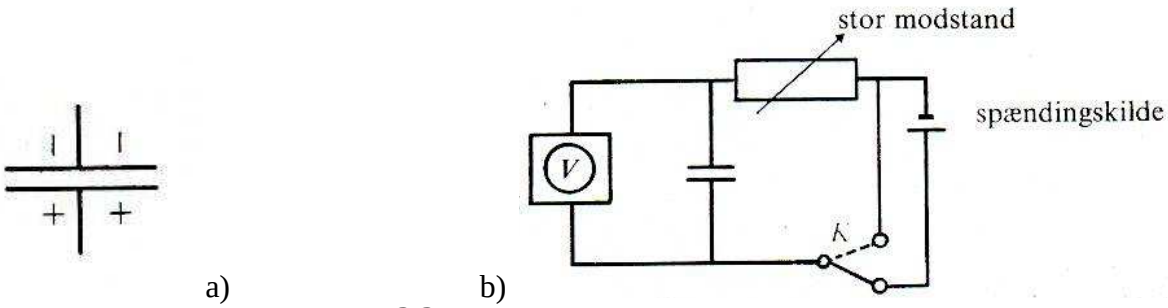
Fig. 2.3.2

Forsøg 2: Opladning og afladning af en kondensator.

I fysikkens verden (elektronikkens) findes en elektrisk komponent (en "radiodims"), som kaldes en kondensator. Den består i princippet af to parallelle metalplader, som kan oplades med modsatte elektriske ladninger. Se figur 2.3.3 a).

Denne kondensator indsættes i et kredsløb med en spændingskilde (strømforsyning) og en stor modstand. Desuden anbringes et voltmeter over kondensatoren. Se figur 2.3.3 b) (Voltmeteret kan evt. forbindes til en såkaldt "skriver" eller til en PC – med henblik på automatisk dataopsamling). Forsøget går ud på v.hj.a. voltmeteret at følge spændingsforskellen over kondensatoren som funktion af tiden.

Vi "oplader" nu kondensatoren ved at tænde for spændingskilden. Herved bliver den ene kondensatorplade positivt opladet og den anden negativt. Der kommer således en spændingsforskel mellem de to plader (og den måles på voltmeteret).



a) b)

Figur 2.3.3

Det tager imidlertid lidt tid inden kondensatoren er maksimalt opladet, altså inden der er maksimal spændingsforskel mellem pladerne. På voltmeteret kan vi følge denne opladning som funktion af tiden. Undersøg, om der er tale om en eksponentielt voksende funktion ved opladningen af kondensatoren.

Når nu kondensatoren aflades igen (det sker ved at udelukke spændingskilden fra kredsløbet v.hj.a. en særlig kontakt K), så vil tiltrækningen mellem den negative og den positive ladning på pladerne forsøge at hindre strømmen i at gå igennem modstanden. Men det lykkes ikke, da der jo er en spændingsforskel mellem de to plader og dermed over modstanden. Efterhånden som strømmen går, vil pladerne blive afladet igen og spændingsforskellen aftage.
Vi følger afladningen på voltmeteret. Undersøg om vi her har en eksponentielt aftagende funktion.

Øvelse:
På figur 2.3.4 ses et eksempel på en op- og afladningskurve tegnet på en "skriver".

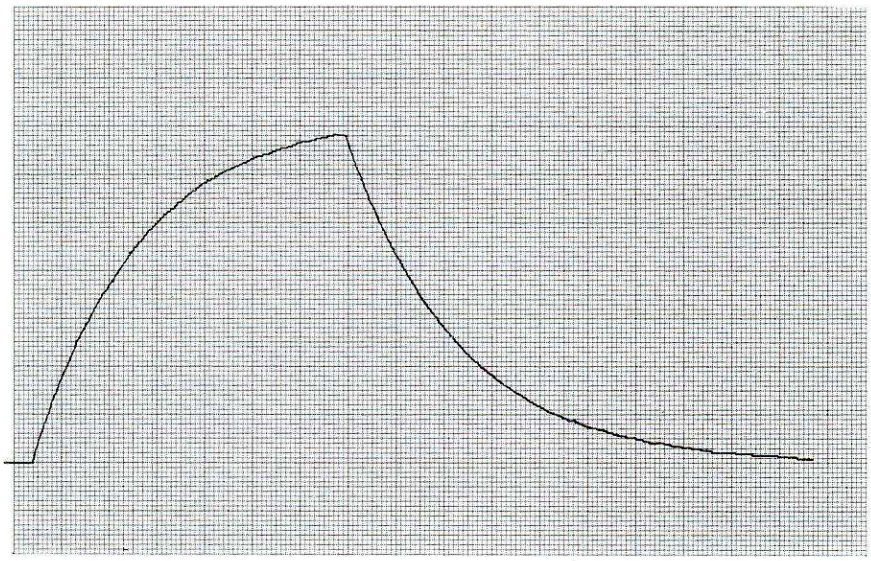


Fig. 2.3.4

Vælg selv enheder på 1.aksen (tiden) og 2.aksen (spændingsforskellen).
Undersøg, om der er tale om en eksponentielt voksende funktion under opladningen, og om der er tale om en eksponentielt aftagende funktion under afladningen.

Forsøg 3: Absorption af γ-stråling (radioaktiv stråling).

Radioaktiv stråling kan registreres af et såkaldt Geiger-Müller-rør (GM-rør). Hvis man forbinder GM-røret med en tæller, kan man tælle, hvor mange "γ-kvanter" dvs. hvor mange radioaktive "partikler", GM-røret registrerer.

Når γ-stråling passerer nogle blyplader, vil strålingens intensitet (dvs. strålingens "styrke") falde.

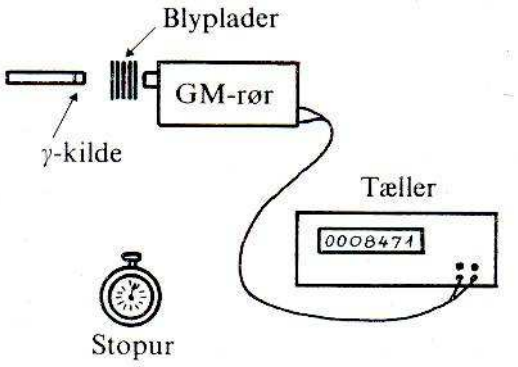


Fig. 2.3.5

Vi skal måle strålingsintensiteten som funktion af tykkelsen af blylaget, idet vi tæller i 60 sekunder (anvend stopur eller en tæller, der kan måle i givne tidsintervaller) for hver gang vi monterer en blyplade mere mellem γ-kilden og GM-røret. (Hvis blypladerne ikke er lige tykke anvendes en såkaldt skydelære til at måle tykkelsen af blylaget for hver gang en ny plade monteres).

Absorption af radioaktiv stråling har bl.a. betydning ved konstruktion af atomkraftværker, atomaffaldsdepoter o.lign.

Forsøg 4: "Terning-henfald".

Vi vil *her* sige, at en terning henfalder, hvis den i et kast viser en 6'er.

Som bekendt er der en bestemt *sandsynlighed* for ved et kast med en terning at få en 6'er, nemlig $\frac{1}{6}$, og dermed er sandsynligheden for at få en ikke-6'er, dvs. 1, 2, 3, 4 eller 5, lig med $\frac{5}{6}$.

Vi tager nu en spand med et stort antal terninger, N_o terninger (tæl !), og kaster dem ud på gulvet (eller i en tom kasse eller skuffe). Vi tager alle 6'erne fra og tæller dem. De tilbageværende terninger, N(1) terninger, puttes i spanden, og vi kaster igen. De nu fremkomne 6'ere fjernes og tilbage er N(2) terninger. Disse kommes i spanden …..

Vi får på denne måde bestemt antallet af "ikke-henfaldne" terninger som funktion af antal kast.

Da vi starter med N_o terninger, vil vi – hvis N_o er stor nok – forvente at have: $N(1) = N_o \cdot \frac{5}{6}$ terninger tilbage efter første kast.

Efter næste kast vil vi forvente at have $N(1) \cdot \frac{5}{6}$ tilbage, dvs. $N(2) = N(1) \cdot \frac{5}{6} = N_o \cdot (\frac{5}{6})^2$

Således fortsættes, og efter n kast vil vi forvente at have: $N(n) = N_o \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^n$ terninger tilbage.

Indtegn grafen for funktionen $f(x) = N_o \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^x$ i samme koordinatsystem som måleresultaterne, og sammenlign.

Forsøg 5: Radioaktivt henfald.

I dette forsøg skal vi se lidt på *årsagen* til radioaktiv stråling.
Alting på jorden er opbygget af ganske små bestanddele, atomer, og der kendes over 200 forskellige atomer. Disse atomer består af en *kerne* placeret koncentreret i centrum af atomet og af nogle *elektroner* svævende (relativt langt) udenom kernen. Se figur 2.3.6.

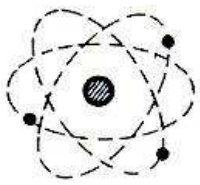


Fig. 2.3.6

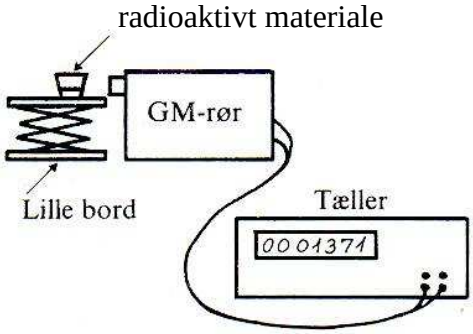


Fig. 2.3.7

Visse kerner – både naturligt forekommende og kunstigt fremstillede – har den egenskab, at de går i stykker før eller siden. Vi siger, de er ustabile.
Når sådanne ustabile kerner henfalder (dvs. går i stykker) udsendes nogle små "partikler" fra kernen, og resten af kernen ordner sig i en ny slags atomkerne. Det er de udsendte "partikler", som kaldes radioaktiv stråling.

Nu gælder der den regel, at uanset hvor lang tid en ustabil kerne har eksisteret, så er der den samme sandsynlighed for, at kernen vil henfalde i løbet af det næste sekund. Som en analogi til dette kan vi tænke på kast med en terning. Uanset hvor mange gange vi har kastet med en terning, så er der den samme sandsynlighed for, at terningen i næste kast vil vise en 6'er.

I dette forsøg vil vi "måle" antallet af ikke-henfaldne kerner som funktion af tiden, idet vi har givet en bestemt mængde radioaktivt materiale. Ordet måle er sat i anførelsestegn, idet vi rent faktisk ikke måler antallet af ikke-henfaldne kerner, men denne mængde kerners aktivitet, dvs. hvor mange radioaktive henfald, der sker pr. tidsenhed i dette materiale.

Selve forsøget udføres på følgende måde (se figur 2.3.7): Fra en lille "reaktor" udskylles noget radioaktivt materiale (Ba-137*) i en lille plastikskål ved hjælp af en særlig væske (elueringsvæske), og skålen anbringes på et lille bord. Ved hjælp af et GM-rør og en tæller måler vi antallet af henfald i 10 sek., holder pause i 10 sek. , tæller i 10 sek. osv. (Man kan også få tællere med opdelt display, så der måles fortløbende i 10 sek. af gangen, men hvor tællingerne forgår på skiftevis det ene og det andet display). Vi får på denne måde bestemt antallet af henfald som funktion af tiden.

Forsøg 6: Undersøgelse af gærpopulationers vækst under optimale forhold.

De optimale forhold for gærpopulationers vækst er rigelig fødemængde og ca. 35 ^{o}C. Under disse betingelser skal man undersøge gærpopulationens størrelse som funktion af tiden. Dette gøres ved at tilsætte en vis mængde gærceller til noget æblejuice (f.eks. 5 gram gærceller i en liter juice).
Af denne blanding udtages stikprøver til tælling, som kan foregå i et blodtællekammer under mikroskop. Der udtages en stikprøve med det samme (efter at blandingen er rystet godt), og derefter 1-2 gange daglig indtil populationens væksthastighed aftager.

2.4. Potentielle vækstfunktioner.

Geometriske objekter.

Der er i den følgende beskrivelse af geometriske objekter egentlig ikke tale om modeller i den forstand, der er omtalt i kapitel 6. Der er tale om eksakte beskrivelser af indre sammenhænge imellem længder, arealer og rumfang for pæne geometriske objekter som cirkel, terning, kasse, kugle, cylinder og kegle. Men disse eksakte beskrivelser resulterer i forskellige potensfunktioner og er dermed af interesse.

Der gælder følgende formler for de omtalte geometriske objekter:

Cirkel: $O = 2\pi \cdot r$, $A = \pi \cdot r^2$, hvor r er radius, O er omkreds og A er areal

Kugle: $A = 4\pi \cdot r^2$, $V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$, hvor r er radius, A er overfladeareal og V er rumfang (volumen)

Cylinder: $A = 2\pi \cdot r \cdot h + 2\pi \cdot r^2$, $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$, hvor r er radius i endefladerne, h er cylinderens højde, A er cylinderens samlede overfladeareal (krumme side plus de to endeflader) og V er cylinderens rumfang

Kegle: $V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h$, hvor r er radius i grundfladen, h er keglens højde og V keglens rumfang

Kasse: $V = \ell \cdot b \cdot h$, hvor ℓ , b og h er hhv. længde, bredde og højde i kassen

Terning: $A = 6 \cdot s^2$, $V = s^3$, hvor s er terningens sidelængde, A overfladearealet og V rumfanget

Øvelse 2.4.1.
Lav en figur, der illustrerer hver af de omtalte figurer og markér de relevante radier, højder og sidestykker på figurerne. ♥

Eksempel 2.4.2.

a) For en cirkel ser vi, at arealet er en potentiel vækstfunktion af radius: $A(r) = \pi \cdot r^2$ (svarende til $f(x) = \pi \cdot x^2$). Vi ser samtidig, at hvis man har en cirkel med et givet areal, så kan radius bestemmes af formlen: $r = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$, dvs. radius er en potentiel vækstfunktion af arealet: $r(A) = \sqrt{\frac{1}{\pi}} \cdot A^{\frac{1}{2}}$

b) For en kugle får vi, at både arealet og rumfanget er potentielle vækstfunktioner af radius:

$$A(r) = 4\pi \cdot r^2 \qquad \text{og} \qquad V(r) = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 .$$

Som i pkt. a) ser vi, at radius er en potentiel vækstfunktion af overfladearealet A, og at radius er en potentiel vækstfunktion af rumfanget V. Disse funktioner er givet ved:

$$r(A) = \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \cdot A^{\frac{1}{2}} \qquad \text{og} \qquad r(V) = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}} \cdot V^{\frac{1}{3}}$$

Hvis vi f.eks. ved, at rumfanget af en kugle er 87 m^3, så er radius for denne kugle givet ved:

$r(87) = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}} \cdot 87^{\frac{1}{3}} = 2{,}749$ m.

Da radius både kan udtrykkes ved overfladearealet A og ved rumfanget V, må der være en sammenhæng mellem A og V. Da vi ved (se ovenfor), at radius i en given kugle kan udtrykkes som:

$r = \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \cdot A^{\frac{1}{2}}$ og $r = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}} \cdot V^{\frac{1}{3}}$, får vi, at: $\sqrt{\frac{1}{4\pi}} \cdot A^{\frac{1}{2}} = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}} \cdot V^{\frac{1}{3}}$ og dermed (kontrollér!):

$$A(V) = k \cdot V^{\frac{2}{3}}, \quad \text{hvor } k = 3^{2/3} \cdot (4\pi)^{1/3}$$

Vi ser altså, at overfladearealet for en kugle er en potentiel vækstfunktion af kuglens rumfang.

Hvis kuglens rumfang er 87 m^3, så er overfladearealet: $A(87) = 3^{2/3} \cdot (4\pi)^{1/3} \cdot 87^{\frac{2}{3}} = 94{,}95\ m^2$ ♥

Øvelse 2.4.3.

I denne øvelse betragtes cylindere, hvis højde er den samme som diameteren i endefladerne.

a) Argumentér for, at cylinderens overfladeareal og cylinderens rumfang begge er potentielle vækstfunktioner af radius ved at bestemme forskrifter for de to funktioner.
b) Argumentér for, at cylinderens rumfang er en potentiel vækstfunktion af overfladearealet ved at bestemme en forskrift for funktionen.
c) Bestem cylinderens rumfang, hvis dens overfladeareal er 200 cm^2. ♥

Øvelse 2.4.4.

I denne øvelse betragtes kegler, hvis højde er 5 gange radius i grundfladen.

a) Argumentér for, at keglens rumfang er en potentiel vækstfunktion af radius i grundfladen.
b) Argumentér for, at radius i grundfladen er en potentiel vækstfunktion af keglens rumfang.
c) Bestem radius i grundfladen, hvis keglens rumfang er 50 cm^3. ♥

Øvelse 2.4.5.

Bestem overfladearealet som funktion af rumfanget, dvs. bestem A(V), for en terning. ♥

Øvelse 2.4.6.

I denne øvelse betragtes kasser, hvor grundfladen har form som et kvadrat, og hvor højden i kassen er dobbelt så stor som sidelængden i grundfladen.

a) Bestem rumfanget af kassen som funktion af sidelængden.
b) Bestem sidelængden som funktion af kassens rumfang.
c) Bestem kassens overfladeareal som funktion af rumfanget. ♥

Ligefrem og omvendt proportionalitet – primært i fysik.

Ligefrem og omvendt proportionalitet må betegnes som de simpleste former for potentiel sammenhæng (jfr. eksempel 1.6.13). Der findes mange eksempler på ligefrem og omvendt proportionalitet – f.eks. er det beløb b man skal betale (ligefrem) proportionalt med den mængde benzin V man køber, og proportionalitetskonstanten er prisen p kr. pr. liter, altså: $b = p \cdot V$. Og hvis man har et bestemt beløb, f.eks. 300 kr., at købe kartofler for, så er mængden af kartofler m og prisen p kr. pr. kg af kartoflerne omvendt proportionale, idet $300 = p \cdot m$, hvormed mængden af kartofler f.eks. bliver 3 gange så stor, hvis prisen pr. kg bliver 3 gange mindre.

I det følgende vil vi se på en række simple eksempler, som alle er hentet fra faget fysik.

Eksempel 2.4.7.

a) For et givet homogent (ensartet) stof, f.eks. benzin, gælder, at massen (vægten) m af benzinen er ligefrem proportional med rumfanget V, dvs.: $m = \rho \cdot V$, hvor proportionalitetskonstanten ρ er benzinens massefylde (densitet). Hvis m måles i g og V i cm^3, så måles ρ i g/cm^3.

b) Hvis en bil (eller et andet legeme) bevæger sig med konstant hastighed, så er der følgende sammenhænge mellem hastigheden v, strækningen s og den anvendte tid t: $s = v \cdot t$.
Vi ser således, at for en given, bestemt strækning er hastigheden og tiden omvendt proportionale, så hvis man f.eks. kører 4 gange så hurtigt, så tager det kun ¼ i tiden.
Ligeledes ses det, at hvis man kører med en bestemt, konstant hastighed, så er strækningen man får kørt og den tid der anvendes herpå ligefrem proportionale.

c) I elektricitetslære beskæftiger man sig med strømstyrker og spændingsforskelle i elektriske kredsløb, som indeholder forskellige elektriske komponenter, bl.a. resistorer (modstande).
Der gælder her *Ohm's lov*: $U = R \cdot I$, hvor U er spændingsforskellen (målt i Volt (V)) over resistoren, I er strømstyrken (målt i Ampere (A)) igennem resistoren, og R er resistorens resistans (modstand) målt i Ohm (Ω).
Vi ser således, at for en given resistor er U og I ligefrem proportionale, hvor R er proportionalitetskonstanten, således at f.eks. en 5 gange så stor spændingsforskel giver en 5 gange større strømstyrke igennem resistoren.

d) En metaltråd (som f.eks. i en elektrisk ledning) har en resistans (modstand) R, som er givet ved:

$$R = \beta \cdot \frac{\ell}{A}$$

hvor ℓ er trådens længde, A er trådens tværsnitsareal og β er en konstant, som afhænger af det materiale, tråden er lavet af. β kaldes materialets resistivitet ("evne til at yde modstand").
Vi ser, at for en given længde af tråden, er R og A omvendt proportionale, samt at for en et givet tværsnitsareal af tråden, er R og ℓ ligefrem proportionale.

e) For de fleste gasser (luftarter) gælder ved ikke–for–ekstreme tryk og temperaturer: $P \cdot V = n \cdot R \cdot T$, hvor P er gassens tryk (målt i enheden atmosfære (atm)), V er gassens rumfang (målt i liter), n er gasmængden (mål i enheden mol), T er gassens temperatur (målt i enheden Kelvin (K), den såkaldte absolutte temperaturskala) og R er en konstant, som kaldes gaskonstanten, og som måles i enheden: $\frac{\text{liter} \cdot \text{atm}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$. Der gælder, at: $R = 0{,}0821 \ \frac{\text{liter} \cdot \text{atm}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$.
Vi ser, at hvis vi har en given gasmængde, som er lukket inde i en beholder med et fastholdt rumfang, så gælder der, at $P = \text{konst.} \cdot T$, hvormed der er ligefrem proportionalitet mellem tryk og temperatur (målt i Kelvin). Dette kaldes *Gay-Lussacs 1. lov.*
Vi ser ligeledes, at hvis vi har en given gasmængde indespærret i en beholder, og hvis temperaturen fastholdes, så er tryk og rumfang omvendt proportionale. Hvis vi har en beholder med et stempel, så rumfanget nemt kan ændres, så gælder altså f.eks., at hvis rumfanget gøres 3 gange så stort, så bliver trykket 3 gange så lille. Dette kaldes *Boyle-Mariottes lov.*

f) Når et legeme, f.eks. en gryde med vand, skal opvarmes, så gælder det, at der er ligefrem proportionalitet mellem temperaturstigningen ΔT og den varmeenergi Q, der anvendes hertil. Sammenhængen skrives normalt således: $Q = C \cdot \Delta T$, hvor proportionalitetskonstanten C kaldes legemets varmekapacitet, idet den er et mål for legemets evne til at indeholde varmeenergi (jo større værdi

C har, desto mere varmeenergi skal der til pr. grads opvarmning). Q måles i enheden Joule (J), ΔT i grader (enten Kelvin (K) eller Celcius (^oC)) og C dermed i J/grad.
Ligningen $Q = C \cdot \Delta T$ gælder så længe legemet – eller dele deraf – ikke skifter fase (dvs. smelter eller fordamper), og ligningen siger altså, at der f.eks. skal 2,8 gange så meget varmeenergi til at give legemet en 2,8 gange så stor temperaturstigning.

g) Bølger optræder i mange sammenhænge, bl.a. er der ved både lyd og lys tale om bølgeudbredelser. Bølger er karakteriseret ved bølgelængden (afstanden mellem to på hinanden følgende bølgetoppe), frekvensen (antal udsving som bølgen forårsager pr. sekund på et givet sted, hvor bølgen udbredes) og hastigheden (den hastighed hvormed bølgen udbredes).
Hastigheden afhænger såvel af bølgetypen som af det medie bølgen udbreder sig i (f.eks. bevæger en lydbølge sig langsommere i luft end den gør i et fast stof som f.eks. en jernstang).
Hastigheden v måles i m/s, bølgelængden λ måles i m, og frekvensen f måles i Hz (Hertz, hvilket svarer til s^{-1}), og sammenhængen mellem disse tre størrelser er givet ved ligningen: $v = \lambda \cdot f$
Bølgehastigheden er praktisk talt konstant for en given bølgetype i et givet udbredelsesmedie, og for lys, der udbreder sig i vacuum (lufttomt rum), som f.eks. imellem jorden og stjernerne, er den helt konstant. Vi ser dermed, at bølgelængden og frekvensen er omvendt proportionale.

h) I visse sammenhænge kan lys – og anden elektromagnetisk stråling som f.eks. gammastråling – opfattes som små lyspartikler (lys-kvanter), som kaldes fotoner. Sådanne fotoner har en vis energi, hvilket f.eks. fremgår af, at sollys kan opvarme et legeme (og dermed tilføre det energi, jfr. pkt. f) ovenfor), og af at gammastråling er i stand til at trænge igennem f.eks. en metalplade.
Fotonens energi E er proportional med dens frekvens f, idet der gælder ligningen: $E = h \cdot f$, hvor proportionalitetskonstanten h kaldes Planck's konstant. Hvis energien måles i Joule (J) og frekvensen i Hz (Hertz = s^{-1}), så har h størrelsen: $6{,}63 \cdot 10^{-34}$ J·s ♥

Øvelse 2.4.8.

a) Massefylden for benzin er 0,7 g/cm^3. Bestem massen af 12 liter benzin. Bestem rumfanget af 3 kg benzin.
b) En bil skal køre en strækning på 120 km. Hvor lang tid tager det, hvis bilen kører med 40 km/h? Hvor hurtigt har bilen kørt, hvis det tager 1,7 time ?
c) Et projektil bevæger sig med hastigheden 110 m/s. Hvor lang bevæger det sig på 0,6 sekunder ? Hvor lang tid er det om at ramme en målskive, som er 200 m væk ?
d) En resistor på 5000 Ω udsættes for en spændingsforskel på 12 V. Hvor stor er strømstyrken ?
e) For metallet wolfram er $\beta = 5{,}38 \cdot 10^{-8}$ Ω·m. Bestem resistansen R af en 20 m lang wolfram-tråd, som har et cirkulært tværsnit med en diameter på 0,6 mm.
Hvor stor bliver resistansen, hvis tråden i stedet for er 8 m lang ?
Hvor stor bliver resistansen, hvis længden er 20 m og diameteren er 1,2 mm ?
f) En ilt-mængde på 0,3 mol er indesluttet i en 2 liter stor beholder. Bestem trykket i beholderen, hvis temperaturen i beholderen er 58 ^{o}C (sammenhæng mellem temperaturen T målt i K og t målt i ^{o}C er givet ved: $T = t + 273{,}15$). Hvor stort er trykket, hvis temperaturen er 29 ^{o}C ?
g) En beholder med et forskydeligt stempel, som kan bruges til at ændre beholderens rumfang, indeholder atmosfærisk luft med konstant temperatur. Når trykket er 0,8 atm, så er rumfanget 0,5 liter. Hvor stort er trykket, hvis rumfanget er 1,2 liter ? Hvor stort er rumfanget, hvis trykket er 2 atm ?
h) En gryde med vand har alt i alt en varmekapacitet på 5220 J/K. Gryden står på en kogeplade. Hvor meget energi skal der til at opvarme vandet (og gryden) 60 grader ? Hvor meget energi skal der tilføres kogepladen, hvis 70 % af energien bliver til varme i gryden og vandet, og hvis temperaturen skal stige 20 grader ? Hvor meget stiger temperaturen, hvis der tilføres 300.000 J ?

i) En lydbølge udbreder sig med hastigheden 340 m/s. Beregn bølgelængden for "kammertonen" A, som har frekvensen 440 Hz. Hvad er bølgelængden af det dybere A med frekvensen 110 Hz ? Beregn frekvensen for en tone med bølgelængden 0,4 m.

j) Beregn energierne af gammafotoner med frekvenserne $3{,}4 \cdot 10^{21}$ Hz hhv. $6{,}8 \cdot 10^{22}$ Hz. ♥

Afstandskvadratloven:

Øvelse 2.4.9.

Vi har tidligere beskæftiget os med radioaktivitet og radioaktiv stråling (jfr. eksempel 2.2.1 og 2.2.4). Når radioaktiv stråling udsendes fra en given klump radioaktivt materiale, vil det antal partikler, som pr. tidsenhed passerer igennem en lille arealenhed, afhænge af arealenhedens afstand r fra det radioaktive materiale (se figur 2.4.1):

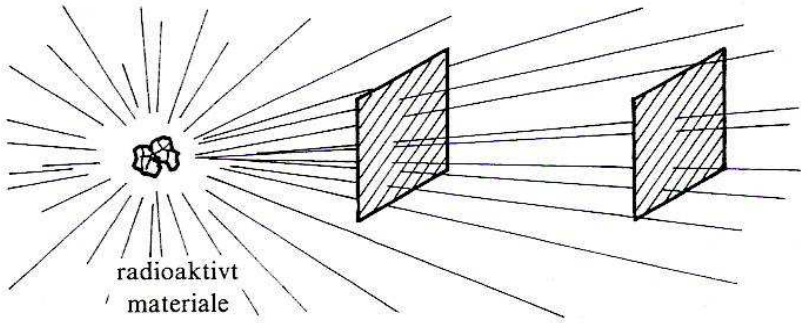


Fig. 2.4.1

Når vi derfor måler aktiviteten med et Geiger-Müller-rør (GM-rør), som har et ganske bestemt følsomt område til registreringen af strålingen (se figur 2.4.2 a)), så afhænger måleresultatet af afstanden r til den radioaktive kilde.

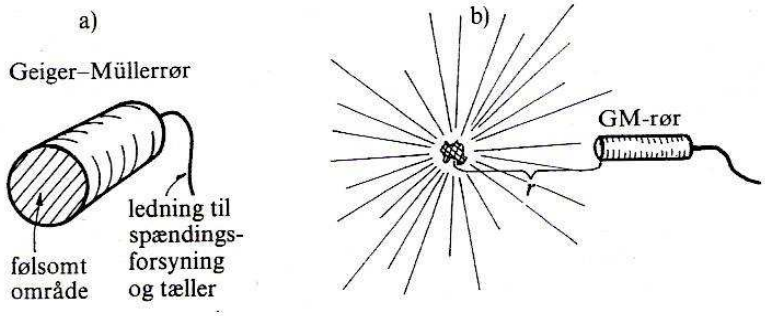


Fig. 2.4.2

I nedenstående tabel er anført resultaterne for en radioaktiv kilde (gammakilde), hvis totale aktivitet kan betragtes som konstant (idet kilden har en meget stor halveringstid).
A(r) angiver det registrerede antal partikler pr. minut i afstanden r cm fra kilden.

r	2	5	8	12	15
A(r)	600	96	35	16	10

Gør rede for (v.hj.a. dobbeltlogaritmisk papir og/eller potentiel regression), at A(r) kan skrives på formen: $A(r) = A_1 \cdot r^b$, hvor $A_1 = A(1)$ – og angiv værdien af konstanten b. ♥

Eksempel 2.4.10.

I øvelse 2.4.9 viste det sig forhåbentlig, at b = – 2, således at der gælder: $A(r) = A_1 \cdot r^{-2}$

At det må forholde sig således, kan vi argumentere for på bl.a. følgende måde:

Den totale aktivitet A_{total} fra kilden (dvs. den mængde stråling, der udsendes pr. sekund) kan betragtes som konstant p.gr.a. kildens store halveringstid. Strålingen spreder sig ud fra kilden i alle mulige retninger, dvs. i en kugleform – og jo længere væk fra kilden man er, desto mindre er mængden af stråling pr. arealenhed.

Hvis vi lader I(r) betegne strålingens intensitet (dvs. antal strålingspartikler pr. sekund pr. arealenhed anbragt vinkelret på strålingsretningen) i afstanden r fra kilden, så må den totale aktivitet være lig med strålingens intensitet gange kuglens overfladeareal, (hvor kuglens overfladeareal og arealenheden, der indgår i definitionen af intensiteten måles i samme enhed, f.eks. m^2), dvs.:

$$A_{total} = I(r)\cdot 4\pi r^2 \quad \text{og dermed:} \quad I(r) = \frac{A_{total}}{4\pi \cdot r^2} = \frac{A_{total}}{4\pi}\cdot\frac{1}{r^2}$$

Hvis vi sætter r = 1 får vi, at intensiteten i afstanden 1 er: $I(1) = \frac{A_{total}}{4\pi}\cdot\frac{1}{1^2}$ og dermed:

$$\boxed{I(r) = I(1)\cdot\frac{1}{r^2} \quad \text{eller:} \quad I(r) = I(1)\cdot r^{-2}}$$

Vi ser, at strålingens intensitet aftager med kvadratet på afstanden, hvoraf navnet: "*afstandskvadratloven*" kommer. *Bemærk også, at da enheden på I(r) og I(1) er den samme, regnes størrelsen* r^{-2} *uden enhed, blot talværdien for r er udmålt i samme enhed som 1-tallet i I(1).*

Hvis vi f.eks. har, at intensiteten i afstanden 1 m er $8{,}2\cdot 10^{14}$ partikler pr. sekund pr. m^2, så er intensiteten i afstanden 3,7 m lig med: $8{,}2\cdot 10^{14}\cdot 3{,}7^{-2} = 5{,}99\cdot 10^{13}$ partikler pr. sekund pr. m^2 .

Disse beregninger bygger naturligvis på den forudsætning, at der ikke absorberes noget af strålingen på vejen fra kilden og ud til afstanden r. Da der er meget ringe absorption af gammastråling i atmosfærisk luft, er denne forudsætning imidlertid opfyldt med meget god tilnærmelse i eksemplet i øvelse 2.4.9 med registrering af stråling med GM-røret.

Om størrelsen A(r) fra øvelse 2.4.9 gælder da, at: $A(r) = S_{GM}\cdot 60\text{sek/min}\cdot I(r) = c\cdot\frac{1}{r^2} = c\cdot r^{-2}$

hvor S_{GM} er arealet af GM-rørets følsomme område gange GM-rørets registreringsprocent (ikke alle partikler registreres, men en bestemt brøkdel heraf gør !), hvor der ganges med 60 sek/min, idet der i øvelse 2.4.9 arbejdes med minutter, og hvor c er en konstant.

Hvis vi i $A(r) = c\cdot r^{-2}$ sætter r = 1, får vi: A(1) = c, dvs. at konstanten c er det registrerede antal partikler pr. minut, hvis GM-røret befinder sig i afstanden 1 fra kilden. Hvis vi vælger benævnelsen A_1 for A(1) og dermed har, at $c = A_1$, så fremkommer udtrykket: $A(r) = A_1 \cdot r^{-2}$.

(Bemærk igen, at afstandene r og 1 skal måles i samme enhed, f.eks. cm, men at man i beregningen af A(r) derefter kun bruger talværdien af r, ikke enheden).

Afslutningsvist skal der fremhæves endnu en generel kommentar vedr. enheder i beregningerne. Hvis man f.eks. 5 km fra en (større) radioaktiv kilde – tænk f.eks. på et atomkraftværk efter en ulykke på en reaktortank – vil angive strålingsintensiteten, så vil en rimelig enhed for denne være: antal strålingspartikler pr. sek. pr. m^2 , og altså ikke pr. km^2. Hvis I(1) angiver strålingsintensiteten i afstanden 1 km fra kilden, men også måles i enheden: antal strålingspartikler pr. sek. pr. m^2, så

gælder der imidlertid stadigvæk: $I(5) = I(1)\cdot 5^{-2}$, idet afstanden er blevet 5 gang større hvormed intensiteten er blevet 5^2 gange mindre. Dette kan der generelt argumenteres for på følgende måde: Hvis I(1) og I(r) er intensiteterne målt i antal strålingspartikler pr. sek. pr. m^2 i en afstand på hhv. 1 km og r km fra kilden, så gælder der (hvorfor ?), at:

$$A_{total} = I(r)\cdot 4\pi\cdot(1000r)^2 \quad \text{og} \quad A_{total} = I(1)\cdot 4\pi\cdot(1000)^2 ,$$

og dermed:

$$I(r)\cdot 4\pi\cdot(1000r)^2 = I(1)\cdot 4\pi\cdot(1000)^2 \Leftrightarrow I(r)\cdot r^2 = I(1) \Leftrightarrow I(r) = I(1)\cdot r^{-2}$$

Vi ser altså, at afstandskvadratloven:

$I(r) = I(1)\cdot r^{-2}$ gælder blot der anvendes samme tidsenhed og samme arealenhed i angivelsen af I(r) og I(1), **og** blot der er anvendt samme længdeenhed ved afstandsangivelserne 1 og r.

$I(r) = I(1)\cdot r^{-2}$ gælder altså f.eks., hvis I(r) og I(1) begge måles i antal strålingspartikler pr. sek. pr. m^2 **og** hvis afstandene 1 og r begge måles i km (eller i sømil, hvis det ønskes).
I stedet for at skrive I(1) anføres ofte I_1, således at vi får: $I(r) = I_1\cdot r^{-2}$, men 1-tallet refererer i begge tilfælde til den samme afstandsenhed som anvendes for r, en enhed der ellers lades ude af betragtning i beregninger med formlen. ♥

Øvelse 2.4.11.
Lav et eksperiment som det i øvelse 2.4.9 skitserede – og efterprøv afstandskvadratloven. ♥

Eksempel 2.4.12.
Afstandskvadratloven gælder i andre fysiske sammenhænge, hvor kilden til fænomenet med rimelighed kan betragtes som punktformig set fra registreringsstedet. Dette gælder f.eks. følgende:

a) Intensiteten af lyset fra en lyskilde (f.eks. intensiteten af lyset fra forskellige stjerner observeret på jorden).

b) Intensiteten af varmestråling fra en given varmekilde (f.eks. et bål).

c) Intensiteten (lydstyrken) af lyden fra en lydkilde (f.eks. en højtaler eller et tågehorn).

d) Den elektriske kraftpåvirkning F på en ladning q, som befinder sig i afstanden r fra en anden ladning Q, er givet ved *Coulombs lov*:

$$F = k_c\cdot\frac{Q\cdot q}{r^2} , \quad \text{dvs.} \quad F = k_c\cdot\frac{Q}{r^2}\cdot q = E(r)\cdot q \qquad \text{hvor} \quad E(r) = k_c\cdot\frac{Q}{r^2}$$

k_c kaldes Coulomb-konstanten ($k_c = 8{,}99\cdot 10^9\ Nm^2/C^2$, hvor C står for ladningsenheden Coulomb), og størrelsen E(r) kaldes den elektriske feltstyrke i afstanden r fra ladningen Q. Feltstyrken angiver den elektriske kraftpåvirkning pr. ladningsenhed.
Det ses altså, at en given ladning Q i afstanden r skaber et elektrisk felt med styrken:

$$E(r) = \alpha\cdot r^{-2}$$

hvor α er en konstant.
Den elektriske feltstyrke fra en punktformig ladning opfylder altså afstandskvadratloven.

e) Massetiltrækningskraften F på et legeme med massen m, som befinder sig i afstanden r fra et andet legeme med massen M (f.eks. en planet og en stjerne), er givet ved *gravitationsloven*:

$$F = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} \quad \text{dvs.} \quad F = G \cdot \frac{M}{r^2} \cdot m = T(r) \cdot m \quad \text{hvor} \quad T(r) = G \cdot \frac{M}{r^2}$$

G kaldes gravitationskonstanten ($G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ Nm^2/kg^2$), og størrelsen T(r) kaldes gravitationsfeltstyrken i afstanden r fra massen M. Gravitationsfeltstyrken angiver tiltrækningskraften pr. masseenhed (f.eks. pr. kg). Gravitationsloven kaldes også for *massetiltrækningsloven*.
Det ses altså, at en given masse M i afstanden r skaber et gravitationsfelt med styrken:

$$T(r) = \delta \cdot r^{-2}$$

hvor δ er en konstant. Gravitationsfeltstyrken opfylder altså afstandskvadratloven. ♥

Som antydet i eksempel 2.4.10 gælder afstandskvadratloven under forudsætning af, at der ikke sker absorption undervejs fra kilden til "observationsstedet" i afstanden r fra kilden. Hvis der f.eks. er nogle huse eller en skov i vejen for en lydbølge, så vil dens intensitet ikke opfylde afstandskvadratloven på den anden side af disse forhindringer.

Andre eksempler fra fysik.

Eksempel 2.4.13.

a) Når et legeme bevæger sig (f.eks. en bil kører), så er det i besiddelse af bevægelsesenergi, som også kaldes kinetisk energi. Der gælder her følgende sammenhæng: $E_{kin} = \frac{1}{2} m \cdot v^2$
hvor E_{kin} er den kinetiske energi (måles i Joule (J)), m er legemets masse (måles i kg) og v er legemets hastighed (måles i m/s). For et givet legeme (og dermed en given masse) ser vi altså, at den kinetiske energi er en potentiel vækstfunktion af hastigheden, idet der gælder:

$$E_{kin}(v) = \text{konst.} \cdot v^2$$

b) Ofte er det af betydning at vide, hvor meget effekt (dvs. energi pr. tidsenhed) der kan afsættes i et elektrisk apparat som f.eks. en støvsuger, en kogeplade, en el-radiator, en forstærker osv.
Hvis vi ser på et apparat med resistansen (modstanden) R – jfr. eksempel 2.4.7 c) – så gælder der følgende sammenhæng mellem den afsatte effekt P, resistansen R og strømstyrken I: $P = R \cdot I^2$
Effekten P måles i Watt (W = J/s), og strømstyrken måles i Ampere (A).
Vi ser, at hvis vi betragter et apparat med en bestemt (konstant) resistans, så er effekten en potentiel vækstfunktion af strømstyrken, idet der gælder:

$$P(I) = \text{konst.} \cdot I^2$$

c) Den energimængde, der pr. sekund og pr. arealenhed udsendes fra overfladen af et varmt legeme (f.eks. en klump glødende lava eller en stjernes overflade) afhænger af legemets absolutte temperatur T målt i Kelvin (K). Energien udsendes i form af elektromagnetisk stråling (varmestråling, lys) og legemets farve, når det gløder, går fra det mørke over det rødlige og gullige til det hvidlige efterhånden som temperaturen forøges. Energimængden pr. sek. pr. arealenhed kaldes strålingens intensitet I, og om denne gælder *Stefan-Bolzmann's lov:*

$$I(T) = \sigma \cdot T^4$$

hvor konstanten σ er givet ved: $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}\ W/m^2K^4$
Vi ser altså, at strålingsintensiteten er en potentiel vækstfunktion af den absolutte temperatur.

d) I forbindelse med konstruktion af bygninger, maskiner osv. er det af betydning at vide, hvordan de forskellige dele påvirkes af de kræfter, der indgår. Vi vil her se på to simple eksempler:
   - en "tynd" bjælke (dvs. en bjælke hvis egenvægt kan lades ude af betragtning). Bjælken er indspændt i en "væg" i den ene ende og belastet med en enkeltkraft i den anden, frie ende (se figur 2.4.3 a))
   - en "tyk" bjælke (dvs. en bjælke hvis egenvægt spiller en rolle) eller en "tynd" bjælke, som er belastet med en jævnt fordelt belastning. Bjælken er indspændt i en "væg" i den ene ende (se figur 2.4.3 b))

a) b)

Fig. 2.4.3

En interessant størrelse at kende er bjælkens *maksimale nedbøjning* N_{max}. Denne afhænger bl.a. af bjælkens profil (dvs. tværsnittets udseende, f.eks. om den har form som et €, et H eller et L) og af det materiale bjælken er lavet af. I fagene teknisk styrkelære og statik viser man, at der for en <u>given bjælkeprofil og givet materiale</u> gælder følgende formler i hhv. situation a) og b):

$$\text{a)}\quad N_{max} = c \cdot F \cdot L^3 \qquad \text{og} \qquad \text{b)}\quad N_{max} = k \cdot \varphi \cdot L^4$$

hvor c og k er konstanter, F er enkeltkraftens størrelse, φ er belastningen pr. længdeenhed og L er bjælkens længde. For en <u>fast</u> værdi af F hhv. af φ er den maksimale nedbøjning altså en potentiel vækstfunktion af bjælken længde. ♥

<u>Øvelse 2.4.14.</u>

a) En given bil vejer 1100 kg. Bestem bilens kinetiske energi, når den kører med hastigheden 40 km/h og når den kører med 120 km/h. (Husk at omregne km/h til m/s !)
b) Et givet elektrisk apparat er i stand til at yde 850 W ved en strømstyrke på 10 A. Hvilken effekt kan apparatet yde ved en strømstyrke på 16 A ?
c) Ved måling fra en rumstation (dvs. udenfor Jordens atmosfære, som på forskellig vis absorberer stråling) kan intensiteten af Solens stråling måles. En værdi for denne intensitet er 1820 W/m^2. Jordens (rumstationens) afstand fra Solen er ca. $1{,}5 \cdot 10^{11}$ m, og Solens radius er $6{,}96 \cdot 10^8$ m. Beregn overfladetemperaturen på Solen.
   (<u>Vejledning</u>: Antag, at der ikke absorberes noget af den stråling, som forlader Solens overflade, før den er kommet ud i en afstand, der svarer til Jordens afstand fra Solen. Strålingen er blot spredt over et større område/areal. Anvend afstandskvadratloven og Stefan-Bolzman's lov). ♥

<u>Eksempel 2.4.15.</u>

a) Vi betragter et lod, som er ophængt i en snor. Hvis loddet sættes i svingninger lige frem og tilbage uden at "køre i ring", og hvis udsvingene (udsvingsvinklerne) ikke er for store, så viser man i fysik, at svingningstiden T i sådan en bevægelse er givet ved:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

hvor g er tyngdeaccelerationens størrelse ($g = 9{,}82\ m/s^2$ i Danmark), og hvor ℓ er længden af snoren (kaldet pendullængden). Vi ser dermed, at T som funktion af ℓ er en potentiel vækstfunktion på formen: $T(\ell) = \text{konst.} \cdot \ell^{\frac{1}{2}}$

Det bemærkes, at svingningstiden naturligvis bliver større, når længden bliver større, men også at svingningstiden ikke afhænger af loddets masse, hvilket måske nok kan overraske !!

b) Et lod hænger i en fjeder og svinger op og ned imellem to yderpositioner s_{max} og $-s_{max}$ (se figur 2.4.4). Afstanden fra ligevægtspunktet 0 til et af yderpunkterne kaldes svingningens amplitude.

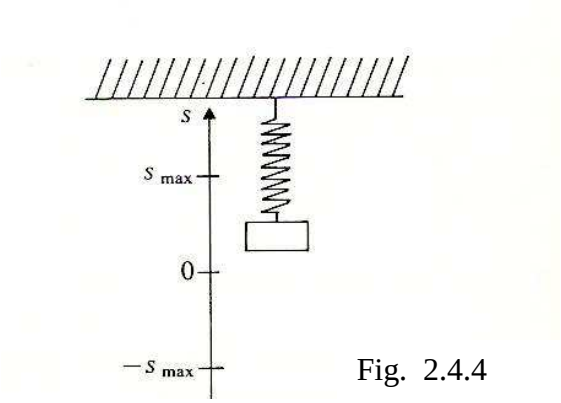


Fig. 2.4.4

I fysik vises det, at svingningstiden T for denne bevægelse er givet ved: $T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}$,

hvor m er massen af loddet, og hvor k kaldes fjederkonstanten. k fortæller noget om, hvor stiv fjederen er: jo større værdi af k, desto større stivhed. Det bemærkes, at jo stivere en fjeder, desto mindre er T, og dermed desto hurtigere foregår svingningerne – og det synes rimeligt. Det bemærkes ligeledes, at jo større masse loddet har, desto større bliver svingningstiden – og også det lyder fornuftigt. Derimod ses det, at svingningstiden ikke afhænger af amplituden i svingningen, hvilket måske kan virke lidt overraskende !!

Hvis vi betragter en given fjeder (og dermed en given k-værdi), så ser vi, at svingningstiden som funktion af den svingende masse er en potentiel vækstfunktion på formen: $T(m) = \text{konst.} \cdot m^{\frac{1}{2}}$ ♥

Øvelse 2.4.16:

a) Udfør det i eksempel 2.4.15 a) omtalte eksperiment. Prøv med 5-6 forskellige længder og mål for hver længde tiden for 10 hele svingninger, hvorefter svingningstiden T kan bestemmes. Opstil sammenhørende værdier af længde og svingningstid i en tabel – og prøv at eftervise v.hj.a. dobbeltlogaritmisk papir og/eller potentiel regression, at $T(\ell) = \text{konst.} \cdot \ell^{\frac{1}{2}}$

b) Udfør det i eksempel 2.4.15 b) omtalte eksperiment. Prøv med 5-6 forskellige masser, anvend en ikke for stiv fjeder og mål for hver længde tiden for 10 hele svingninger, hvorefter svingningstiden T kan bestemmes.
Opstil sammenhørende værdier af masse og svingningstid i en tabel – og prøv at eftervise v.hj.a. dobbeltlogaritmisk papir og/eller potentiel regression, at $T(m) = \text{konst.} \cdot m^{\frac{1}{2}}$ ♥

Øvelse 2.4.17.
I denne øvelse vil vi undersøge et såkaldt frit fald ved at udføre eksperimentet og analysere på de målte data. Et frit fald betyder, at et legeme falder i tyngdefeltet uden nogen anden påvirkning end tyngdekraften. Der skal derfor være tale om et fald, hvor vi kan se bort fra luftmodstanden, hvormed vi i denne sammenhæng ikke kan betragte faldet af f.eks. et stykke papir eller en plasticpose. Vi vil se på faldet af et metallod, en metalkugle, en rund sten eller lign.
Forsøget kan laves mere eller mindre sofistikeret afhængig af, hvilket apparatur man har til rådighed (man kan f.eks. benytte fotoceller, elektronisk registrering af faldtider osv.). Men vi vil her se på forsøget i den apparaturmæssigt simplest mulige udgave hvor der bruges et langt målebånd, et stopur (f.eks. på en mobiltelefon) og en trappeopgang (eller vinduer i forskellig højde).
Udmål forskellige faldlængder (mindst 4 forskellige, gerne flere), lad stenen eller kuglen falde (blot giv slip) samtidig med at tidtageren råber "Nu", når uret startes, og mål faldtiden.
Undersøg om der er en potentiel sammenhæng mellem faldtiden og faldstrækningen.

Teoretisk forventes det, at der gælder: $s(t) = \frac{1}{2} g \cdot t^2$, hvor s er faldstrækningen, t er faldtiden og g er tyngdeaccelerationen ($g = 9{,}82$ m/s^2 i Danmark), dvs. teoretisk forventes, at $s(t) = 4{,}91 \cdot t^2$.
Hvordan stemmer de målte resultater overens med denne forventning ?
Prøv at finde årsager til eventuelle afvigelser (hvad kan gå galt i forsøget). ♥

Øvelse 2.4.18.
Planeterne i vores solsystem roterer regelmæssigt om Solen med en bestemt omløbstid, som afhænger af planeternes afstand til Solen. Planeterne fastholdes i banen om Solen af gravitationskraften imellem planet og Sol (jfr. eksempel 2.4.12 e)).
Afstande i Solsystemet måles typisk i såkaldte astronomiske enheder (AE), hvor 1 AE er lig med Jordens middelafstand til Solen (bemærk, at planetbanerne om Solen ikke er helt cirkulære, men har form som en ellipse). Der er målt følgende sammenhæng mellem planeternes omløbstid T_{oml} om Solen og deres middelafstand r til Solen:

Planet	Merkur	Venus	Jorden	Mars	Jupiter	Saturn	Uranus	Neptun	Pluto
T_{oml} (år)	0,241	0,615	1,00	1,88	11,86	29,42	83,75	163,72	248,02
r (AE)	0,387	0,723	1,000	1,524	5,203	9,555	19,218	30,110	39,545

a) Argumentér for på baggrund af disse data, at der med meget god tilnærmelse gælder, at
$$r = k \cdot T_{oml}^{2/3}$$
Middelafstanden som funktion af omløbstiden er altså en potentiel vækstfunktion.

Astronomen og matematikeren Johannes Kepler (1571–1630), som i nogle år arbejdede som assistent for den danske astronom Tycho Brahe (som i øvrigt arbejdede i Prag i disse år), arvede efter Tycho Brahes død hans meget nøjagtige optegnelser bl.a. over planeternes bevægelser – og på baggrund af disse optegnelser fandt han følgende pæne sammenhæng: planeternes omløbstid i 2. potens er proportional med deres middelafstand i 3. potens (Dette kaldes *Keplers 3. lov*).
b) Argumentér for, at den under pkt. a) fundne sammenhæng mellem middelafstand og omløbstid kan omformes til at give Keplers 3. lov.

c) Bestem middelafstanden i AE til Halleys komet, som også roterer omkring Solen, idet T_{oml} for kometen er 76,0 år. ♥

Biologi og medicin

Eksempel 2.4.19.

Ved en teoretisk undersøgelse af forskellige dyrs og menneskers kropsstørrelse vurderes bl.a. sammenhængen mellem stofskiftet og kropsvægten.

Den kemiske energi, som en given organisme optager, bruges dels til produktion af vævsceller, dels til andre energikrævende processer som f.eks. opretholdelse af den indre temperatur og udførelse af mekanisk eller kemisk arbejde (f.eks. når en arm bøjes, eller når der foregår en aktiv transport af stoffer fra områder med lavere til områder med højere koncentrationer).

Stofskifteprocessen har således mange "afdelinger", som vanskeligt kan måles hver for sig. Man samler derfor det hele i begrebet *respiration*.

Idet ilt indgår som det væsentligste led i stofskifteprocesserne, kan respirationen måles ud fra den hastighed, hvormed den af lungerne optagne ilt omsættes.

Ved indtegning i et dobbeltlogaritmisk koordinatsystem har man empirisk (dvs. erfaringsmæssigt) fundet, at (hvile-)iltoptagelsen V_{ilt} pr tidsenhed kan beskrives ved:

$$V_{ilt} = k \cdot M^{0.74}$$

hvor M er kropsvægten (målt i kg), og hvor k er en konstant. k er ca. lig med 0,011, når V_{ilt} måles i liter pr. minut og M (som omtalt) måles i kg. Denne relation gælder for dyr med meget store forskelle i størrelse lige fra en mus til en elefant.

Vi ser heraf, at stofskiftet pr. kropsvægtenhed ($V_{relativ}$) er givet ved:

$$V_{relativ} = \frac{V_{ilt}}{M} = k \cdot M^{-0,26}$$

Vi ser således, at små dyr skal have et meget højere stofskifte pr. kropsvægtenhed end store dyr (idet $M^{-0,26}$ er aftagende, jfr. sætning 1.6.4). Det er da også velkendt, at en mus hver dag skal spise mere, end den selv vejer.

Da fedtvæv er inaktive i stofskifteprocessen (idet fedtvæv stort set ikke er energikrævende), skal ovenstående betragtninger egentlig korrigeres til følgende:

$$V_{ilt} = k \cdot (M - m)^r$$

hvor m er massen af de inaktive fedtvæv, og r er en konstant.

For mennesker af forskellig størrelse og alder har man fundet, at konstanten r er ca. lig med 0,71. ♥

Øvelse 2.4.20.

I nedenstående tabel ses sammenhængen mellem nogle pattedyrs kropsvægt M og hjertevægt H.

Indtegn sammenhængende værdier i et dobbeltlogaritmisk koordinatsystem (da det næppe er muligt at skaffe et dobbeltlogaritmisk papir med 5 dekader, kan punkterne (lnM, lnH) indtegnes i et almindeligt koordinatsystem).

	Mus	Rotte	Hare	Hund	Menneske	Hest
M gram	30	150	3000	20000	75000	900000
H gram	0,2	0,85	20	130	400	5500

Argumentér for, at der med god tilnærmelse gælder, at

$$H = 0{,}0065 \cdot M^{0,99}$$

Udfør samme beregning v.hj.a. potentiel regression.

Bemærk, at hjertets masse ifølge udtrykket $H = 0{,}0065 \cdot M^{0,99}$ praktisk talt udgør en konstant brøkdel af kropsvægten, uanset dennes størrelse. ♥

Eksempel 2.4.21.
Til en hurtig klassificering af en voksen persons eventuelle overvægt kan man anvende det såkaldte *body mass index* (BMI), som beregnes ved at personens vægt m (målt i kg) divideres med personens højde h (målt i m) opløftet i 2. potens, altså:

$$\text{BMI} = \frac{m}{h^2}$$

hvorefter den fundne værdi sammenholdes med den følgende groft inddelte tabel, som giver nogle overvægtskategorier på baggrund af BMI-værdien:

Normalvægt	Overvægt	Fedme	Svær fedme
$20 < \text{BMI} \leq 25$	$25 < \text{BMI} \leq 30$	$30 < \text{BMI} \leq 40$	$40 < \text{BMI}$

Hvis en person vejer 103 kg og er 1,81 m høj, så er vedkommendes BMI lig med 31,4 (kontrollér) Den pågældende person må da i henhold til klassificeringsmodellen betegne som "fed".

Lad os starte med at konstatere, at for personer med en given vægt (dvs. med samme værdi af m) er BMI en potentiel vækstfunktion af personernes højde: $\text{BMI}(h) = m \cdot h^{-2}$.

Lad os dernæst se lidt på modellens brugbarhed/troværdighed/fuldstændighed.
Der er ingen tvivl om, at hvis man f.eks. vejer 85 kg, så gælder der, at jo højere man er, desto mindre overvægtig må man vurderes at være, hvilket stemmer fint overens med funktionsforskriften for BMI(h), som angiver en aftagende funktion. Men der er tilsyneladende ingen begrundelse for, at eksponenten på h skal være –2. Det kunne f.eks. være –1,6 eller –2,3.
Tilsvarende er det klart, at hvis man f.eks. er 1,67 m høj, så gælder der, at jo mere man vejer, desto mere overvægtig må man vurderes at være, hvilket stemmer fint med, at massen indgår i tælleren i BMI-formelen. Men som før er der ingen begrundelse for, at eksponenten på m skal være 1. Det kunne f.eks. være $m^{1,3}$ eller $m^{0,7}$ – som også er voksende funktioner af massen.
Dernæst kommer værdierne, som adskiller de forskellige overvægtskategorier (dvs. BMI-værdierne 20, 25, 30 og 40). Disse er valgt på baggrund af empiriske (erfaringsbaserede), men subjektive vurderinger af hvornår en person er overvægtig, fed osv. – og det er vel i et vist omfang en skønssag. Der er i denne sammenhæng en kosmetisk, en helbredsmæssig og en psykologisk synsvinkel at tage højde for.

Endelig skal det bemærkes, at der ikke i modellen tages højde for kropsbygning, køn og alder (bortset fra at man skal være voksen (altså udvokset) – typisk over 18 år).
Man kunne f.eks. udbygge modellen med en faktor for hver af disse størrelser:

- α, som beskriver kropsbygningen. α kunne f.eks. ligge i intervallet $[0{,}9\,;1{,}1]$, hvor den mindste værdi bruges ved kraftigt byggede personer og den største værdi bruges ved spinkelt byggede. Fastsættelsen af denne værdi kræver naturligvis en vurdering, som kun kan være delvis objektiv.
- β, som beskriver køn (hvis det altså vurderes rimeligt at skelne imellem kønnene i denne sammenhæng): Man kunne f.eks. sætte $\beta = 0{,}95$ for mænd og $\beta = 1$ for kvinder ?!
- γ, som beskriver alderen (hvis det altså skønnes rimeligt at skelne mellem forskellige aldre i denne sammenhæng). Man kunne f.eks. sætte γ lig med hhv. 1, 0,98, 0,96, 0,94, 0,92 og 0,90 afhængig af, om man er i aldersgruppen 18-28 år, 28-38 år, 38-48 år, 48-58 år, 58-68 år eller over 68 år.

Alt i alt ville modellen derfor se således ud: $\text{BMI} = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \frac{m^q}{h^p}$, hvor p og q er positive tal.

Dette ville givet gøre modellen mere korrekt, men der ville stadigvæk være subjektive elementer involveret i modellen, nemlig dels i fastlæggelsen af værdierne α, q og p, dels i grænserne for BMI-værdier og de dertil knyttede klassificeringsnavne/overvægtsbenævnelser. Men modellen ville være meget mere kompliceret at bruge og forstå i praksis. Så på trods af sine svagheder har den først beskrevne BMI-model altså også nogle styrker (nem at forstå og nem at bruge). Modellen må betegnes som en relevant tommelfingerregel, som bestemt er bedre end ingenting, men som ikke må anvendes ukritisk, og som ikke kan stå alene. Bemærk: Den bedste badevægt er og bliver et spejl ! ♥

Øvelse 2.4.22.
En kendt tommelfingerregel til beregning af en persons idealvægt er følgende:
For de første 152 cm af personens højde medregnes 50 kg, hvorefter der lægges 1 kg til for hver cm personen er over 152 cm.
Er man f.eks. 168 cm høj, så er idealvægten 66 kg (kontrollér), hvis man vel og mærke er en person med normal kropsbygning. Er man spinkelt bygget, trækkes der 10 % fra, når idealvægten bestemmes, og er man kraftigt bygget, lægges der 10 % til.

a) Beregn idealvægten for en 183 cm høj person med spinkel kropsbygning.
b) Beregn idealvægten for en 155 cm høj person med kraftig kropsbygning.
c) Bestem BMI for de tre omtalte personer i denne opgave (168 cm, 183 cm og 155 cm høje). Har de "normalvægt" i hht. BMI-modellen ? ♥

Økonomisk-afsætningsmæssige forhold

Ved en virksomheds *afsætning* af en given vare (et givet produkt) forstår vi antallet af vareenheder, som virksomheden kan sælge på et givet marked (indenfor et bestemt tidsrum).
Hvis vi f.eks. ser på virksomheden Brød & Kager A/S, som pr. måned kan sælge 22000 poser af deres produkt "Søde Småting" på det danske marked, så er virksomhedens afsætning på det danske marked af produktet altså 22000 stk. pr. måned.
En virksomheds afsætning af en given vare på et givet marked afhænger af mange ting, bl.a. af varens pris, varens kvalitet, den reklameindsats virksomheden ofrer for varen på markedet, konkurrencen på markedet, markedets demografiske struktur, salgskanalerne (hvem sælger varen) og evt. sæsonforhold. Vi vil imidlertid hér i dette korte afsnit kun se på prisens betydning for afsætningen.

Bortset fra helt specielle forhold/varer må det gælde, at jo højere prisen er, desto færre varer kan der afsættes på markedet. Afsætningen q som funktion af prisen p er altså en aftagende funktion.
Den simpleste model til beskrivelse heraf er en lineært aftagende funktion. En sådan model er imidlertid ofte for simpel, bl.a. hvis man ser på et relativt stort prisinterval for varen, og/eller hvis man ser på varer, hvor afsætningen er særligt følsom overfor prisændringer. I sådanne tilfælde kan en model af typen: "afsætningen falder med en bestemt procentdel, når prisen øges med en bestemt procentdel" ofte være væsentlig mere relevant at anvende. Dette betyder ifølge sætning 1.6.14 og sætning 1.6.17 at (aftagende) potentielle vækstfunktioner, dvs. funktioner af typen: $q(p) = b \cdot p^{-a}$ kommer på banen, hvor a og b er positive tal.
Ved en virksomheds *omsætning* Oms for en given vare på et givet marked forstås afsætningen q gange prisen p, dvs. antallet af kroner (eller anden møntenhed) som virksomheden får ind ved salget af varen – igen indenfor et vist tidsrum. Vi har altså, at: $Oms = q \cdot p$, og da q er en funktion af p, bliver Oms også en funktion af p. Hvis vi specielt har den potentielle model $q(p) = b \cdot p^{-a}$, så får vi, at $Oms(p) = q(p) \cdot p = b \cdot p^{-a+1}$, altså også en potentiel vækstfunktion.

Eksempel 2.4.23.
Vi ser igen på virksomheden Brød & Kager. Virksomheden kan pr. halvår afsætte 22000 stk. "Søde Småting", hvis prisen er 12 kr. pr. stk. Desuden viser erfaringen med andre tilsvarende produkter, at afsætningen falder med 8 %, når prisen forøges med 6 % - og virksomheden bruger dette som model for "Søde Småting".
Som omtalt ovenfor vil en forskrift for afsætningen som funktion af prisen have udseendet:

$$q(p) = b \cdot p^{-a}$$

og ifølge sætning 1.6.14 3) gælder der (kontrollér), at

$$-a = \frac{\ln(1+(-0{,}08))}{\ln(1+0{,}06)} \Leftrightarrow a = -\frac{\ln(0{,}92)}{\ln(1{,}06)} \Leftrightarrow a = 1{,}431$$

For at finde værdien af b anvendes, at $q(12) = 22000$, hvor af vi finder (kontrollér !), at $b = 770426$
Den søgte funktionsforskrift er altså:

$$q(p) = 770426 \cdot p^{-1{,}431}$$

Grafen for afsætningsfunktionen ser således ud:

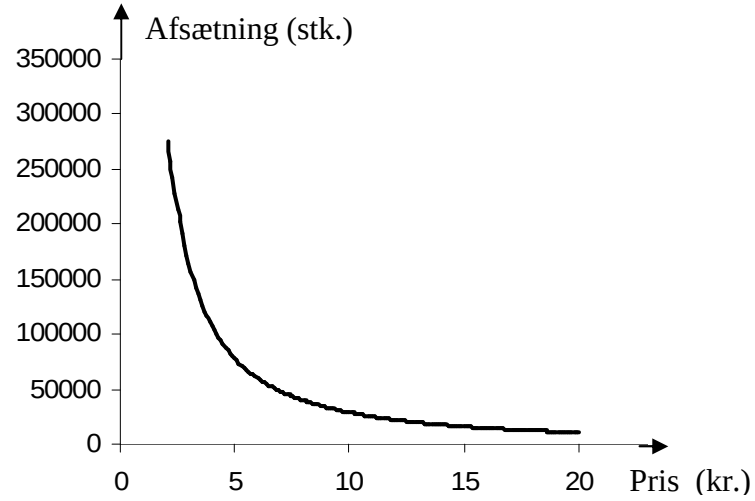


Fig. 2.4.5

For omsætningen Oms(p) gælder, at:
$Oms(p) = q(p) \cdot p = 770426 \cdot p^{-0{,}431}$

Vi ser, at $Oms(12) = 264000$ kr., hvilket (naturligvis) svarer til:
22000 stk.·12 kr./stk = 264000 kr.

Vi vender i kapitel 4 tilbage til dette eksempel. ♥

Øvelse 2.4.24.
a) Bestem afsætning og omsætning i eksempel 2.4.23, hvis prisen pr. stk. er 8 kr. hhv. 18 kr.
b) Bestem *prisfunktionen*, dvs. p som funktion af q (altså den omvendte funktion til q(p))
– og udtryk i ord, hvad denne funktion beskriver. ♥

Øvelse 2.4.25.
I en større by er det ugentlige antal buspassagerer med det kommunale trafikselskab afhængig af den gennemsnitlige billetpris. Passagerantallet er bl.a. p.gr.a. konkurrence fra undergrundsbanen og fra et privat busselskab meget følsomt overfor prisændringer. Det har vist sig, at passagertallet falder med 6,5 % hvis prisen forøges med 5 %, samt at det ugentlige passagerantal er 700.000, når billetprisen er 12 kr.
a) Bestem passagerantallet A(p) som funktion af billetprisen p.
b) Bestem den relative ændring i passagerantallet, hvis billetprisen forøges med 9 %.
c) Bestem den relative ændring i omsætningen, hvis billetprisen forøges med 9 %.
d) Kommentér resultaterne. ♥