Kapitel 1: Nogle nødvendige begreber.

I forbindelse med arbejdet med grænseværdi, kontinuitet og differentiabilitet får vi brug for nogle begreber, som må formodes at være ukendte for de fleste læsere på det matematiske udviklingstrin, der svarer til at stå overfor at skulle sætte sig ind i grænseværdi osv. Det drejer sig om begreberne kvantorer og omegne.

Kvantorer.

Ordet kvantorer har samme sproglige oprindelse som ordet kvantitet, altså noget der har med antal at gøre. Vi skal her beskæftige os to kvantorer: Alkvantoren $\forall$ og eksistenskvantoren $\exists$.

Alkvantoren $\forall$ læses "For alle" og den følges op af navnet på en variabel (et tal, en mængde, en ..), som sammen med et udsagn om den variable giver et alment, generelt gældende udsagn om denne variable. Lad os f.eks. prøve at se på følgende:

$$\forall x \in R: \; x > 3 \Rightarrow x^2 > 8{,}24$$

Dette generelle udsagn læses: "For alle x indeholdt i de reelle tal R gælder der at, hvis x er større end 3, så er x^2 større end 8,24". Til dette udsagn kan bl.a. knyttes følgende kommentarer:

- Kolonet efter R læses: "gælder der at"
- Udsagnet betyder, at uanset hvilket reelt tal x vi ser på, så påstås det, at hvis blot x er større end 3, så er x^2 større end 8,24.
- Udsagnet er derfor sandt (korrekt).

Bemærk, at vi kan "stramme op" på udsagnet ved at erstatte 8,25 med 9, så der står:

$$\forall x \in R: \; x > 3 \Rightarrow x^2 > 9$$

og det vil stadigvæk være sandt.
Men hvis vi erstatter 8,24 med et tal, der er større end 9, f.eks. 14,6, så der kommer til at stå:

$$\forall x \in R: \; x > 3 \Rightarrow x^2 > 14{,}6$$

så bliver det samlede udsagn falsk, idet der f.eks. gælder, at $3{,}7 > 3$, men $3{,}7^2 = 13{,}69$ er ikke større end 14,6. Da der altså eksisterer et reelt tal (her tallet 3,7), som opfylder, at tallet er større end 3, men at tallet i anden ikke er større end 14,6, så er det dermed ikke sandt, at der for alle x …..

Hvis vi ændrer udsagnet til:

$$\forall x \in Z: \; x > 3 \Rightarrow x^2 > 14{,}6$$

så får vi igen et sandt udsagn frem, idet hvis x er et vilkårligt helt tal, som er større end 3, så er x^2 større end 14,6 (Overvej !).

Øvelse 1.1.
Undersøg om følgende udsagn er sande eller falske – og argumentér grundigt herfor:

a) $\forall x \in Z: \; x < 3 \Rightarrow x^2 > 7$
b) $\forall x \in R: \; 2x + 5 = 3 \Rightarrow x = 4$
c) $\forall x \in R: \; (x + 12)^2 = 144 + 24x + x^2$
d) $\forall x \in N: \; \frac{17}{x} \in N \Rightarrow x = 17$
e) $\forall x \in Z: \; x$ er et rationalt tal
f) $\forall x \in R_- : \; x^2 > 16 \Rightarrow x < -4$ ♥

Eksistenskvantoren $\exists$ læses: "der eksisterer" (eller lign.), og den følges op af navnet på en variabel (et tal, en mængde, en ..), som sammen med et udsagn om den variable giver et eksistensudsagn om den variable. Lad os f.eks. prøve at se på følgende:

$$\exists x \in R: \; x^2 = 2$$

hvilket læses: "Der eksisterer et reelt tal x hvorom det gælder, at x^2 er lig med 2"
Betydningen af dette er ret indlysende, men er det sandt ? Ja, som det nok er læseren bekendt, så er dette en af de historisk set meget interessante erkendelser, at der eksisterer et sådant tal. Der er helt nøjagtigt to sådanne tal, nemlig de irrationale tal: $x = \sqrt{2}$ og $x = -\sqrt{2}$.

Lad os dernæst prøve at se på det falske udsagn fra før: $\forall x \in R: \; x > 3 \Rightarrow x^2 > 14{,}6$.
Hvis vi her i stedet for skriver: $\exists x \in R: \; x > 3 \Rightarrow x^2 > 14{,}6$, så får vi et sandt udsagn, idet vi f.eks. kan vælge x = 100.
Hvis vi desuden ændrer på det sidste ulighedstegn, så der står:

$$\exists x \in R: \; x > 3 \Rightarrow x^2 \le 14{,}6,$$

så er dette også sandt, idet dette netop er det modsatte udsagn (overvej !) af det falske udsagn:

$$\forall x \in R: \; x > 3 \Rightarrow x^2 > 14{,}6.$$

Og vi så da også ovenfor, at hvis vi vælger x = 3,7, så har vi at x > 3 og samtidigt at $x^2 \le 14{,}6$.
Vi vil imidlertid ikke komme yderlige ind på sådanne problemstillinger her.

Øvelse 1.2.
Undersøg om følgende udsagn er sande eller falske – og argumentér grundigt herfor:

a) $\exists x \in R: \; x^2 + x - 30 = 0$
b) $\exists x \in R: \; -x^2 + x - 30 = 0$
c) $\exists q \in N: \; q < 200 \wedge \frac{3713}{q} \in N$
d) $\exists t \in Z: \; \frac{t}{t+1} > \frac{t}{t-1}$
e) $\exists a \in N: \; [6;a] \subseteq \left[6;\sqrt{48}\right]$
f) $\exists p \in R: \; p^2 - 3 < -\sqrt{10}$ ♥

Kvantorerne kan også kombineres på f.eks. følgende måde:

$$\forall x \in R: \exists y \in R: \; y > 2x$$

hvilket læses: "For alle reelle tal x eksisterer der et reelt tal y, så y er større end det dobbelte af x". Dette samlede udsagn er åbenlyst korrekt, idet der ikke findes noget største reelt tal.

Ifølge Appendix 1 gælder der, at uanset hvilke to forskellige reelle tal vi ser på, så findes der et rationalt tal imellem disse. Dette resultat kan v.hj.a. kvantorer skrives på følgende måde (overvej !):

$$\forall x_1, x_2 \in R: \exists q \in Q: \; x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 < q < x_2$$

Øvelse 1.3.
Undersøg om følgende udsagn er sande eller falske – og argumentér grundigt herfor:

a) $\exists s \in R: \forall t \in R: \; s \cdot t = 0$
b) $\forall x \in R_+: \exists n \in N: \; \frac{1}{n} < x$
c) $\forall x \in R: \; \forall y \in N: \; x^2 + y^2 > 1$
d) $\exists k \in R_+: \forall x \in \;]3;7]: \; k > \frac{1}{x-3}$ ♥

Omegne.

Definition 1.4.
Ved en omegn $\omega(t)$ om et tal t forstås et åbent, symmetrisk interval omkring t.
(Omegnen tegnes enten oven i eller lidt oven over tallinien).

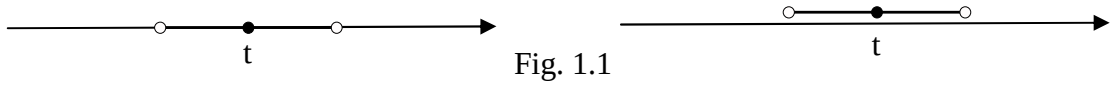


Fig. 1.1

Ved en udprikket omegn $\omega'(t)$ om et tal t forstås et åbent, symmetrisk interval omkring t – fraregnet tallet t selv.

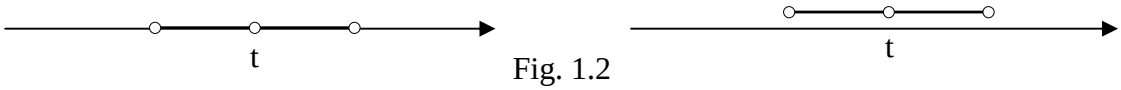


Fig. 1.2

Ved radius for en omegn $\omega(t)$ eller en udprikket omegn $\omega'(t)$ forstås afstanden fra omegnsmidtpunktet t til et af intervalendepunkterne.

Radius i en omegn benævnes ofte med et græsk bogstav, typisk ε (epsilon), δ (delta) eller ρ (rho).
Omegne bruges primært i forbindelse med begreberne grænseværdi for og kontinuitet af funktioner (se kapitel 2 og 3).

Øvelse 1.5.
Overvej, at følgende gælder:
I ethvert interval I, som indeholder et givet tal t – og hvor t ikke er endepunkt for intervallet –, findes en omegn $\omega(t)$ om t, som helt er indeholdt i intervallet I, dvs. $\omega(t) \subseteq I$. ♥

I forlængelse af øvelse 1.5 giver vi følgende definition:

Definition 1.6.
Lad A være en mængde af reelle tal, dvs. $A \subseteq R$.
Et tal t siges at være et indre punkt i mængden A, hvis der findes en omegn $\omega(t)$ om t, som helt ligger indenfor A, dvs. $\omega(t) \subseteq A$.

Øvelse 1.7.

a) Bestem mængden af indre punkter i mængden $A = \{0,1,2,3\} \cup]20;30]$

b) Bestem mængden af indre punkter i Dm(f), hvor $f(x) = \frac{1}{x}$

c) Argumentér for, at der ikke findes nogen indre punkter i mængden Q af rationale tal.
(Vejledning: Se Appendix 1) ♥

Eksempel 1.8.
Betragt funktionen $g(x) = 5x - 4$. Vi vil argumentere for følgende udsagn: For enhver omegn $\omega(26)$ med radius ε findes en omegn $\omega(6)$ med radius $\frac{\varepsilon}{5}$, så der for alle $x \in \omega(6)$ gælder, at $g(x) \in \omega(26)$.
Vi analyserer situationen og ser (overvej !), at

$$g(x) \in \omega(26) \Leftrightarrow 26-\varepsilon < g(x) < 26+\varepsilon \Leftrightarrow 26-\varepsilon < 5x-4 < 26+\varepsilon$$
$$\Leftrightarrow 30-\varepsilon < 5x < 30+\varepsilon \Leftrightarrow 6-\tfrac{\varepsilon}{5} < x < 6+\tfrac{\varepsilon}{5} \Leftrightarrow x \in \omega(6)$$

Specielt ser vi altså, at hvis $x \in \omega(6)$, så er $g(x) \in \omega(26)$, hvormed det ønskede er bevist.
Bemærk (overvej !), at vi hermed har bevist udsagnet: $\forall\omega(26)\,\exists\,\omega(6)$: $x \in \omega(6) \Rightarrow g(x) \in \omega(26)$.
Udsagn af denne type vil vi vende tilbage til i forbindelse med grænseværdi og kontinuitet. ♥

Øvelse 1.9.

Betragt funktionen $f(x)=\frac{1}{(x-2)^2}$. Gør rede for, at der gælder følgende:

a) Der findes en udprikket omegn ω'(2) om 2, så der for ethvert $x \in \omega'(2)$ gælder, at: $f(x) > 100$
b) For ethvert positivt tal K findes en udprikket omegn ω'(2) om 2, så der for ethvert $x \in \omega'(2)$ gælder, at: $f(x) > K$.

Skriv udsagnene i a) og i b) ved hjælp af kvantorer. ♥

Definition 1.10.

Ved en omegn $\omega_+(t)$ til højre for et tal t forstås et åbent interval, der har t som venstre endepunkt.

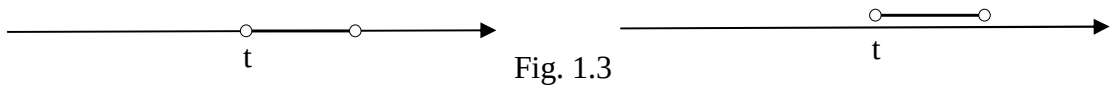


Fig. 1.3

Ved en omegn $\omega_-(t)$ til venstre for et tal t forstås et åbent interval, der har t som højre endepunkt.

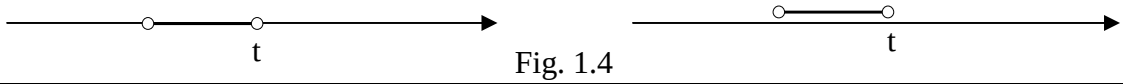


Fig. 1.4

Øvelse 1.11.

Gør rede for, at

a) hvis længden af en omegn $\omega_+(t)$ til højre for et tal t har længden ε, så kan omegnen skrives som: $\omega_+(t) =]t;t+\varepsilon[$
b) hvis længden af en omegn $\omega_-(t)$ til venstre for et tal t har længden ε, så kan omegnen skrives som: $\omega_-(t) =]t-\varepsilon;t[$ ♥

Øvelse 1.12.

Betragt funktionen $g(x) = \frac{3}{x-4}$. Argumentér for at der gælder følgende:

a) For ethvert ("stort") positivt tal K findes en omegn $\omega_+(4)$ til højre for 4, så der for ethvert $x \in \omega_+(4)$ gælder, at: $g(x) > K$.
b) For ethvert ("stort") negativt tal L findes en omegn $\omega_-(4)$ til venstre for 4, så der for ethvert $x \in \omega_-(4)$ gælder, at: $g(x) < L$.

Skriv udsagnene i a) og i b) ved hjælp af kvantorer. ♥

Kapitel 2: Grænseværdi for funktion.

Det vil for de fleste læsere være en god idé at læse Appendix 1 inden læsning af dette kapitel.

Begrebet grænseværdi udgør det matematiske fundament for de følgende kapitler. Det er derfor af afgørende betydning af have en god forståelse af grænseværdi – for at kunne forstå vigtige begreber som kontinuitet og differentiabilitet af funktioner.

Som en første upræcis, men intuitiv, definition på grænseværdi kan vi sige, at:
Et tal a siges at være grænseværdi for en funktion f i et punkt x_o , hvis f(x) ligger tæt på tallet a, når x ligger tæt på x_o – uden dog at antage værdien x_o

Vi kan stramme lidt op omkring denne definition ved at udtrykke, at:
Et tal a er grænseværdi for en funktion f i punktet x_o, hvis vi kan få funktionsværdierne f(x) lige så tæt på a, som vi ønsker, når blot x er tilstrækkeligt tæt på x_o, idet der dog skal gælde, at $x \neq x_o$.

Oftest bruges i øvrigt talemåden: a er grænseværdi for f(x) for x gående mod x_o – og vi skriver:

$$f(x) \to a \quad \text{for} \quad x \to x_o$$

Eksempel 2.1.
På figur 2.1 ses grafen for en funktion g:

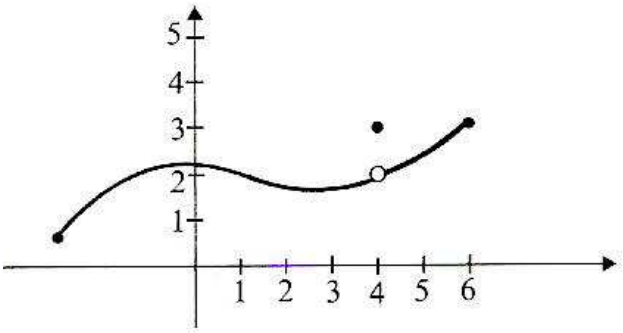


Fig. 2.1.

Vi ser, at g(x) ligger tæt ved 2, når x ligger tæt ved 4 (men dog forskellig fra 4, idet g(4) = 3).
Vi vil derfor sige, at g(x) har grænseværdien 2 for x gående mod 4, dvs. $g(x) \to 2$ for $x \to 4$ ♥

Eksempel 2.2.

Lad os se på funktionen $h(x) = \dfrac{x^2 - x - 6}{4x^2 - 16x + 12}$.

Vi vil undersøge hvad der sker med h(x), når x går mod 3.
Vi starter med at konstatere, at hvis vi indsætter 3 i stedet for x i nævneren, så får vi 0 (kontrollér !), hvilket betyder, at funktion h ikke er defineret i 3. Det gør dog ikke noget, for når vi skal have x gående mod 3, så bliver x ikke lig med 3 !!

Vi vil udregne en række funktionsværdier for h(x), når x er tæt på 3. Se den følgende tabel:

x	h(x)	x	h(x)
2	1	4	0,5
2,8	0,66666666	3,2	0,59090909
2,95	0,63461538	3,05	0,61585366
2,995	0,62593985	3,005	0,62406484
2,99995	0,62500038	3,00005	0,62499063
2,9999995	0,62500008	3,0000005	0,62499992

Det ser således ud til, at h(x) går imod 0,625 for x gående mod 3.
Vi skal senere (øvelse 2.15) vise, at $h(x) \to \frac{5}{8}$ for $x \to 3$. (Bemærk, at $\frac{5}{8}$ netop er lig med 0,625).

Hvis vi tegner grafen for h, får vi følgende resultat:

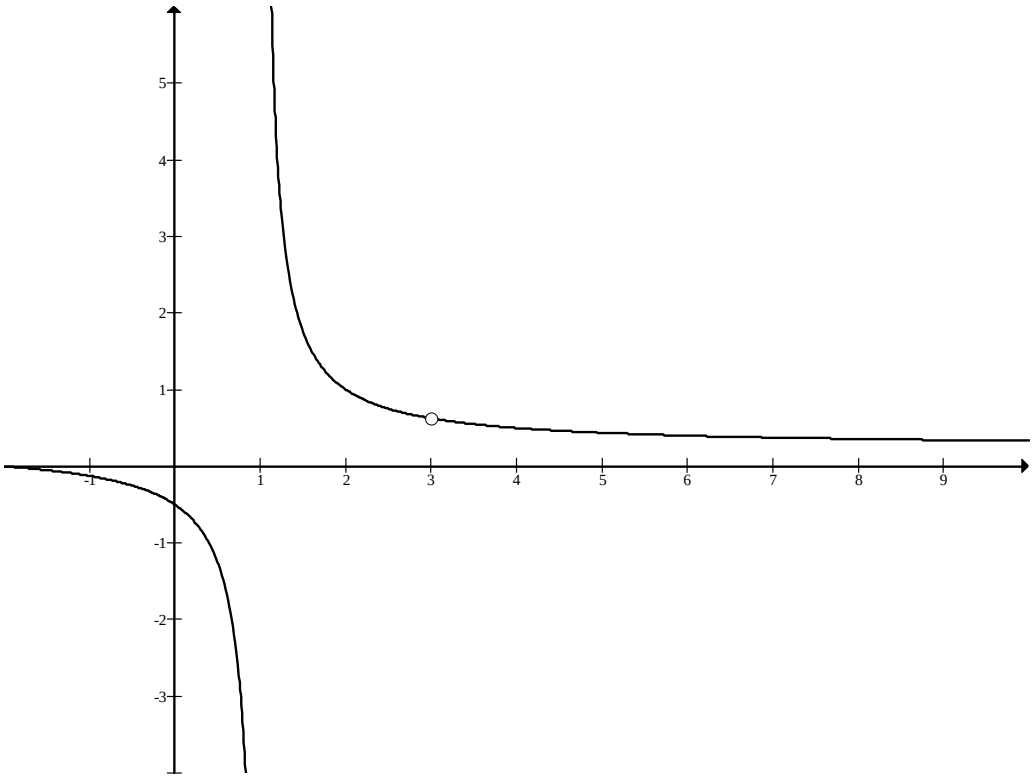


Fig. 2.2

Bemærk, at der er et "hul" i grafen ud for x = 3 i højden 0,625. Dette skyldes, at h ikke er defineret i x = 3, men at der samtidig gælder, at $h(x) \to 0{,}625$ for $x \to 3$.

Det skal afslutningvist fremhæves, at når den ovenstående grænseværdibestemmelse går godt, så skyldes det, at også tælleren giver 0, når x erstattes med 3. Hvis det ikke havde været tilfældet, ville h(x) være blevet uendelig stor (positiv eller negativ) for x gående mod 3, som det sker ved x = 1 (Overvej !). ♥

Vi vil nu give en mere generel og præcis definition af grænseværdibegrebet.
Den foreløbige formulering ovenfor lød:

Et tal a er grænseværdi for en funktion f i punktet x_o, hvis vi kan få funktionsværdierne f(x) lige så tæt på a, som vi ønsker, når blot x er tilstrækkeligt tæt på x_o, idet der dog skal gælde, at $x \neq x_o$.

Dette med at kunne få "funktionsværdierne f(x) lige så tæt på a, som ønsker", kan udtrykkes ved hjælp af begrebet omegne (se definition 1.4) på følgende måde: Uanset hvilken omegn om a, vi vælger (underforstået: uanset hvor lille en omegn om a, vi vælger), så kan vi få funktionsværdierne f(x) til at ligge inde i denne omegn, når blot x er tilstrækkelig tæt på x_o (og $x \neq x_o$).
Og dette med, at "når blot x er tilstrækkelig tæt på x_o uden dog at blive lig med x_o" kan vi klare ved hjælp af begrebet udprikket omegn (se definition 1.4).

Det hele samles i følgende definition:

Definition 2.3.
En funktion f siges at have grænseværdien a for x gående mod x_o, hvis der for enhver omegn ω(a) om a findes en udprikket omegn ω'(x_o) om x_o, således at hvis x er indeholdt i ω'(x_o), så er f(x) indeholdt i ω(a)
(Jfr. figur 2.3).

Ved anvendelse af kvantorer og andre matematiske symboler kan denne definition også skrives:

$$\forall\, \omega(a)\ \exists\, \omega'(x_o):\ x \in \omega'(x_o) \ \Rightarrow\ f(x) \in \omega(a)$$

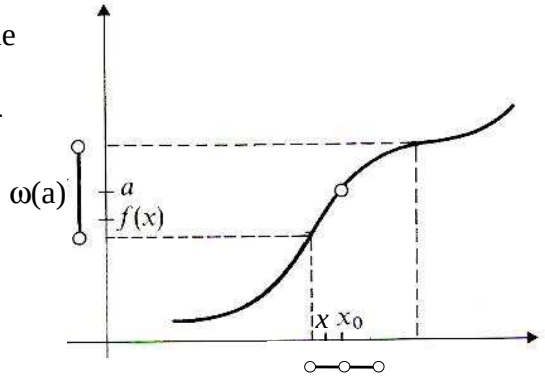


Fig. 2.3

At f(x) har grænseværdien a for x gående mod x_o skrives kort på en af følgende to måder:

$f(x) \to a$ for $x \to x_o$ (hvilket læses: f(x) går mod a for x gående mod x_o)

eller

$\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = a$ (hvilket læses: limes af f(x) for x gående mod x_o er lig med a)

Bemærk, at det i definitionen af grænseværdi forudsættes, at f er defineret i en eller anden udprikket omegn om x_o!!
Bemærk desuden, at det væsentlige ved ordene: "for enhver omegn ω(a) om a" er, at ω(a) kan vælges så lille, som man vil. Og at man på trods heraf kan bestemme en udprikket omegn om x_o med den ønskede egenskab.

Eksempel 2.4.
Lad os betragte funktionen $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$.
Vi vil på grundlag af definitionen gøre rede for, at $f(x) \to 3$ for $x \to 2$. (Se figur 2.4 på næste side).
For at se en beregning med tal vælger vi først, at $\omega(3) = \left]3-\frac{1}{4};3+\frac{1}{4}\right[$ (dvs. radius i omegnen er $\frac{1}{4}$.
Vi vil altså her højst acceptere en afvigelse mellem f(x) og 3 på $\frac{1}{4}$).

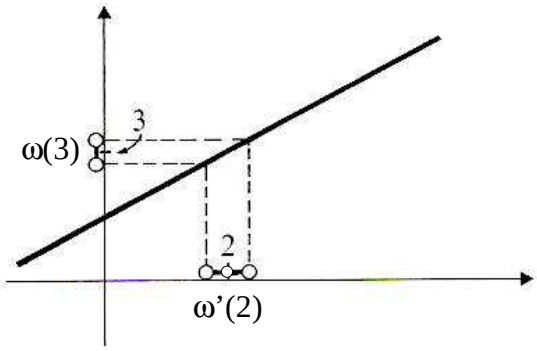


Fig. 2.4

Dette krav kan skrives og omskrives på følgende måde:

$$f(x) \in \omega(3) \Leftrightarrow 3 - \tfrac{1}{4} < f(x) < 3 + \tfrac{1}{4} \Leftrightarrow 3 - \tfrac{1}{4} < \tfrac{1}{2}x + 2 < 3 + \tfrac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow 1 - \tfrac{1}{4} < \tfrac{1}{2}x < 1 + \tfrac{1}{4} \Leftrightarrow 2 - \tfrac{1}{2} < x < 2 + \tfrac{1}{2}$$

For at sikre, at f(x) falder indenfor den valgte omegn ω(3) om 3, kan vi altså vælge en udprikket omegn ω'(2) om 2 med radius $\frac{1}{2}$, hvormed der vil gælde, at

$$x \in \omega'(2) \Rightarrow f(x) \in \omega(3)$$

(Det skal bemærkes, at i dette konkrete eksempel behøver omegnen om 2 ikke at være udprikket. Dette skyldes, at funktionen f er kontinuert i 2 – et begreb vi vender tilbage til i næste kapitel. Men det ønskede gælder dermed også for en udprikket omegn, og det er jo det, der skal sikres ifølge definitionen).

Lad os dernæst se på en vilkårlig valgt omegn ω(3) om 3. Hvis radius i denne omegn kaldes ε, så har vi, at $\omega(3) =]3-\varepsilon;3+\varepsilon[$. På samme måde som før kan vi se, at hvis vi som udprikket omegn om 2 vælger $\omega'(2) =]2-2\varepsilon;2+2\varepsilon[\setminus \{2\}$, så får vi, at: $x \in \omega'(2) \Rightarrow f(x) \in \omega(3)$ (Overvej dette nærmere !).

Svarende til en vilkårlig omegn om 3 har vi altså nu fundet en udprikket omegn om 2 som har egenskaben: $x \in \omega'(2) \Rightarrow f(x) \in \omega(3)$. Men det vil jo netop sige, at vi har vist, at $f(x) \to 3$ for $x \to 2$ ♥

Øvelse 2.5.

På figur 2.5 ses grafen for en funktion h. Find – svarende til hver af de tre indtegnede omegne om 4 – en udprikket omegn om 5, som opfylder betingelserne i definition 2.3.

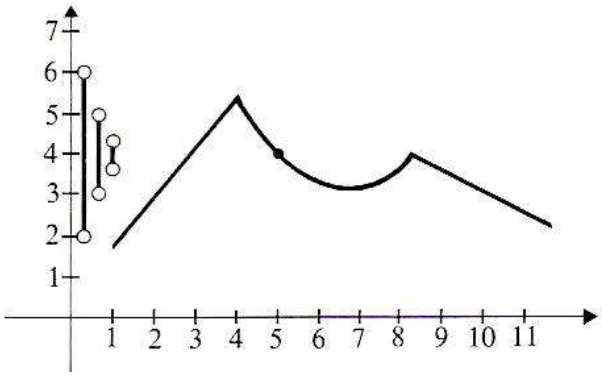


Fig. 2.5

Bemærk, at den udprikkede omegn om 5, som svarer til den mindste omegn om 4, kan bruges ved alle tre omegne om 4. ♥

Øvelse 2.6.
Betragt funktionen f(x) = 4x – 9.
Tegn grafen for f.
Betragt en omegn ω(19) om 19 med radius lig med 0,0001. Bestem en udprikket omegn ω'(7) om 7, der opfylder, at: $x \in \omega'(7) \Rightarrow f(x) \in \omega(19)$. ♥

Øvelse 2.7.

Tegn grafen for funktionen $f(x) = \frac{x-5}{x-5}$, og argumentér for, at $f(x) \to 1$ for $x \to 5$ ♥

Øvelse 2.8.

a) Gør rede for, at funktionen $f(x) = \frac{|x|}{x}$ ingen grænseværdi har for x gående mod 0.

b) Gør rede for, at funktionen $g(x) = \frac{1}{x+5}$ ingen grænseværdi har for x gående mod –5. ♥

Som det måske fremgår af det ovenstående, kan det undertiden være kompliceret at vise, at en given funktion har en bestemt grænseværdi for x gående mod et givet x_o. For at afhjælpe denne situation opstilles følgende to sætninger (sætning 2.9 og 2.11).

Sætning 2.9.
a) Om funktionen f(x) = k (dvs. en konstant funktion) gælder: $f(x) \to k$ for $x \to x_o$
b) Om funktionen g(x) = x gælder: $g(x) \to x_o$ for $x \to x_o$
c) Om funktionen $h(x) = \sqrt{x}$ gælder, når $x_o > 0$: $h(x) \to \sqrt{x_o}$ for $x \to x_o$

Indholdet i a), b) og c) kan kort skrives:
a) $k \to k$ for $x \to x_o$ b) $x \to x_o$ for $x \to x_o$ c) $\sqrt{x} \to \sqrt{x_o}$ for $x \to x_o$

Bevis:
Sætningen bevises ved at anvende definition 2.3.

Ad a): Uanset hvilken omegn ω(k) vi vælger om k, så kan vi frit vælge en omegn $\omega(x_o)$ om x_o, som opfylder, at: $x \in \omega(x_o) \Rightarrow f(x) \in \omega(k)$. Dermed gælder specielt, at: $x \in \omega'(x_o) \Rightarrow f(x) \in \omega(k)$.

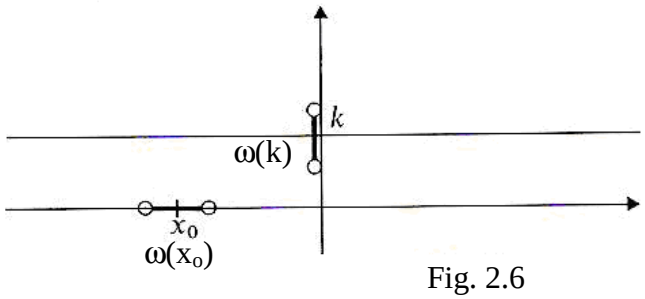


Fig. 2.6

Ad b): Lad $\omega(x_o)$ være en vilkårlig valgt omegn om x_o (på 2.aksen). Som den hertil svarende omegn om x_o (på 1.aksen) vælges den samme omegn, hvormed det ønskede i definition 2.3 opnås.

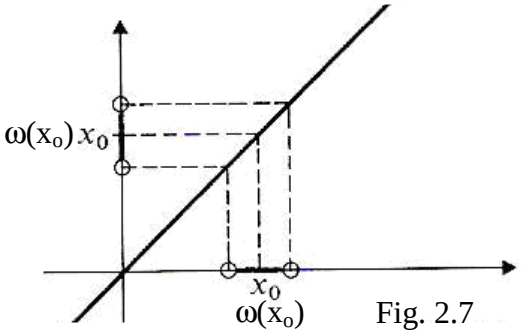


Fig. 2.7

Ad c): Lad $\omega(\sqrt{x_o}) = \left]\, y_1 ; y_2 \,\right[$ være en vilkårlig valgt omegn om $\sqrt{x_o}$. Vi kan – som illustreret på figur 2.8 – antage, at $y_1 > 0$. Dette skyldes, at hvis $y_1 \le 0$, så indskrænker vi os til i det følgende at anvende den mindre omegn $\omega_1(\sqrt{x_o}) = \left]\, \frac{1}{2}\sqrt{x_o} ; \frac{3}{2}\sqrt{x_o} \,\right[$, som da vil være en delmængde af $\omega(\sqrt{x_o})$. Og om den nedre grænse $\frac{1}{2}\sqrt{x_o}$ for $\omega_1(\sqrt{x_o})$ gælder, at $\frac{1}{2}\sqrt{x_o} > 0$.

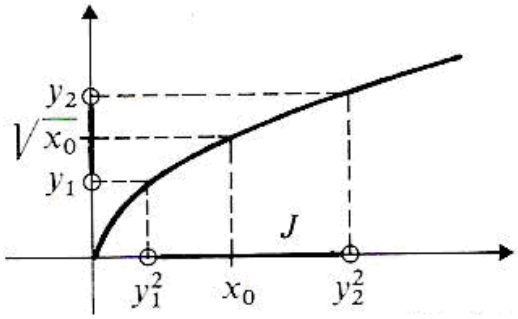


Fig. 2.8

Da vi for $y > 0$ har, at:

$$y = \sqrt{x} \iff x = y^2$$

kan vi bestemme intervallet $J = \left]\, y_1^{\,2} ; y_2^{\,2} \,\right[$, således at der gælder:

$$x \in J \Rightarrow \sqrt{x} \in \omega(\sqrt{x_o}) \qquad \text{og dermed specielt, at:} \qquad x \in J \setminus \{x_o\} \Rightarrow \sqrt{x} \in \omega(\sqrt{x_o})$$

J er imidlertid ikke en omegn om x_o, idet J ikke er symmetrisk om x_o. Dette er dog ikke noget problem, idet vi blot kan fjerne lidt af den ene ende af J, hvormed vi får et symmetrisk interval, dvs. en omegn $\omega(x_o)$ om x_o med de krævede egenskaber (se figur 2.9).

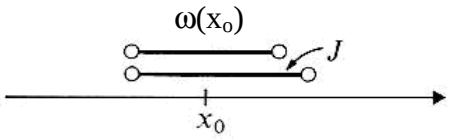


Fig. 2.9

Hermed er beviset for sætning 2.9 tilendebragt. ♥

Øvelse 2.10.
Gør v.hj.a. definition 2.3 (dvs. efter samme princip som i beviset for sætning 2.9) rede for, at:
$x^2 \to x_o^{\,2}$ for $x \to x_o$ ♥

Sætning 2.11. Regneregler for grænseværdier.
Lad det om funktionerne f og g være givet, at

$$f(x) \to a \quad \text{for} \quad x \to x_o \qquad \text{og} \qquad g(x) \to b \quad \text{for} \quad x \to x_o$$

hvor a og b er givne tal.

Da gælder:

1) $f(x) + g(x) \to a + b$ for $x \to x_o$
2) $f(x) - g(x) \to a - b$ for $x \to x_o$
3) $f(x) \cdot g(x) \to a \cdot b$ for $x \to x_o$
4) Hvis k er en konstant gælder: $k \cdot f(x) \to k \cdot a$ for $x \to x_o$
5) Hvis $b \neq 0$ gælder: $\dfrac{f(x)}{g(x)} \to \dfrac{a}{b}$ for $x \to x_o$

Sætningen er intuitiv klar, idet f.eks. $f(x) + g(x)$ hhv. $f(x)\cdot g(x)$ må ligge tæt på $a + b$ hhv. $a\cdot b$, når $f(x)$ og $g(x)$ er tæt på hhv. a og b, hvilket sker, når x er tæt på x_o.
Et egentlig bevis byggende på definition 2.3 er imidlertid temmelig teknisk og er derfor anbragt i Appendix 2, hvor interesserede læsere kan se det.

Eksempel 2.12.
Hvis vi i sætning 2.11 3) sætter $f(x) = x$ og $g(x) = x$, så får vi ifølge sætning 2.9 b) (overvej !), at:

$$x^2 \to x_o^{\,2} \quad \text{for} \quad x \to x_o$$

F.eks. har vi altså, at: $x^2 \to 9$ for $x \to 3$ og $x^2 \to 7$ for $x \to \sqrt{7}$ ♥

Eksempel 2.13.
a) Vi vil undersøge funktionen $h(x) = -2x^2 + 5x + 1$ for $x \to 3$.
Ved anvendelse af sætning 2.11 1) og 4), eksempel 2.12 og sætning 2.9 a) og b) får vi:

$$-2x^2 \to -2\cdot 9 \quad \text{for} \quad x \to 3$$
$$5x \to 5\cdot 3 \quad \text{for} \quad x \to 3$$
$$1 \to 1 \quad \text{for} \quad x \to 3$$

og dermed:

$$-2x^2 + 5x + 1 \to -18 + 15 + 1 \quad \text{for} \quad x \to 3$$

dvs.

$$h(x) \to -2 \quad \text{for} \quad x \to 3$$

b) Lad funktionen f være givet ved: $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2+7}$. Vi vil finde $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$.
Som i det ovenstående ses, at:

$$2x - 1 \to -3 \quad \text{for} \quad x \to -1 \quad \text{og} \quad x^2 + 7 \to 8 \quad \text{for} \quad x \to -1$$

Ifølge sætning 2.11 5) har vi da, at: $f(x) \to -\frac{3}{8}$ for $x \to -1$, dvs. $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = -\frac{3}{8}$ ♥

Øvelse 2.14.
Bestem $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$, idet

a) $f(x) = 5x^2 + 2x - 13$
b) $f(x) = \sqrt{x}\cdot(x - \sqrt{x})$
c) $f(x) = \dfrac{9\cdot(x-2)\cdot(x+1)}{x-2}$
d) $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}$ ♥

Øvelse 2.15.

a) Bestem grænseværdien af funktionen $p(x) = \dfrac{2x^2 + 2x - 4}{3x^2 - 9x - 30}$ for x gående mod –2.
(*Vejledning*: Bemærk, at både tæller og nævner giver 0 i værdien x = –2. Anvend dette til at omskrive og forkorte funktionsudtrykket for p(x)).

b) Bestem grænseværdien af funktionen $h(x) = \dfrac{x^2 - x - 6}{4x^2 - 16x + 12}$ for x gående mod 3
(*Vejledning*: Som i a). Jfr. i øvrigt eksempel 2.2, hvor vi også så på denne funktion). ♥

Af hensyn til indholdet i de følgende kapitler er det vigtigt at regne følgende øvelse:

Øvelse 2.16.

a) Bestem grænseværdien af funktionen r(x) = $\frac{x^2-25}{x-5}$ for x gående mod 5

b) Bestem grænseværdien af funktionen q(x) = $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{7}}{x-7}$ for x gående mod 7

c) Bestem grænseværdien af funktionen s(x) = $\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{3}}{x-3}$ for x gående mod 3

Vejledning til både a), b) og c): Bemærk, at både tæller og nævner i funktionsudtrykket giver 0 i værdien x lig med hhv. 5, 7 og 3. Funktionsudtrykkene skal derfor på snedig vis omskrives, så der kan forkortes noget væk, som fjerner dette problem, hvorefter sætning 2.11 kan bruges). ♥

I forlængelse af og som konsekvens af sætning 2.11 har vi følgende sætning:

Sætning 2.17.
For alle $n \in Z$ gælder der, at

$$x^n \to x_o^{\,n} \quad \text{for} \quad x \to x_o$$

hvor $x_o \neq 0$, hvis $n \leq 0$.

Bevis:
Fra sætning 2.9 b) ved vi, at $x \to x_o$ for $x \to x_o$, dvs. at sætningen gælder for n = 1.

Som omtalt i øvelse 2.12 får vi herefter, at $x^2 \to x_o^{\,2}$ for $x \to x_o$, idet vi i sætning 2.11 3) kan sætte f(x) = x og g(x) = x. Sætningen gælder dermed også for n = 2.

Da $x^3 = x^2 \cdot x$ får vi herefter, at $x^3 \to x_o^{\,3}$ for $x \to x_o$, idet vi i sætning 2.11 3) kan sætte $f(x) = x^2$ og g(x) = x. Sætningen gælder dermed også for n = 3.

Da $x^4 = x^3 \cdot x$ får vi på samme måde, at $x^4 \to x_o^{\,4}$ for $x \to x_o$, dvs. sætningen gælder for n = 4.

Således kan vi fortsætte, hvormed vi ser, at der for alle $n \in N$ gælder, at $x^n \to x_o^{\,n}$ for $x \to x_o$.

Vi vil nu se på x^{-n}, hvor n er et positivt helt tal. På denne måde får vi nemlig dækket sætningens gyldighed for de negative, hele tal.

Da $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ ser vi af det netop beviste for $n \in N$, af sætning 2.9 a) og af sætning 2.11 5), at

$$\frac{1}{x^n} \to \frac{1}{x_o^{\,n}} \quad \text{for} \quad x \to x_o \quad (\text{for } x_o \neq 0)$$

og dermed, at: $x^{-n} \to x_o^{\,-n}$ for $x \to x_o$ (for $x_o \neq 0$)

Da $x^0 = 1$ og $x_o^{\,0} = 1$, hvor $x \neq 0$ og $x_o \neq 0$, ser vi, at det for $x_o \neq 0$ gælder, at:

$$x^0 \to x_o^{\,0} \quad \text{for} \quad x \to x_o$$

Hermed er sætningen bevist i alle tilfælde. ♥

Øvelse 2.18.
Bestem $\lim_{x\to 3} f(x)$, idet

a) $f(x) = 3x^5 - 22$ b) $f(x) = 9x^{-4} + \frac{1}{2}x^3$ c) $f(x) = \dfrac{2x^6\sqrt{x} + x}{x^4 + 4}$ ♥

Vi får senere brug for at kende den følgende sætning:

Sætning 2.19.
a) Hvis det om en funktion f gælder, at: $f(x) \to a$ for $x \to x_o$, hvor $a > 0$, så findes en udprikket omegn $\omega'(x_o)$ om x_o, så: $x \in \omega'(x_o) \Rightarrow f(x) > 0$
b) Hvis det om en funktion f gælder, at: $f(x) \to a$ for $x \to x_o$, hvor $a < 0$, så findes en udprikket omegn $\omega'(x_o)$ om x_o, så: $x \in \omega'(x_o) \Rightarrow f(x) < 0$

Bevis: Vi beviser a). Beviset for b) forløber helt tilsvarende.
Da $a > 0$, er $\omega(a) = \left]\frac{a}{2}; \frac{3a}{2}\right[$ en omegn om a, som ikke indeholder 0. (Læseren opfordres til at tegne en skitse i stil med figur 2.3). Da $f(x) \to a$ for $x \to x_o$ får vi ifølge definition 2.3, at der svarende til $\omega(a)$ findes en udprikket omegn $\omega'(x_o)$ om x_o, så: $x \in \omega'(x_o) \Rightarrow f(x) \in \omega(a)$. Hermed gælder specielt, at: $x \in \omega'(x_o) \Rightarrow f(x) > \frac{a}{2} > 0$, hvormed det ønskede er bevist. ♥

Undertiden kan man blive udsat for en funktion (se f.eks. øvelse 2.8 a)), der ikke har nogen grænseværdi for x gående mod x_o, men hvor f(x) alligevel nærmer sig til en bestemt værdi, blot vi nøjes med at lade x nærme sig x_o "fra højre" (eller "fra venstre"). Dette behandles yderligere i det følgende eksempel.

Eksempel 2.20.
Betragt funktionen f givet ved:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 1 & \text{når } x < -2 \\ -x^2 + 2 & \text{når } -2 \le x \le 1 \\ -x + 4 & \text{når } 1 < x \end{cases}$$

Grafen for denne funktion ser ud som vist på figur 2.10.

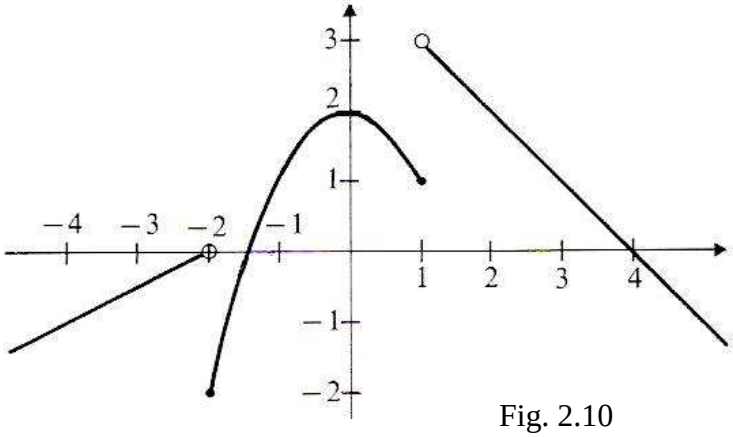


Fig. 2.10

Vi ser her, at hvis x nærmer sig til 1, men hele tiden er større end 1, så vil f(x) nærme sig til 3.
Vi vil derfor sige, at f(x) går mod 3 for x gående mod 1 fra højre, hvilket skrives:

$$f(x) \to 3 \quad \text{for} \quad x \to 1+ \qquad \text{eller} \qquad \lim_{x \to 1+} f(x) = 3$$

Tilsvarende ses, at f(x) vil nærme sig 1, hvis x nærmer sig 1 fra venstre, hvorfor vi vil sige, at f(x) går mod 1 for x gående mod 1 fra venstre. Dette skrives:

$$f(x) \to 1 \quad \text{for} \quad x \to 1- \qquad \text{eller} \qquad \lim_{x \to 1-} f(x) = 1 \qquad \heartsuit$$

Øvelse 2.21.
Betragt funktionen f fra eksempel 2.20.

a) Hvad er: $\lim_{x \to -2+} f(x)$ og $\lim_{x \to -2-} f(x)$?

b) Hvad er: $\lim_{x \to 0+} f(x)$ og $\lim_{x \to 0-} f(x)$? ♥

Definition 2.22.
Hvis f(x) går mod a for x gående mod x_o fra højre, så skrives:

$$f(x) \to a \quad \text{for} \quad x \to x_o+ \qquad \text{eller} \qquad \lim_{x \to x_o+} f(x) = a$$

og vi siger, at f har grænseværdien a fra højre i x_o.

Hvis f(x) går mod b for x gående mod x_o fra venstre, så skrives:

$$f(x) \to b \quad \text{for} \quad x \to x_o- \qquad \text{eller} \qquad \lim_{x \to x_o-} f(x) = b$$

og vi siger, at f har grænseværdien b fra venstre i x_o.

Den formelle definition af grænseværdi fra højre skrevet ved hjælp af omegne og kvantorer er:

$$\forall\, \omega(a)\ \exists\, \omega_+(x_o) :\ x \in \omega_+(x_o) \ \Rightarrow\ f(x) \in \omega(a)$$

Den formelle definition af grænseværdi fra venstre skrevet ved hjælp af omegne og kvantorer er:

$$\forall\, \omega(b)\ \exists\, \omega_-(x_o) :\ x \in \omega_-(x_o) \ \Rightarrow\ f(x) \in \omega(b)$$

Vedrørende omegne $\omega_+(x_o)$ til højre for x_o og omegne $\omega_-(x_o)$ til venstre for x_o : se Definition 1.8.
Læseren opfordres til at lave figurer, der illustrerer de formelle definitioner i 2.22.

Øvelse 2.23.
Betragt funktionen

$$f(x) = \begin{cases} -x + 4\ , & x < 4 \\ \sqrt{x} - 2\ , & x \geq 4 \end{cases}$$

Argumentér for, at $f(x) \to 0$ for $x \to 4+$, og at $f(x) \to 0$ for $x \to 4-$.
Gør derefter rede for, at $f(x) \to 0$ for $x \to 4$. ♥

Øvelse 2.24.

a) Hvad er $\lim_{x\to 0+}\sqrt{x}$? Hvorfor kan vi ikke finde $\lim_{x\to 0}\sqrt{x}$?

b) Hvad er $\lim_{x\to 0+}\frac{|x|}{x}$? Hvad er $\lim_{x\to 0-}\frac{|x|}{x}$? ♥

Vedrørende grænseværdier fra højre eller venstre gælder der følgende sætning:

Sætning 2.25.

a) For en given funktion f gælder, at følgende to udsagn er ensbetydende:
   1) $f(x) \to a$ for $x \to x_o$
   2) $f(x) \to a$ for $x \to x_o+$ og $f(x) \to a$ for $x \to x_o-$

b) For grænseværdier fra højre eller fra venstre gælder de samme regneregler som grænseværdier generelt (jfr. sætning 2.11)

Beviset for sætning 2.25 b) gennemføres på helt samme måde som beviset for sætning 2.11 – og det overlades til den meget energiske og interesserede læser.

Øvelse 2.26.

Bevis sætning 2.25 a). ♥

Analogt til sætning 2.19 findes følgende sætning vedrørende grænseværdi fra højre eller venstre:

Sætning 2.27.

a) Hvis det om en funktion f gælder, at: $f(x) \to a$ for $x \to x_o+$, hvor $a > 0$, så findes en omegn $\omega_+(x_o)$ til højre for x_o, så: $x \in \omega_+(x_o) \Rightarrow f(x) > 0$

b) Hvis det om en funktion f gælder, at: $f(x) \to a$ for $x \to x_o-$, hvor $a > 0$, så findes en omegn $\omega_-(x_o)$ til venstre for x_o, så: $x \in \omega_-(x_o) \Rightarrow f(x) > 0$

c) Hvis det om en funktion f gælder, at: $f(x) \to a$ for $x \to x_o+$, hvor $a < 0$, så findes en omegn $\omega_+(x_o)$ til højre for x_o, så: $x \in \omega_+(x_o) \Rightarrow f(x) < 0$

d) Hvis det om en funktion f gælder, at: $f(x) \to a$ for $x \to x_o-$, hvor $a < 0$, så findes en omegn $\omega_-(x_o)$ til venstre for x_o, så: $x \in \omega_-(x_o) \Rightarrow f(x) < 0$

Bevis: Vi beviser d). Beviset for de øvrige tilfælde forløber helt tilsvarende.
Da $a < 0$, er $\omega(a) = \left]\frac{3a}{2};\frac{a}{2}\right[$ en omegn om a, som ikke indeholder 0. (Læseren opfordres til at tegne en skitse, der illustrerer situationen). Da $f(x) \to a$ for $x \to x_o-$ får vi ifølge definition 2.22, at der svarende til $\omega(a)$ findes en omegn $\omega_-(x_o)$ til venstre for x_o, så: $x \in \omega_-(x_o) \Rightarrow f(x) \in \omega(a)$. Hermed gælder specielt, at: $x \in \omega_-(x_o) \Rightarrow f(x) < \frac{a}{2} < 0$, hvormed det ønskede er bevist. ♥

I forlængelse af sætning 2.27 omtales følgende sætning, som vi senere får brug for:

Sætning 2.28.
Hvis der om en funktion f gælder følgende to ting:

- $f(x) \to a$ for $x \to x_o+$
- der findes en omegn $\omega_+(x_o)$ til højre for x_o, så: $x \in \omega_+(x_o) \Rightarrow f(x) \geq 0$,

så er grænseværdien $a \geq 0$.

Tilsvarende gælder fra venstre.

Og tilsvarende gælder hvis $f(x) \leq 0$ i omegne til højre eller venstre for x_o, at $a \leq 0$.

Bevis:
Vi beviser den første del af sætningen. De øvrige tre tilfælde overlades til læseren – både at beskrive klart og at bevise.
Vi vil gerne vise, at $a \geq 0$. Dette gøres ved et indirekte bevis. Vi antager altså, at $a < 0$, og vi skal så argumentere for, at dette fører til en modstrid.
Da $f(x) \to a$ for $x \to x_o+$ får vi ifølge sætning 2.27 c), at der findes en omegn til højre for x_o, hvor funktionsværdierne er negative ($f(x) < 0$). Men dette stemmer ikke med forudsætningen om, at der findes en (anden) omegn til højre for x_o, hvor funktionsværdierne er ikke-negative. (Overvej !).
Antagelsen om, at $a < 0$ kan altså ikke gælde, hvormed vi må have, at $a \geq 0$.
Hermed er sætningen bevist. ♥

Kapitel 3: Kontinuitet.

Vi har nogle gange i det foregående betragtet situationer, hvor grænseværdien af f(x) for x gående mod x_o var lig med $f(x_o)$, altså hvor funktionen var defineret i x_o og f(x) nærmede sig til $f(x_o)$, når x nærmede sig x_o. I den situation har vi følgende definition:

Definition 3.1.
En funktion f siges at være kontinuert i et punkt x_o, hvis

1) f er defineret i x_o
2) $f(x) \to f(x_o)$ for $x \to x_o$

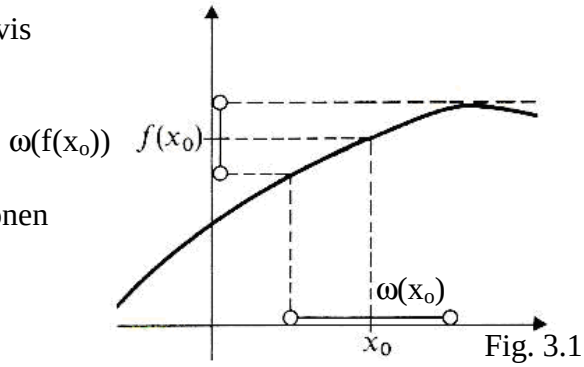


Fig. 3.1

Ved anvendelse af omegne og kvantorer kan definitionen formuleres således:

$$\forall \omega(f(x_o))\ \exists \omega(x_o) : x \in \omega(x_o) \Rightarrow f(x) \in \omega(f(x_o))$$

Bemærk, at når f er defineret i x_o og $f(x) \to f(x_o)$ for $x \to x_o$, så har vi specielt (jfr. definition 2.3 og kommentaren hertil), at f er defineret i en omegn om x_o.
Når f er kontinuert i x_o, så er x_o altså et indre punkt i Dm(f) (Jfr. definition 1.6).

Læseren opfordres til at overveje, at definitionen anført med omegne og kvantorer stemmer overens med den først anførte definition. (Jfr. igen definition 2.3).

Ordet kontinuert betyder: fortsat, sammenhængende. En funktion kan således intuitivt siges at være kontinuert i et punkt x_o, hvis funktionens graf ikke "springer" eller "har et hul" i punktet x_o.

Eksempel 3.2.
Funktionen f på figur 2.10 er kontinuert i f.eks. –1, hvorimod den ikke er kontinuert i –2.
(Man siger undertiden, at f er diskontinuert i –2). ♥

Øvelse 3.3.
Angiv for hver af funktionerne på figur 2.1 og 2.10 mængden af punkter, hvori de pågældende funktioner er kontinuerte. ♥

Ifølge definitionen på kontinuitet, sætning 2.9 og sætning 2.17 ser vi (overvej !), at der gælder følgende sætning:

Sætning 3.4.

$f(x) = x^n$ er kontinuert i alle $x \in R$ (for alle $n \in N$)
$g(x) = x^{-n}$ er kontinuert i alle $x \in R \setminus \{0\}$ (for alle $n \in N$)
h(x) = k, hvor k er en konstant, er kontinuert i alle $x \in R$
$j(x) = \sqrt{x}$ er kontinuert i alle $x > 0$.

På baggrund af definition 3.1 og sætning 2.11 ser vi (overvej !), at der gælder følgende sætning:

Sætning 3.5.
Lad f og g være funktioner, der er kontinuerte i et tal x_o.
Da er $f + g$, $f - g$ og $f \cdot g$ kontinuerte i x_o.
Og hvis $g(x_o) \neq 0$ har vi desuden, at $\frac{f}{g}$ er kontinuert i x_o.

Øvelse 3.6.

a) Hvorfor er funktionen $f(x) = 4x^4 - 2x^3 + x + 9$ kontinuert i 2 ?

b) Hvorfor er funktionen $g(x) = \frac{7}{x^2}$ kontinuert i -5 ?

c) Hvorfor er funktionen $h(x) = \frac{\sqrt{x} - \frac{1}{2}x^2}{(1-\sqrt{x})\cdot(2+\sqrt{x})}$ kontinuert i 3 ? ♥

Øvelse 3.7.

Gør rede for, at funktionen $\frac{9(x+\sqrt{x})(2x-\sqrt{x})}{\sqrt{x}+5}$ er kontinuert i alle $x \in R_+$ ♥

Øvelse 3.8.

a) Gør rede for, at funktionen $f(x) = ax + b$, hvor a og b er vilkårligt givne reelle tal, er kontinuert i alle $x \in R$. Der gælder altså, at enhver lineær funktion er kontinuert.

b) Gør rede for, at funktionen $g(x) = ax^2 + bx + c$, hvor a, b og c er givne reelle tal, er kontinuert i alle $x \in R$. Der gælder altså, at ethvert andengradspolynomium er kontinuert. ♥

I lighed med grænseværdi fra højre og venstre kan vi tale om kontinuitet fra højre og venstre:

Definition 3.9.

En funktion siges at være kontinuert fra højre i x_o, hvis f er defineret i x_o og hvis
$f(x) \to f(x_o)$ for $x \to x_o+$

En funktions siges at være kontinuert fra venstre i x_o, hvis f er defineret i x_o og hvis
$f(x) \to f(x_o)$ for $x \to x_o-$

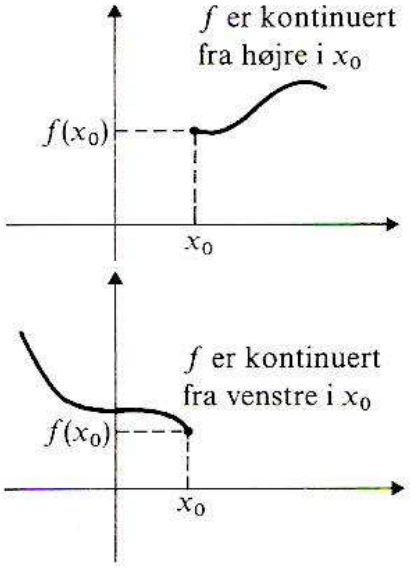


Fig. 3.2

Øvelse 3.10.
Opskriv indholdet i definition 3.9 v.hj.a. omegne og kvantorer. ♥

Øvelse 3.11.
a) Argumentér for, at funktionen på figur 2.10 er kontinuert fra venstre i 1, men ikke fra højre i 1.
b) Er funktionen $f(x) = \frac{|x|}{x}$ kontinuert fra højre i 0 ?
c) Er funktionen $g(x) = x^2 - 2x$ kontinuert fra venstre i 3 ? ♥

Øvelse 3.12.
Argumentér for, at funktionen f i øvelse 2.23 er kontinuert både fra højre og fra venstre i 4.
Argumentér for, at f er kontinuert i 4. ♥

Om funktioner med opdelt funktionsforskrift (”gaffelforskrift”), altså om funktioner som den i øvelse 3.12 omtalte, gælder følgende sætning, hvis bevis overlades til læseren.

Sætning 3.13.
Lad funktionen f være givet ved:

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{, når } x < x_o \\ a & \text{, når } x = x_o \\ h(x) & \text{, når } x > x_o \end{cases}$$

Hvis $\lim\limits_{x \to x_o-} g(x) = \lim\limits_{x \to x_o+} h(x) = a = f(x_o)$
så er f kontinuert i x_o.

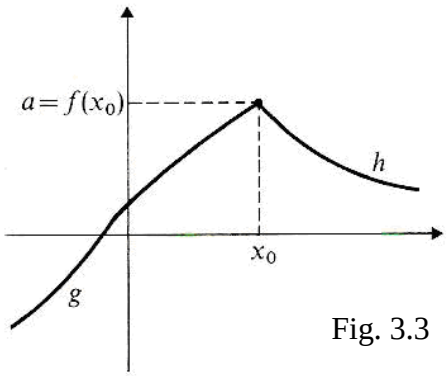


Fig. 3.3

Eksempel 3.14.
Funktionen f omtalt i øvelse 3.12 (dvs. i øvelse 2.23) er en funktion af den omtalte type.
Om denne gælder, at $x_o = 4$, $g(x) = -x + 4$, $h(x) = \sqrt{x} - 2$ og $a = f(4) = 0$. ♥

Øvelse 3.15.
Betragt funktionen

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + qx - 2q & \text{når } x \le 1 \\ -3x + 1 & \text{når } x > 1 \end{cases}$$

hvor q er et reelt tal.
Bestem q, så f bliver kontinuert i 1. ♥

Øvelse 3.16.
En funktion g er givet ved:

$$g(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2+\frac{20}{7} & \text{når } x<0\\ -3\cdot(x-1) & \text{når } 0\le x\le 4\\ -\frac{9}{2}\sqrt{x} & \text{når } x>4\end{cases}$$

Undersøg, om g er kontinuert i 0, og om g er kontinuert i 4. ♥

Øvelse 3.17.

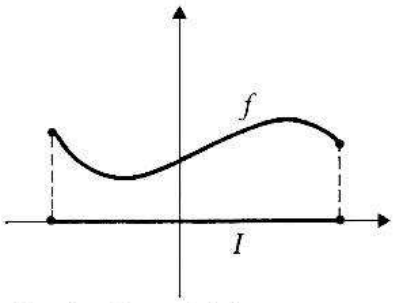
Argumentér for, at funktionen $f(x)=|x|$ er kontinuert for alle $x\in R$. ♥

En given funktion kan være kontinuert i alle punkter indenfor en eller anden mængde. I den sammenhæng giver vi følgende to definitioner (3.18 og 3.20):

Definition 3.18.

En funktion f er **kontinuert i et interval I**, hvis følgende tre ting er opfyldt:

1) f er kontinuert i alle indre punkter i I
2) f er kontinuert fra venstre i et evt. højre intervalendepunkt, som er med i I
3) f er kontinuert fra højre i et evt. venstre intervalendepunkt, som er med i I



f er kontinuert i *I*.
(Grafen for *f* er sammenhængende)
Fig. 3.4

Øvelse 3.19.

a) Skitsér grafen for en funktion, som er kontinuert i $[1;6]$

b) Skitsér grafen for en funktion, som er kontinuert i $]-2;5]$ bortset fra punkterne 0 og 5. ♥

Definition 3.20.

En funktion siges kort at være **kontinuert**, hvis den er kontinuert i hele sin definitionsmængde.

Bemærk, at der i Definition 3.20 er to muligheder:

- Dm(f) er et interval. I så tilfælde er vi tilbage i definition 3.18
- Dm(f) er ikke et interval.
  I så tilfælde skal f være kontinuert i alle punkter i sin definitionsmængde. Ifl. definitionen på kontinuitet betyder dette bl.a., at alle punkter i Dm(f) skal være indre punkter i Dm(f).

I næsten alle situationer vil netop en af disse to muligheder være opfyldt, eller man kan i den givne problemstilling nøjes med at se på dele af funktionen, hvor den ene af disse to muligheder er opfyldt.

Men definitionen tager altså ikke højde for "besynderlige" definitionsmængder !!!
Hvis f.eks. Dm(f) =]–∞ ; 0 [∪ [5; 8], så giver definitionen umiddelbart ikke noget svar på, hvad det vil sige, at f er kontinuert (underforstået: i hele sin definitionsmængde). Men dette kan på "snedig vis" klares ved at anvende Definition 3.18 på hver af de to delintervaller i definitionsmængden – og så i øvrigt bemærke, at grafen ikke er én sammenhængende kurve, men består af to dele.
Hvis Dm(f) bliver meget "besynderlig" – hvilket nærmest kun har teoretisk og ikke praktisk værdi – så må man som antydet nøjes med at se på funktionen "lokalt" (dvs. i nærheden af et givet punkt).
Vi vil ikke gå dybere ind i emnet end disse kommentarer fører os.

Det er derfor – specielt i matematiske sætninger om relevante emner – vigtigt at præcisere, hvor en given funktion er defineret eller kontinuert henne (typisk – men ikke altid – i et bestemt interval).

Eksempel 3.21.

a) Funktionen $f(x) = \frac{1}{x}$ er kontinuert, idet den er kontinuert i hvert eneste punkt i sin definitionsmængde, som er $Dm(f) = R\backslash\{0\}$. Men dens graf er ikke én sammenhængende kurve (men derimod to sammenhængende kurvedele). Læseren opfordres til at tegne grafen for f.

b) Funktionen h i eksempel 2.2 er kontinuert, idet den er kontinuert i hvert eneste punkt af sin definitionsmængde, som er $Dm(h) =]-\infty;1[\cup]1;3[\cup]3;\infty[$. Men som det fremgår af figur 2.2 er dens graf ikke én sammenhængende kurve, men derimod tre sammenhængende kurvedele svarende til de tre intervaller, som definitionsmængden består af. ♥

Øvelse 3.22.

Betragt funktionen $g(x) = \frac{1}{x^2 - 9}$. Bestem Dm(g) og gør rede for, at g er kontinuert.
Tegn grafen for g og kommentér resultaterne. ♥

Eksempel 3.23.

Vi vil i dette eksempel se på betaling af skat til staten.
Den funktion f, der til en given skattepligtig indkomst x knytter det beløb f(x), der skal betales i skat til staten, kaldes statsskatteskalaen (eller blot: skatteskalaen).

Om denne funktion må man forlange forskellige ting, for at der kan tales om en "retfærdig beskatning". Man må f.eks. forlange, at skatteskalaen er voksende, – eller i det mindste ikke-aftagende – idet en skatteskala som vist på figur 3.5 medfører, at en person, som tjener x_1 kr. skal give mere i skat end en person, som tjener noget mere (f.eks. x_2 kr.).

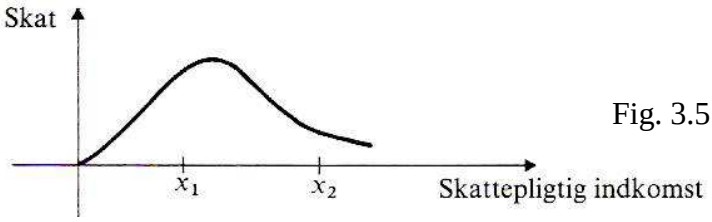


Fig. 3.5

Man må også forlange, at $f(0) \leq 0$ samt at $f(x) < x$ for alle $x > 0$, idet $f(0) > 0$ ville betyde, at en person uden skattepligtig indkomst skal betale skat, og $f(x) \geq x$ ville betyde, at en person betaler hele sin indkomst eller mere i skat.

Men udover disse egenskaber bør skatteska laen også være kontinuert, idet en skatteska la som f.eks. vist på (figur 3.6) vil betyde, at hvis en person, som tjener x_o kr., får 1 kr. mere i løn, så skal vedkommende af med ca. 1000 kr. mere i skat.

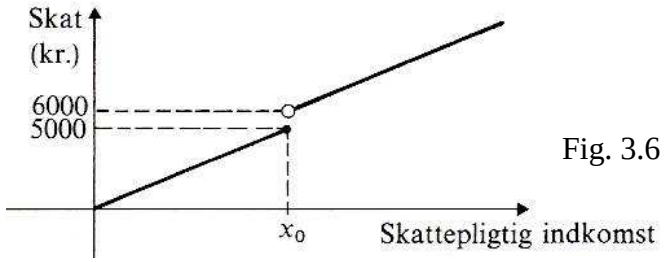


Fig. 3.6

Bemærk, at vi i denne sammenhæng betragter en model, hvor indkomsten opfattes som en kontinuert størrelse (altså som en sammenhængende delmængde af de reelle tal), selvom indkomsten reelt set kun er heltallige værdier. Dette skyldes, at en forskel på 1 kr. i den skattepligtige er meget lille set i relation til indkomsternes størrelse, så vi kan betragte det som at der er en flydende overgang imellem de forskellige indkomstværdier. ♥

Inden vi går videre og ser på nogle særlige egenskaber ved kontinuerte funktioner, vil vi først se på kontinuitet af sammensatte funktioner og af omvendte funktioner.
Af hensyn til læsere, der ikke – eller kun i begrænset omfang – kender til begreberne sammensatte og omvendte funktioner, er der i Appendix 3 omtalt fundamentale egenskaber for disse.

Vi beviser først følgende sætning om kontinuitet af sammensatte funktioner:

Sætning 3.24.
Lad g og f være to funktioner, der kan sammensættes til funktionen $f \circ g$.
Hvis g er kontinuert i x_o og f er kontinuert i $g(x_o)$, så er $f \circ g$ kontinuert i x_o

Bevis:
Vi bemærker først, at ifølge definition A.3.3 er $(f \circ g)(x_o) = f(g(x_o))$.
For nemheds skyld indfører vi benævnelserne $y_o = g(x_o)$ og $z_o = f(g(x_o)) = f(y_o)$.
Ifølge definitionen på kontinuitet skal vi bevise, at for en vilkårlig valgt omegn $\omega(z_o)$ om z_o findes en omegn $\omega(x_o)$ om x_o, så: $x \in \omega(x_o) \Rightarrow f(g(x)) \in \omega(z_o)$.
Lad derfor $\omega(z_o)$ være en vilkårlig valgt omegn om z_o. Da f er kontinuert i y_o og da $z_o = f(y_o)$ findes der ifølge definitionen på kontinuitet en omegn $\omega(y_o)$ om y_o, så: $y \in \omega(y_o) \Rightarrow f(y) \in \omega(z_o)$.
Da g er kontinuert i x_o og da $y_o = g(x_o)$, ses tilsvarende, at der findes en omegn $\omega(x_o)$ om x_o, så: $x \in \omega(x_o) \Rightarrow g(x) \in \omega(y_o)$. (Se figur 3.7).

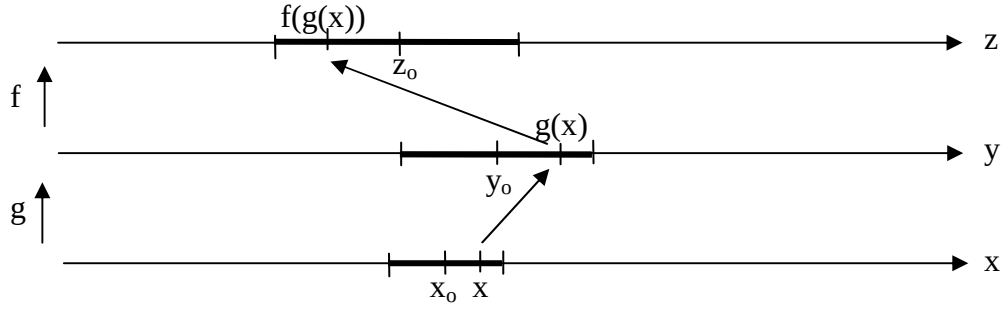


Fig. 3.7

Vi ser dermed i alt, at: $x \in \omega(x_o) \Rightarrow g(x) \in \omega(y_o) \Rightarrow f(g(x)) \in \omega(z_o)$, hvormed det ønskede er vist. ♥

Øvelser 3.25.

a) Hvorfor er funktionen f(x) = $3\cdot(2x+5)^{12}$ kontinuert i 4 ?

b) Hvorfor er funktionen g(x) = $\dfrac{7x+3}{\sqrt{x^4+1}}$ kontinuert i 2 ? ♥

Øvelse 3.26.

a) Gør rede for, at funktionen h(x) = $\dfrac{9(x+\sqrt{x})^3}{x^2\cdot\sqrt{x-4}}$ er kontinuert.

b) Gør rede for, at funktionen g(x) = $\left(\dfrac{1}{x}-2\right)^5$ er kontinuert. ♥

Vedrørende omvendte funktioner gælder der følgende sætning:

Sætning 3.27.
Lad f være en funktion, som er monoton og kontinuert i et interval I, lad x_o være et vilkårligt valgt indre punkt i I, og sæt $y_o = f(x_o)$. Da gælder der:

a) f^{-1} er defineret i en omegn $\omega(y_o)$ om y_o, og

b) f^{-1} er kontinuert i y_o

Bevis:
Vi beviser sætningen for en voksende funktion. Beviset for situationen, hvor f er aftagende, overlades som en øvelse til læseren. (Der skal kun laves få ændringer i det følgende !).

Da f er voksende, er den også injektiv og har dermed en omvendt funktion f^{-1}.

Lad $\omega_1(x_o)$ være en omegn om x_o, som opfylder, at $\omega_1(x_o) \subseteq I$. (Dette er muligt, da x_o er et indre punkt i I). Lad ε_1 være radius i $\omega_1(x_o)$, dvs.

$$\omega_1(x_o) =]\, x_o - \varepsilon_1 ;\ x_o + \varepsilon_1\, [.$$

Vi kan antage, at endepunkterne $x_o - \varepsilon_1$ og $x_o + \varepsilon_1$ begge tilhører intervallet I, idet omegnen ellers blot gøres lidt mindre (Overvej dette !!).

Vi sætter nu $y_1 = f(x_o - \varepsilon_1)$ og $y_2 = f(x_o + \varepsilon_1)$.

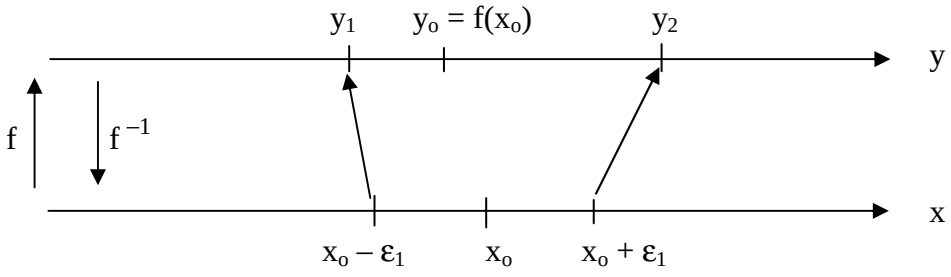


Fig. 3.8

Da f er voksende, er $y_1 < y_o < y_2$, idet $x_o - \varepsilon_1 < x_o < x_o + \varepsilon_1$.

Da f er kontinuert i I – og dermed specielt i intervallet $[x_o - \varepsilon_1;\ x_o + \varepsilon_1]$ – får vi ifølge nedenstående sætning 3.29, at ethvert tal y mellem y_1 og y_2 er funktionsværdi af et eller andet x imellem $x_o - \varepsilon_1$ og $x_o + \varepsilon_1$. Vi ser derfor, at $[y_1\ ;\ y_2\ ] \subseteq Vm(f)$.
Lad nu $\omega(y_o)$ være den omegn om y_o, som har det mindste af tallene $y_o - y_1$ og $y_2 - y_o$ som radius (se figur 3.8). Vi ser da, at $\omega(y_o) \subseteq [y_1\ ;\ y_2\ ]$, hvormed vi også får, at $\omega(y_o) \subseteq Vm(f)$.
Da $Dm(f^{-1}) = Vm(f)$ ser vi, at funktionen f^{-1} er defineret i omegnen $\omega(y_o)$.
Hermed er punkt a) i sætning 3.27 bevist.

For at bevise, at f^{-1} er kontinuert i y_o, skal vi ifølge Definition 3.1 bevise, at for en vilkårlig valgt omegn $\omega(f^{-1}(y_o))$ om $f^{-1}(y_o)$ findes en omegn $\omega(y_o)$ om y_o, så:

$$y \in \omega(y_o) \ \Rightarrow\ f^{-1}(y) \in \omega(f^{-1}(y_o))$$

Da $x_o = f^{-1}(y_o)$, kan dette også udtrykkes således:
Vi skal bevise, at for en vilkårligt valgt omegn $\omega(x_o)$ om x_o findes en omegn $\omega(y_o)$ om y_o, så:

$$y \in \omega(y_o) \ \Rightarrow\ f^{-1}(y) \in \omega(x_o).$$

Lad derfor $\omega(x_o)$ være en vilkårlig valgt omegn om x_o. Sæt $\omega_2(x_o) = \omega_1(x_o) \cap \omega(x_o)$, hvor $\omega_1(x_o)$ er den omegn, der blev betragtet i beviset for punkt a). Vi ser da dels, at $\omega_2(x_o)$ er en omegn om x_o (den er lig med den "mindste" af omegnene $\omega_1(x_o)$ og $\omega(x_o)$), dels at $\omega_2(x_o) \subseteq \omega(x_o)$ og $\omega_2(x_o) \subseteq \omega(x_o)$.

Lad ε_2 være radius i $\omega_2(x_o)$, dvs. $\omega_2(x_o) =]x_o - \varepsilon_2;\ x_o + \varepsilon_2[$
På præcis same måde som i beviset for punkt a) konstrueres nu to (nye) punkter y_1 og y_2, og en (ny) omegn $\omega(y_o)$ om y_o, idet vi erstatter ε_1 med ε_2. Vi får dermed, at

$$y \in \omega(y_o) \quad \Rightarrow \quad y_1 < y < y_2$$

Da f er voksende, har vi ifølge sætning A.3.20, at f^{-1} er voksende, hvilket giver os:

$$y_1 < y < y_2 \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_2)$$

Da $y_1 = f(x_o - \varepsilon_2)$ og $y_2 = f(x_o + \varepsilon_2)$ ser vi, at $f^{-1}(y_1) = x_o - \varepsilon_2$ og $f^{-1}(y_2) = x_o + \varepsilon_2$, hvormed vi får:

$$f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_2) \ \Rightarrow\ x_o - \varepsilon_2 < f^{-1}(y) < x_o + \varepsilon_2$$

hvilket ifølge definitionen af $\omega_2(x_o)$ betyder, at $f^{-1}(y) \in \omega_2(x_o)$.

Alt i alt har vi altså følgende:

$$y \in \omega(y_o) \quad \Rightarrow \quad y_1 < y < y_2 \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_2) \ \Rightarrow$$

$$x_o - \varepsilon_2 < f^{-1}(y) < x_o + \varepsilon_2 \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(y) \in \omega_2(x_o) \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(y) \in \omega(x_o)$$

dvs.

$$y \in \omega(y_o) \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(y) \in \omega(x_o)$$

hvormed det ønskede er bevist. ♥

Øvelse 3.28.
Gør rede for, at funktionen $h(x) = \sqrt[3]{x}$ er den omvendte funktion til $f(x) = x^3$.
Argumenter for, at funktionen h er kontinuert i 8. ♥

Nogle egenskaber ved kontinuerte funktioner og deres grafer.

Kontinuerte funktioner defineret i intervaller har en række særlige egenskaber, som er særdeles nyttige at kende til – bl.a. i forbindelse med beviser af en række andre sætninger.
Vi vil her indskrænke os til at se på kontinuerte funktioner defineret i lukkede, begrænsede intervaller, altså intervaller af typen: $[a;b]$, hvor begge endepunkter er med i intervallet.

Sætning 3.29.
Hvis f er kontinuert i et interval $[a;b]$, og hvis t er et tal imellem f(a) og f(b),
så findes der mindst ét tal $c \in]a;b[$, så $f(c) = t$,
hvormed der specielt gælder, at $t \in Vm(f)$.

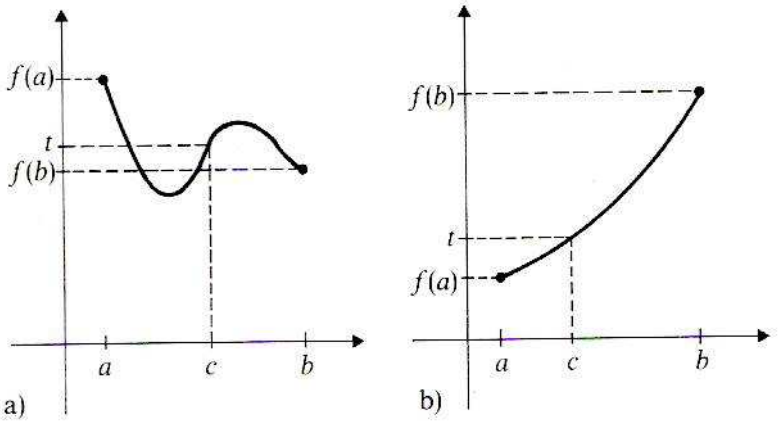


Fig. 3.9

Denne sætning følger intuitivt klart af, at grafen for en kontinuert funktion defineret i et interval er en sammenhængende kurve, hvorfor specielt tallet t vil være funktionsværdi for et eller andet tal c. (Jfr. figur 3.9). Men et egentligt bevis byggende på de definitioner og sætninger, der beskriver situationen, er pudsigt nok relativt kompliceret. Det er derfor placeret i Appendix 4, hvor interesserede læsere kan se det.

Ud fra sætning 3.29 får vi følgende sætning:

Sætning 3.30.
Lad f være en kontinuert funktion defineret i intervallet $[a;b]$. Da gælder følgende:

a) Hvis f(a) og f(b) har forskelligt fortegn, så findes et tal $c \in]a;b[$, så $f(c) = 0$.
b) Hvis $f(a) \neq f(b)$, så er intervallet mellem f(a) og f(b) en delmængde af Vm(f).
c) Hvis f er voksende i $[a;b]$, så er $Vm(f) = [f(a);f(b)]$, og
hvis f er aftagende i $[a;b]$, så er $Vm(f) = [f(b);f(a)]$

Øvelse 3.31.
a) Argumenter for at sætning 3.30 er korrekt
b) Tegn for hver af de tre dele a), b) og c) af sætningen figurer, der illustrerer situationen. ♥

Eksempel 3.32.

Vi vil prøve at finde en løsning til ligningen: $x^3 = \sqrt{1+4x}$ v.hj.a. sætning 3.30 a).
Ligningen $x^3 = \sqrt{1+4x}$ er ensbetydende med ligningen: $x^3 - \sqrt{1+4x} = 0$. Hvis vi derfor sætter $f(x) = x^3 - \sqrt{1+4x}$, skal vi finde et nulpunkt for f.
Dette kan nemt gøres v.hj.a. en grafregner (med "solver") eller et cas-program til en PC. Men vi vil dels gøre rede for, hvorfor der overhovedet er et nulpunkt, dels vise, hvordan det kan findes med "håndkraft", hvis man ikke har sådant maskineri (– og derigennem samtidig få en idé om, hvad der sker inde i maskinen, når den bestemmer en løsning).

Vi starter med at konstatere, at funktionen f er kontinuert for $x > -\frac{1}{4}$ (Overvej !).
Af sætning 3.30 a) følger herefter, at:

Da f(0) = –1 og f(2) = 5, har f et nulpunkt mellem 0 og 2 (her svarer a til 0 og b til 2)
Da f(–1) = $1-\sqrt{5} < 0$ har f et nulpunkt mellem 1 og 2 (her svarer a til 1 og b til 2)
Da f(1,5) = $3{,}375 - \sqrt{7} > 0$, har f et nulpunkt mellem 1 og 1,5 (hvad svarer til a og b her ?)
Da f(1,25) = – 0,496 < 0 , har f et nulpunkt mellem 1,25 og 1,5

På denne måde fortsættes, idet vi hele tiden undersøger funktionsværdien af tallet midt imellem to tal, som vi ved har funktionsværdier med forskelligt fortegn. Processen stoppes enten, når et af de undersøgte punkter er et nulpunkt for f, eller når man er tilfreds med nøjagtigheden i angivelsen af løsningen.
Denne metode er velegnet til databehandling (og kunne såmænd godt være den, der på grafregneren eller i cas-programmet bestemmer nulpunktet). Men det skal bemærkes, at der findes andre metoder, som er væsentligt "hurtigere", dvs. som giver resultatet med den ønskede nøjagtighed efter færre antal "skridt" i processen. Vi vil imidlertid ikke komme yderligere ind på dette.

Hvis løsningen skal findes ved "håndkraft" (det vil i praksis sige ved hjælp af en regnemaskine uden "solver"), bør man efter de første indledende skridt nok prøve sig frem v.hj.a. "pæne" tal som f.eks. 1,2, 1,3, 1,4 o.lign.
Hvis vi gør dette ser vi, at f(1,3) < 0 og f(1,4) > 0, så nulpunktet ligger imellem 1,3 og 1,4. Hvis vi prøver med 1,36 og 1,37, så ser vi, at f(1,36) = – 0,02226 og f(1,37) = 0,02577.
Et nulpunkt for f, dvs. en løsning x_o til ligningen, ligger altså imellem 1,36 og 1,37. Hvis man er tilfreds med to decimalers nøjagtighed, så vælges x_o = 1,36, idet f(1,36) ligger nærmere 0 end f(1,37). Hvis man ikke er tilfreds med to decimalers nøjagtighed, så fortsættes processen.
Vi har således, at x_o = 1,36 er en løsning til ligningen: $x^3 = \sqrt{1+4x}$. ♥

Øvelse 3.33.

Tegn grafen for funktionen: $f(x) = x^3 - \sqrt{1+4x}$, $x \in [0;2]$, med en stor enhed, og følg på figuren udviklingen af beregningerne i eksempel 3.32. ♥

Øvelse 3.34.

Gør rede for, at funktionen $g(x) = x^3 + 2x - 1$ har et nulpunkt. (Vi kan senere bevise, at den har præcis ét nulpunkt).
Find nulpunktet ved metoden i eksempel 3.32 med 2 decimalers nøjagtighed. ♥

Øvelse 3.35.

Løs ligningen $0,5x^3 - 2x^2 + x + 1 = 0$ v.hj.a.:

a) metoden i eksempel 3.32 med 2 decimalers nøjagtighed

b) en regnemaskine/grafregner med en "solver"

c) et matematik-program/cas-program på en PC

Kommentér resultatet. ♥

Den sidste sætning vi vil omtale vedrørende kontinuerte funktioner defineret i lukkede, begrænsede intervaller, altså intervaller af typen: $[a;b]$, er følgende:

Sætning 3.36.

Lad f være en kontinuert funktion defineret i et lukket, begrænset interval $[a;b]$. Da gælder:

a) f(x) antager både en mindsteværdi (minimum) og en størsteværdi (maximum) i $[a;b]$.

b) Hvis $f(x_1)$ er mindsteværdien og $f(x_2)$ er størsteværdien, så er Vm(f) = $[f(x_1);f(x_2)]$, hvilket også kan udtrykkes således: Vm(f) = $[\min f(x); \max f(x)]$

Også denne sætning følger intuitivt klart af, at grafen for en kontinuert funktion defineret i et interval er en sammenhængende kurve. Grafen "starter" nemlig i punktet (a, f(a)) og "slutter" i punktet (b, f(b)) uden nogen form for afbrydelse (se figur 3.10, som viser forskellige mulige situationer). Men også her er et egentligt bevis byggende på de definitioner og sætninger, der beskriver situationen, ret kompliceret. Det er derfor placeret i Appendix 4, hvor interesserede læsere kan se det.

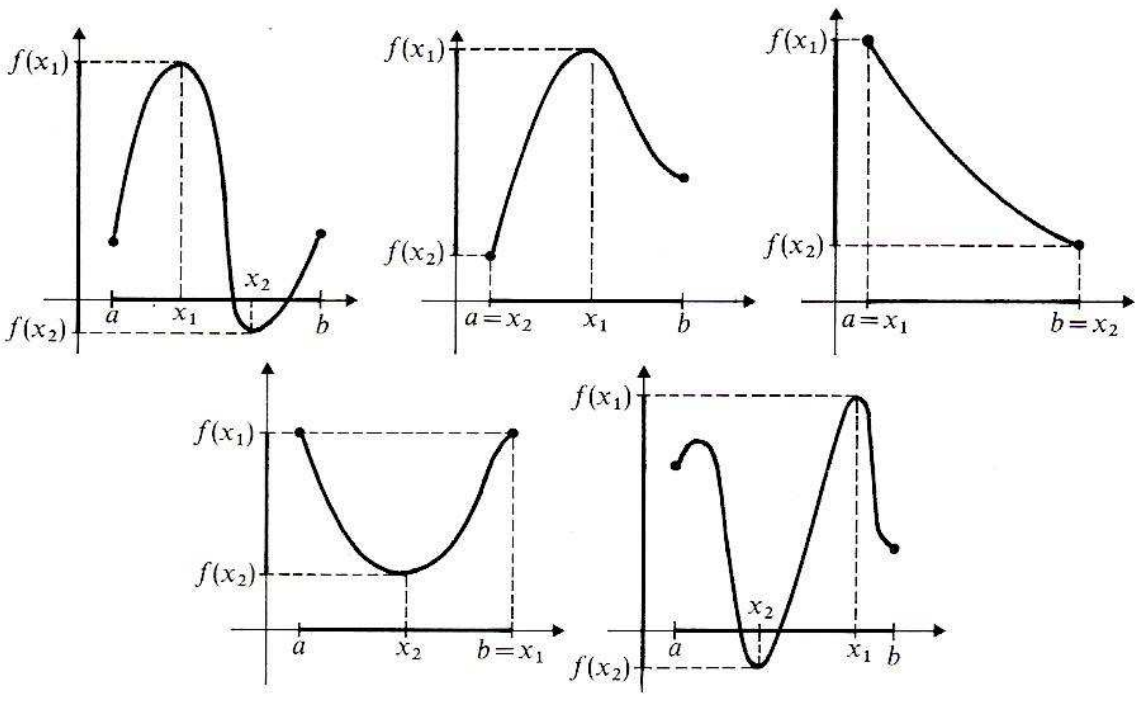


Fig. 3.10

Det skal bemærkes, at ingen af forudsætninger i sætning 3.36 kan undværes, dvs. sætningen gælder ikke, hvis f ikke er kontinuert, eller hvis f ikke er defineret i et lukket, begrænset interval.

Øvelse 3.37.

a) Betragt intervallet $]0;5]$, som er begrænset, men ikke lukket, idet $0 \notin]0;5]$

Skitsér grafen for funktionen: $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in]0;5]$.

Argumentér for, at f er kontinuert i $]0;5]$, og at f ikke har noget maximum.

b) Overvej, at hvis vi betragter intervallet $[2;\infty[$, som ikke er begrænset, så er funktionen $f(x) = x^2$, $x \in [2;\infty[$, et eksempel på en kontinuert funktion, som ikke har et maximum. ♥

Øvelse 3.38.

Tegn en skitse af en funktion, som

a) er defineret i det lukkede, begrænsede interval $[2;6]$,

b) ikke er kontinuert i $[2;6]$,

c) hverken har en størsteværdi eller en mindsteværdi. ♥

Øvelse 3.39.

Skitsér i hvert af nedenstående tilfælde grafen for en kontinuert funktion f, som er defineret i intervallet $[-1;3[$, og som opfylder:

a) $Vm(f) = [-2;1]$

b) $Vm(f) =]-8;2]$

c) $Vm(f) = [0;4[$

d) $Vm(f) = R_+ \cup \{0\} = [0;\infty[$

e) $Vm(f) = R$

Kommentér resultaterne (indholdet af øvelsen). ♥

Vi afslutter kapitlet om kontinuitet med at give eksempler på funktioner, der ikke er kontinuerte:

Øvelse 3.40.

Betragt funktionen f givet ved: $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{hvis } x \in Q \\ 1 & \text{hvis } x \in I \end{cases}$

hvor Q og I som bekendt er hhv. de rationale og de irrationale tal.

Anvend sætning A.1.4 fra Appendix 1 til at bevise, at f ikke er kontinuert noget sted. ♥

Øvelse 3.41.

Betragt funktionen g givet ved: $g(x) = \begin{cases} x & \text{hvis } x \in Q \\ -x & \text{hvis } x \in I \end{cases}$

Bevis, at g er kontinuert i 0, og ikke i andre tal (Jfr. øvelse 3.40). ♥

Kapitel 4: Differentiabilitet 1.

Differentiabilitet og differentialkvotient.

Vi vil indledningsvis betragte et eksempel, som skal lede os frem til en definition af begreberne differentiabilitet og differentialkvotient.

Eksempel 4.1.
Benzintanken på en bil fyldes op på en tankstation. Rumfanget af benzinmængden i bilens tank er da en funktion f af tiden, og vi kan tænke os, at den f.eks. har en graf som følgende:

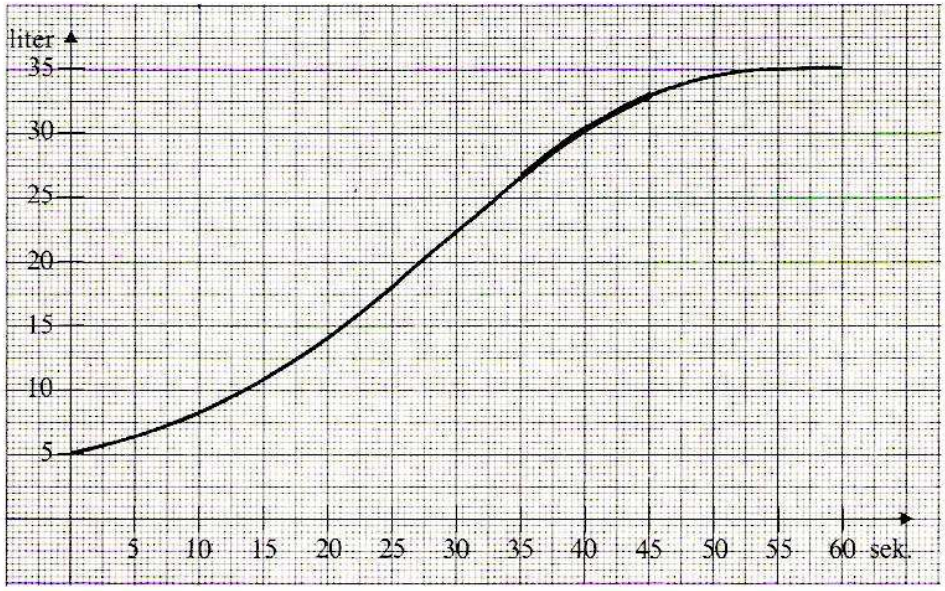


Fig. 4.1

Vi kan se, at påfyldningen af 30 liter tager 60 sekunder, hvilket svarer til, at der i gennemsnit fyldes $\frac{1}{2}$ liter på i sekundet. Vi siger, at gennemsnits-påfyldningshastigheden for hele tidsforløbet er $\frac{1}{2}$ liter pr. sek. (skrives: $\frac{1}{2}$ L/sek.).

Men vi kan se af grafen, at rumfanget ikke forøges jævnt, idet kurven ikke er en ret linie. F.eks. forøges rumfanget hurtigere omkring 30 sek. end omkring tidspunktet 50 sek., ider grafen "stiger hurtigere" omkring 30 sek. Vi vil derfor finde et mål for påfyldningshastigheden ved forskellige tidspunkter. Vi vil f.eks. prøve at betragte tidspunktet t = 40 sek. og finde ud af, hvor hurtigt væskemængden forøges netop ved dette tidspunkt.
Til dette formål betragtes figur 4.2 (se øverst på næste side), som er et udsnit af figur 4.1.

Vi ser, at f(40) = 30 liter og f(45) = 32,5 liter, så på de 5 sekunder, der forløber fra t = 40 sek. til t = 45 sek., er væskemængden forøget med 2,5 liter, hvilket altså over denne 5-sek.-periode svarer til en gennemsnitshastighed på $\frac{2,5}{5}$ L/sek. = 0,5 L/sek.

Denne gennemsnitshastighed er altså beregnet som:

$$0,5 = \frac{2,5}{5} = \frac{32,5-30}{45-40} = \frac{f(45)-f(40)}{45-40}$$

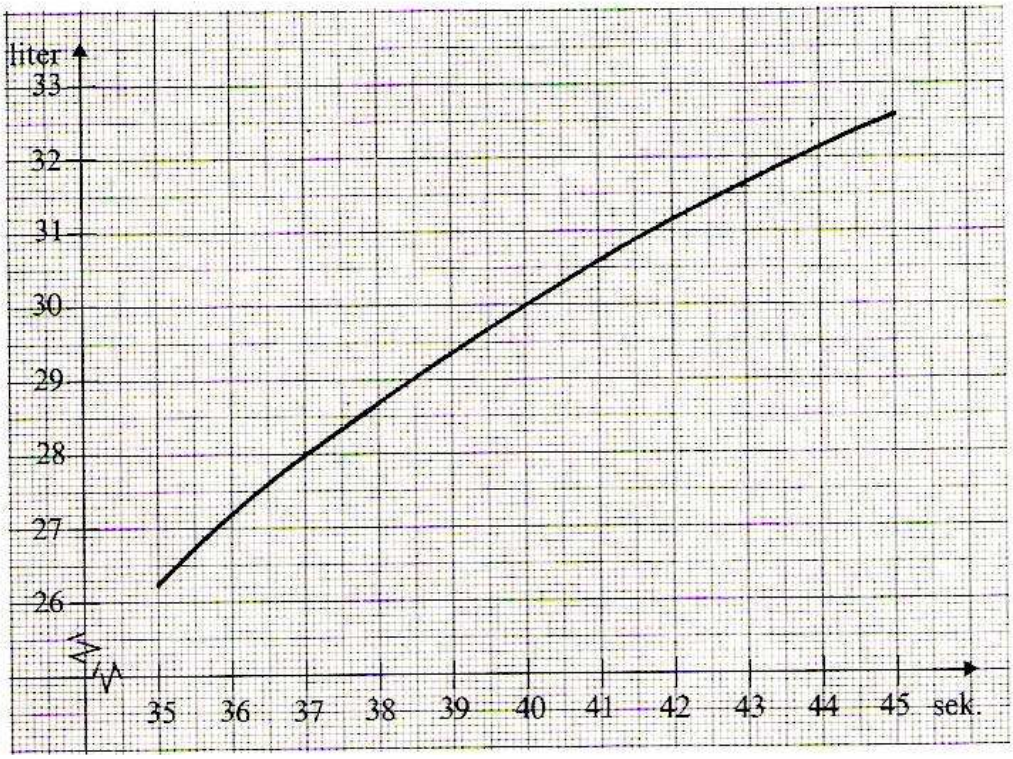


Fig. 4.2

Vi ser også, at f(37) = 27,9, så over den 3-sek.-periode, som går fra t = 37 til t = 40, er gennemsnitshastigheden givet ved:

$$\frac{30-27,9}{40-37} = \frac{2,1}{3} = 0,7 \quad \text{, altså } 0,7 \text{ L/sek.}$$

Som ovenfor ved 0,5 L/sek. har vi her, at

$$0,7 = \frac{2,1}{3} = \frac{30-27,9}{40-37} = \frac{27,9-30}{37-40} = \frac{f(37)-f(40)}{37-40}$$

Selv om vi har nogle "små" intervaller ved t = 40 sek., så er gennemsnitshastigheden altså ikke nødvendigvis en fast størrelse, og den er dermed ikke et brugbart mål for hastigheden til tidspunktet 40 sek.
Men hvis vi nu gør tidsintervallerne mindre og mindre, så må vi komme tættere og tættere på "den rigtige" værdi for hastigheden ved 40 sek. Hvis vi derfor definerer funktionen h ved:

$$h(t) = \frac{f(t)-f(40)}{t-40}$$

(dvs. h(t) bliver gennemsnitshastigheden i et tidsinterval af længden $|t-40|$ placeret ved tidspunktet 40 sek.), så skal vi undersøge h's opførsel, når t går mod 40.
I denne situation siger vi, at hvis h har en grænseværdi for t gående mod 40, så kaldes grænseværdien for "hastigheden til tidspunktet 40 sek.".

Af nedenstående tabel (se næste side), som er udarbejdet på grundlag af figur 4.2, ser vi, at den omtalte grænseværdi ser ud til at være ca. 0,65 L/sek., hvorfor vi siger, at påfyldningshastigheden til tiden 40 sek. er 0,65 L/sek.

t (sek.)	h(t) (L/sek.)	t (sek.)	h(t) (L/sek.)
45	0,50	37	0,70
41	0,60	39,5	0,69
40,25	0,64	39,9	0,66
40,1	0,65		

For at finde hastigheden til tidspunktet 40 sek., skal vi altså finde $\lim_{t\to 40} h(t)$, dvs. $\lim_{t\to 40} \frac{f(t)-f(40)}{t-40}$

Hvis denne grænseværdi eksisterer, så siger vi, at funktionen f er differentiabel i punktet 40, og vi betegner grænseværdien med $f'(40)$, der læses: "f-mærke af 40".

$f'(40)$ kaldes differentialkvotienten af f i 40, og den angiver altså i dette tilfælde påfyldningshastigheden til tidspunktet 40 sek.

Lad os til sidst i dette eksempel undersøge udtrykket $\frac{f(t)-f(40)}{t-40}$ lidt nærmere.

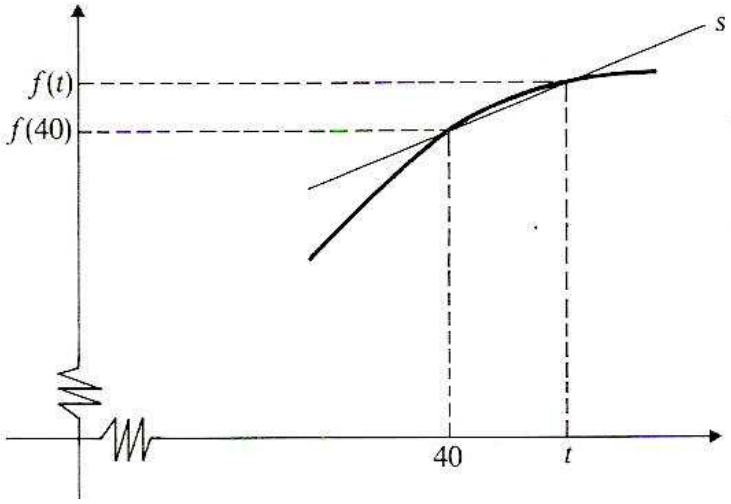


Fig. 4.3

Hvis vi betragter punkter (40, f(40)) og (t, f(t)), som ligger på grafen for f (se figur 4.3), så ser vi, at udtrykket $\frac{f(t)-f(40)}{t-40}$ netop er hældningskoefficienten for linien s igennem de to punkter. (En sådan linie igennem to af grafens punkter kaldes en sekant for grafen).

Når vi nu lader t gå mod 40, så vil vi få en række forskellige sekanter og dermed en række forskellige hældningskoefficienter. På figur 4.4 er tegnet sekanter svarende til tre mulige positioner af t: t_1, t_2 og t_3.

Vi ser, at efterhånden som t nærmer sig til 40, vil sekanterne nærme sig til en bestemt linie ℓ, som omkring punktet (40, f(40)) ligger tæt op af grafen. Vi vil senere definere denne linie som grafens tangent i punktet (40, f(40)). Idet sekanterne således "nærmer sig" til tangenten, når t går mod 40, så vil sekanternes

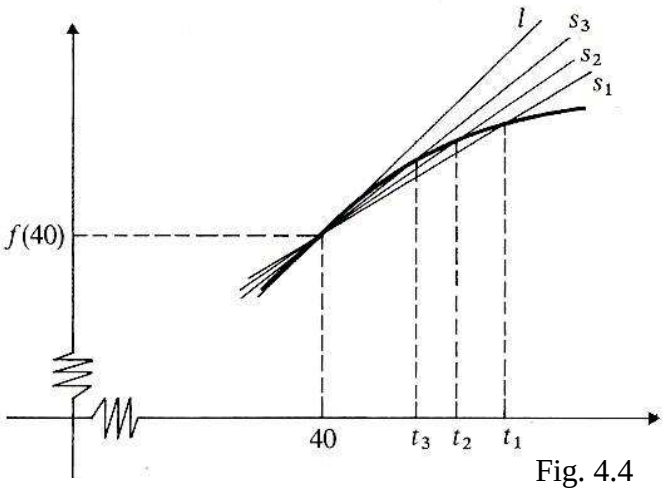


Fig. 4.4

hældningskoefficienter også nærme sig til hældningskoefficienten for tangenten. Vi ser derfor, at differentialkvotienten af f i 40 svarer til hældningskoefficienten for tangenten.
Da sekanthældningerne svarer til de gennemsnitlige påfyldningshastigheder i de forskellige tidsintervaller ved 40 sek., kan vi altså sige, at hældningskoefficienten for tangenten – som er lig med $f'(40)$ – svarer til påfyldningshastigheden i punktet 40.

(Bemærk, at påfyldningshastigheden også kan kaldes rumfangets ændringshastighed, idet den angiver, hvor hurtigt ændringen af rumfanget foregår). ♥

Øvelse 4.2.
Find på grundlag af figur 4.1 påfyldningshastigheden til tiden 25 sek. og til tiden 50 sek. ♥

Øvelse 4.3.
Der er gået et lille hul på en gasballon, så gassen siver ud. Ved at måle sammenhængen mellem rumfanget (i cm^3) og tiden (i sek.) er der fremkommet følgende kurve:

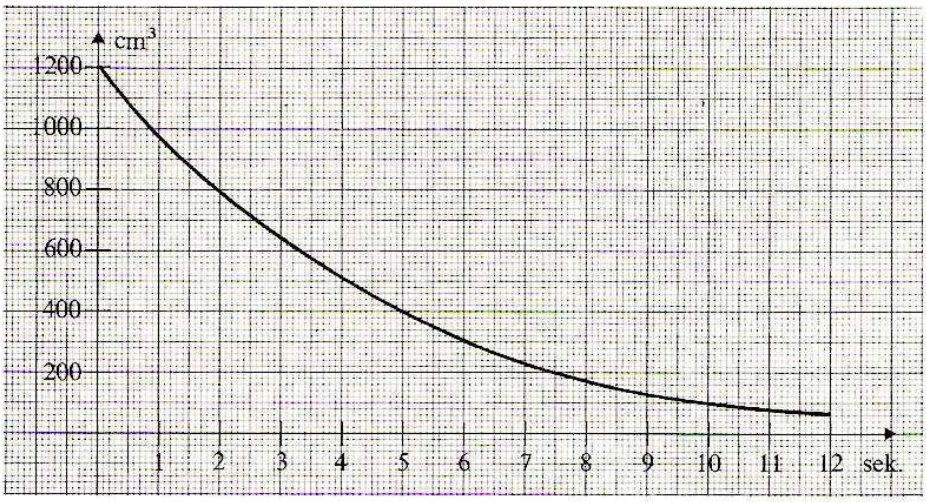


Fig. 4.5

a) Find rumfangets ændringshastighed til tiden 1 sek. og til tiden 8 sek.
b) Hvorfor er disse resultater negative ?
c) Find gassens udstrømningshastighed til de samme tidspunkter. ♥

På baggrund af eksempel 4.1 vil vi anføre følgende definition:

Definition 4.4.
En funktion f siges at være differentiabel i et punkt x_o, hvis følgende to ting er opfyldt:

1) funktionen er defineret i en omegn omkring x_o,
2) udtrykket $\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$ har en grænseværdi for x gående mod x_o

Grænseværdien af $\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$ for x gående mod x_o kaldes differentialkvotienten af f i x_o
– og den betegnes: $f'(x_o)$.

Hvis f er differentiabel i x_o, så har vi altså, at:

$$f'(x_o) = \lim_{x \to x_o} \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} \qquad \text{dvs.} \qquad \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} \to f'(x_o) \text{ for } x \to x_o$$

Udtrykket $\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$ kaldes differenskvotienten for funktionen i intervallet mellem x_o og x – et navn der desværre er nemt at forveksle med navnet: differentialkvotienten, men forskellen ligger altså i, at differentialkvotienten er grænseværdien af differenskvotienten (for x gående mod x_o).

Differenskvotienten angiver hældningskoefficienten for sekanten imellem de to grafpunkter (x, f(x)) og (x_o, $f(x_o)$), medens differentialkvotienten $f'(x_o)$ angiver hældningskoefficienten for tangenten til grafen i punktet (x_o, $f(x_o)$).

Differenskvotienten angiver den gennemsnitlige funktionstilvækst (eller den gennemsnitlige væksthastighed eller den gennemsnitlige ændringshastighed) i intervallet fra x_o til x, og differentialkvotienten $f'(x_o)$ angiver funktionens væksthastighed (eller ændringshastighed) i punktet x_o.

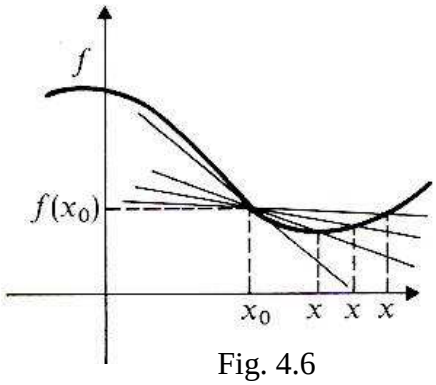


Fig. 4.6

Når vi skal bestemme generelle udtryk for differentialkvotienter for givne funktionstyper, eller når vi skal bevise regneregler for differentiation mm., så kan vi benytte følgende:

3-trins strategi ved undersøgelse af differentiabilitet mm.

1) Kontrollér, at f er defineret i en omegn om x_o, og opskriv derefter differenskvotienten $\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$ for den givne funktion
2) Prøv gennem snedige omskrivninger og argumenter at se, om differenskvotienten har en grænseværdi for x gående mod x_o
3) Konkludér: Hvis differenskvotienten har en grænseværdi for x gående mod x_o, så er f differentiabel i x_o, og differentialkvotienten $f'(x_o)$ er lig med den fundne grænseværdi.

Eksempel 4.5.

Vi vil vise, at funktionen $f(x) = x^2$ er differentiabel i 3, samt finde differentialkvotienten i 3.
Idet f er defineret overalt, og dermed specielt i en omegn om 3, skal vi betragte udtrykket

$$\frac{f(x)-f(3)}{x-3}$$

Vi har for $x \neq 3$, at

$$\frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \frac{x^2-3^2}{x-3} = \frac{(x+3)(x-3)}{x-3} = x+3$$

og heraf ser vi, at:

$$\frac{f(x)-f(3)}{x-3} \to 6 \quad \text{for} \quad x \to 3$$

Vi har således vist, at f er differentiabel i 3 med differentialkvotienten $f'(3) = 6$.
(Jfr. øvelse 2.16 a), hvor vi ser på en tilsvarende problemstilling, men med 5 i stedet for 3). ♥

Øvelse 4.6.

Vis v.hj.a. 3-trins strategien, at:

a) funktionen $g(x) = 2x - 3$ er differentiabel i 5, og find $g'(5)$. Kommentér resultatet.

b) funktionen $f(x) = x^2$ er differentiabel i alle $x_o \in R$, og at $f'(x_o) = 2x_o$

(Jfr. eksempel 4.5, hvor $x_o = 3$). ♥

Eksempel 4.7.

Betragt funktionen $h(x) = \sqrt{x}$. Vi vil vise, at h er differentiabel i et vilkårligt punkt $x_o > 0$, samt finde $h'(x_o)$.

Da $Dm(h) = [\,0;\infty[$ og da $x_o > 0$, ser vi (jfr. Appendix 1), at h er defineret i en omegn om x_o.

Vi skal derfor beskæftige os med differenskvotienten $\frac{h(x)-h(x_o)}{x-x_o}$. For $x \neq x_o$ har vi:

$$\frac{h(x)-h(x_o)}{x-x_o} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_o}}{x-x_o} = \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{x_o})\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{x_o})}{(x-x_o)\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})}$$

hvor vi i den sidste omskrivning har forlænget brøken med $\sqrt{x}+\sqrt{x_o}$ – og en forlængelse af en brøk ændrer som bekendt ikke brøkens værdi.

Hvis vi nu anvender regnereglerne: $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ og $(\sqrt{a})^2 = a$ på tælleren, så får vi:

$$\frac{h(x)-h(x_o)}{x-x_o} = \frac{x-x_o}{(x-x_o)\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}$$

Da $\sqrt{x} \to \sqrt{x_o}$ for $x \to x_o$ (jfr. Sætning 2.9 c)), ser vi i alt, at:

$$\frac{h(x)-h(x_o)}{x-x_o} \to \frac{1}{2\sqrt{x_0}} \quad \text{for } x \to x_o$$

Funktionen $h(x) = \sqrt{x}$ er således differentiabel i x_o med differentialkvotienten $h'(x_o) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$.

(Jfr. Øvelse 2.16 b), hvor $x_o = 7$). ♥

Øvelse 4.8.

Vis v.hj.a. 3-trins strategien, at funktionen $f(x) = \frac{1}{x}$ er differentiabel i alle $x_o \in R\backslash\{0\}$, og at :

$$f'(x_o) = -\frac{1}{x_o^{\,2}}$$

(Jfr. Øvelse 2.16 c), hvor $x_o = 3$). ♥

Eksempel 4.9.

a) Funktionen $f(x) = |x|$ er ikke differentiabel i 0, idet differenskvotienten

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{|x|-|0|}{x-0} = \frac{|x|}{x}$$

ikke har nogen grænseværdi for x gående mod 0. Dette skyldes, at når x > 0, så er $\frac{|x|}{x} = \frac{x}{x} = 1$, og når x < 0, så er $\frac{|x|}{x} = \frac{-x}{x} = -1$. (Jfr. også Øvelse 2.8 a)).

b) $\sqrt{x}$ er ikke differentiabel i 0, bl.a. fordi $\sqrt{x}$ ikke er defineret i et symmetrisk interval omkring 0.

c) Lad funktionen f være givet ved:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & , x \geq 0 \\ -\sqrt{x} & , x < 0 \end{cases}$$

På figur 4.7 ses det grafisk billede af f. f er ikke differentiabel i 0, idet differenskvotienten $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ bliver uendelig stor, når x nærmer sig til 0 (overvej !). Differenskvotienten har altså ingen grænseværdi for x gående mod 0.

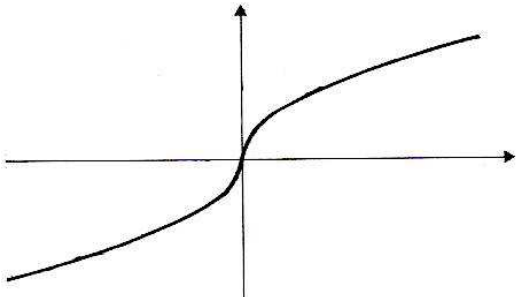


Fig. 4.7

(Sekanterne får større og større hældningskoefficienter, efterhånden som x kommer nærmere til 0, hvorved "tangenten" bliver en lodret linie gennem punktet (0,0). Og en lodret linie har ingen hældningskoefficient). ♥

Undertiden er det fordelagtigt at omskrive differenskvotienten på følgende måde:
Hvis vi sætter $h = x - x_o$ (dvs. h er tilvæksten i den uafhængige variable x), så har vi, at $x = x_o + h$, og dermed, at

$$\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} = \frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h}$$

Da x går mod x_o, hvis og kun hvis h går mod 0 (overvej !), ser vi, at hvis grænseværdien $\lim_{x \to x_o} \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$ eksisterer, så eksisterer grænseværdien $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h}$ også (og omvendt), og de to grænseværdier er ens.

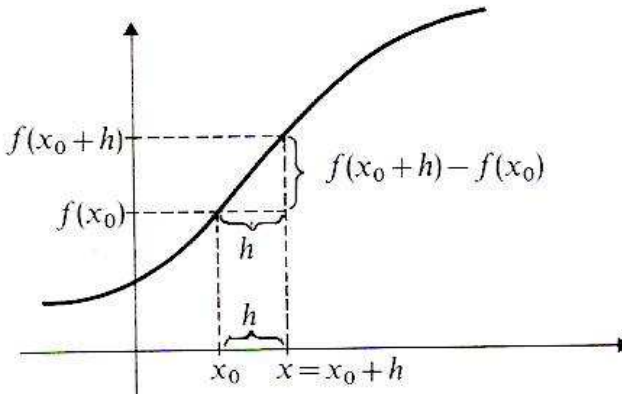


Fig. 4.8

Hvis disse grænseværdier eksisterer, så er f differentiabel i x_o, og der gælder:

$$f'(x_o) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h}$$

Eksempel 4.10.
Betragt funktionen $f(x) = x^3$, og lad $x_o \in R$ være vilkårligt valgt. Vi har da:

$$f(x_o+h)-f(x_o) \;=\; (x_o+h)^3-x_o^{\,3} \;=\; x_o^{\,3}+3x_o^{\,2}h+3x_oh^2+h^3-x_o^{\,3} \;=\; 3x_o^{\,2}h+3x_oh^2+h^3$$

hvoraf vi ser, at

$$\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h} \;=\; 3x_o^{\,2}+3x_oh+h^2$$

Dette giver os, at

$$\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h} \;\to\; 3x_o^{\,2} \quad \text{for} \quad h\to 0$$

dvs. $f(x) = x^3$ er differentiabel i x_o med differentialkvotienten $f'(x_o) = 3x_o^{\,2}$. ♥

Øvelse 4.11

Find på samme måde som i eksempel 4.10

a) differentialkvotienten af $g(x) = 3x^2 + 4x - 1$ i punktet 2

b) differentialkvotienten af en lineær funktion $f(x) = ax + b$ i et vilkårligt punkt x_o. ♥

Ofte benævnes tilvæksten h som Δx, idet symbolet Δ (”delta”) anvendes til at angive, at der er tale om en tilvækst i den størrelse der anføres efter Δ’et, altså i dette tilfælde x. (Denne skrivemåde anvendes specielt i matematiske modeller, hvor Δx står for en lille tilvækst i den konkrete uafhængige variable, f.eks. tiden).

Vi har altså, at $\Delta x = h = x - x_o$.

Funktionen f er differentiabel, hvis differenskvotienten $\dfrac{f(x_o+\Delta x)-f(x_o)}{\Delta x}$ har en grænseværdi for Δx gående mod 0, og da gælder der:

$$\frac{f(x_o+\Delta x)-f(x_o)}{\Delta x} \;\to\; f'(x_o) \quad \text{for} \quad \Delta x \;\to 0$$

dvs. $$f'(x_o) \;=\; \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_o+\Delta x)-f(x_o)}{\Delta x}$$

På samme måde som Δx betyder tilvæksten i den uafhængige variable x, så anvendes undertiden betegnelsen Δf for tilvæksten i den afhængige variable, dvs. $\Delta f = f(x_o+\Delta x)-f(x_o)$, hvormed differenskvotienten kan skrives som $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$.

Vi har da, at

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} \;=\; \frac{f(x_o+\Delta x)-f(x_o)}{\Delta x} \;=\; \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$$

og dermed, at

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} \;\to\; f'(x_o) \quad \text{for} \quad \Delta x \;\to 0$$

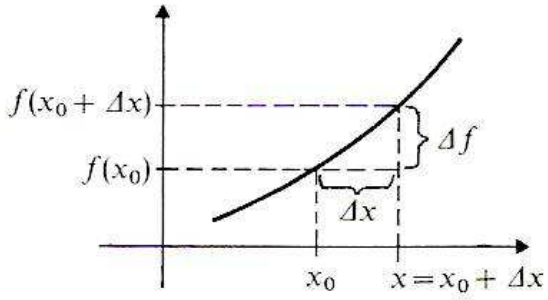


Fig. 4.9

Vedrørende sammenhængen mellem kontinuitet og differentiabilitet gælder der følgende sætning:

Sætning 4.12.
Hvis en funktion f er differentiabel i et punkt x_o, så er den også kontinuert i x_o.

Bevis:
Da f er defineret i en omegn om x_o (og dermed specielt i x_o), skal vi ifølge definition 3.1 vise, at:

$$f(x) \to f(x_o) \text{ for } x \to x_o$$

hvilket er det samme som at vise, at

$$f(x) - f(x_o) \to 0 \text{ for } x \to x_o$$

Da vi ved, at f er differentiabel i x_o, skal vi have dette inddraget i beviset. Dette gør vi ved at lave følgende omskrivning (som gælder for $x \neq x_o$):

$$f(x) - f(x_o) = (f(x) - f(x_o)) \cdot \frac{x - x_o}{x - x_o} = \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} \cdot (x - x_o)$$

Vi ved, at

$$\frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} \to f'(x_o) \text{ for } x \to x_o \qquad \text{og at} \qquad x - x_o \to 0 \text{ for } x \to x_o$$

Ifølge sætning 2.11 c) får vi dermed, at

$$f(x) - f(x_o) \to f'(x_o) \cdot 0 \text{ for } x \to x_o$$

dvs.

$$f(x) - f(x_o) \to 0 \text{ for } x \to x_o$$

Hermed er sætningen bevist. ♥

Omvendt kan en funktion godt være kontinuert i et punkt uden at være differentiabel i punktet. Funktionen i nedenstående eksempel 4.13 er således kontinuert i 2, men ikke differentiabel i 2.

At en funktion f er differentiabel i et punkt x_o betyder, lidt løst udtrykt, at grafen for f er "glat" i punktet $(x_o, f(x_o))$, således at der kan tegnes en tangent, som ikke er lodret. Grafen må derfor hverken "knække" eller "springe" i punktet, og en eventuel tangent må ikke være lodret.
På nedenstående figur 4.10 er skitseret graferne for fire forskellige funktioner: f_1 , f_2 , f_3 og f_4, hvoraf kun f_4 er differentiabel i punktet x_o.

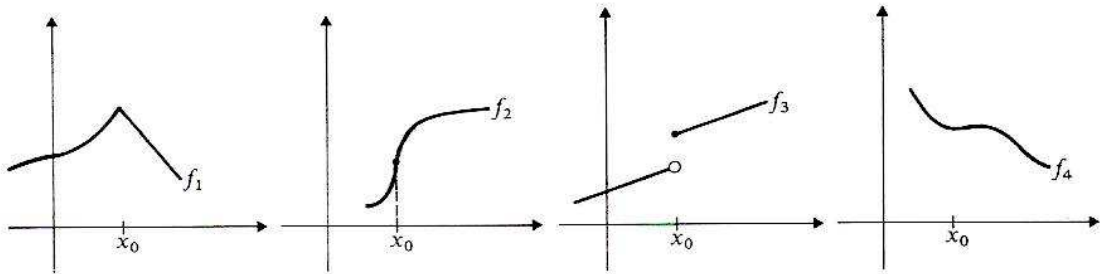


Fig. 4.10

Eksempel 4.13.
Betragt funktionen f givet ved:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{når } x \le 2 \\ \frac{3}{2}x + 1 & \text{når } x > 2 \end{cases}$$

Grafen for f er tegnet på figur 4.11

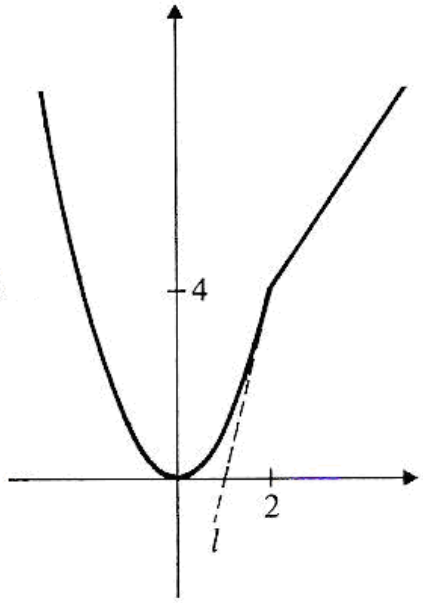


Fig. 4.11

f er kontinuert i 2, idet $2^2 = 4$ og $\frac{3}{2} \cdot 2 + 1 = 4$ (jfr. sætning 3.13).
Men f er ikke differentiabel i 2, idet hvis x er mindre end 2, så er

$$\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{x^2 - 4}{x - 2} = x + 2$$

hvoraf vi ser, at

$$\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \to 4 \quad \text{for } x \to 2-$$

Og hvis x er større end 2, så er

$$\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{\frac{3}{2}x + 1 - 4}{x - 2} = \frac{\frac{3}{2}x - 3}{x - 2} = \frac{\frac{3}{2}(x - 2)}{x - 2} = \frac{3}{2}$$

hvoraf vi ser, at

$$\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \to \frac{3}{2} \quad \text{for } x \to 2+$$

Differenskvotienten $\frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ har således ikke en grænseværdi for x gående mod 2, dvs. f er ikke differentiabel i 2.
Det ses da også af figur 4.11, at det ikke er muligt at indtegne en tangent til grafen i punktet (2,4), idet linien $y = \frac{3}{2}x + 1$ er den linie, som bedst tilnærmer "højre del" af grafen ved punktet (2,4) (denne linie er grafen selv), hvorimod den skitserede linie *l* tilnærmer "venstre del" af grafen bedst ved punktet (2,4). Grafen "knækker" i (2,4).
Vi vender senere (i Kapitel 7) tilbage til dette eksempel. ♥

Tangent.

I forbindelse med indførelse af differentialkvotienten blev det omtalt, at $f'(x_o)$ er hældningen for en linie, som tangerer grafen for funktionen f i punktet $(x_o, f(x_o))$.
Når vi kender hældningskoefficienten a for en linie, og et punkt (x_o, y_o), som linien går igennem, så er liniens ligning givet ved: $y = a \cdot (x - x_o) + y_o$, og linien er graf for en lineær funktion t med forskriften: $t(x) = a \cdot (x - x_o) + y_o$.
Om tangenten må derfor gælde, at den har ligningen: $y = f'(x_o) \cdot (x - x_o) + f(x_o)$
og at den er graf for en funktion t med forskriften: $t(x) = f'(x_o) \cdot (x - x_o) + f(x_o)$
Disse to formler kan omskrives til følgende (kontrollér):

$y = f'(x_o) \cdot x + (f(x_o) - f'(x_o) \cdot x_o)$ hhv. $t(x) = f'(x_o) \cdot x + (f(x_o) - f'(x_o) \cdot x_o)$

hvormed de er angivet på den kendte form: $y = ax + b$ hhv. $t(x) = ax + b$.

De omtalte udtryk – og dette at den omtalte linie "tangerer" grafen, dvs. ligger tæt på grafen i punktet $(x_o, f(x_o))$ – kan også indses på følgende måde:

Da funktionen f er differentiabel i x_o gælder der, at

$$\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} \to f'(x_o) \quad \text{for } x \to x_o$$

Hermed ser vi, at når $x \approx x_o$ (dvs. når "x næsten er lig med x_o"), så er $\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} \approx f'(x_o)$

Ved at gange på begge sider af $\approx$ med $x - x_o$ får vi, at

$$f(x) - f(x_o) \approx f'(x_o)\cdot(x-x_o) \quad \text{når } x \approx x_o$$

dvs.

$$f(x) \approx f'(x_o)\cdot(x-x_o)+f(x_o) \quad \text{når } x \approx x_o$$

Udtrykket på højre side af $\approx$ kan som ovenfor omskrives til $f'(x_o)\cdot x+(f(x_o)-f'(x_o)\cdot x_o)$, dvs. til et udtryk af formen: ax + b. Vi ser dermed, at når x er tæt på x_o, så antager funktionen f næsten de samme funktionsværdier som den lineære funktion t givet ved forskriften:

$$t(x) = f'(x_o)\cdot(x-x_o)+f(x_o)$$

eller

$$t(x) = f'(x_o)\cdot x+(f(x_o)-f'(x_o)\cdot x_o)$$

Grafen for t har hældningskoefficienten $f'(x_o)$, og da

$$t(x_o) = f'(x_o)\cdot x_o+(f(x_o)-f'(x_o)\cdot x_o) = f(x_o)$$

går grafen for t igennem punktet $(x_o , f(x_o))$ – som også ligger på grafen for f (se figur 4.12).
Vi ser altså, at

$$f(x) \approx t(x) \quad \text{når} \quad x \approx x_o$$

På baggrund af denne analyse angiver vi følgende definition:

Definition 4.14.

Lad f være en funktion, som er differentiabel i et punkt x_o.
Den linie, som har hældningskoefficienten $f'(x_o)$ og som går igennem punktet $(x_o , f(x_o))$, kaldes tangenten til grafen for f i punktet $(x_o , f(x_o))$.
Den tilsvarende lineære funktion t, som har forskriften:

$$t(x) = f'(x_o)\cdot(x-x_o)+f(x_o)$$

kaldes det approximerende førstegradspolynomium i x_o.

Udtrykt ved liniens ligning er tangenten givet ved:

$$y = f'(x_o)\cdot(x-x_o)+f(x_o)$$

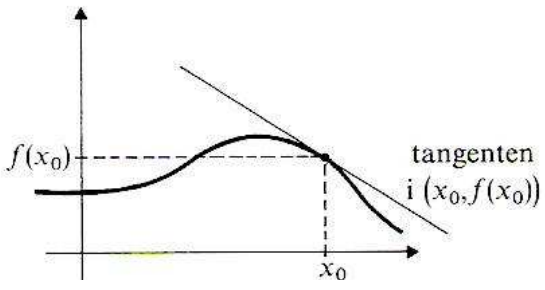


Fig. 4.12

Et førstegradspolynomium er en funktion med forskriften ax + b, og at approximere betyder at tilnærme (i dette tilfælde funktionsværdier for f), og begge dele passer netop på t(x).

Eksempel 4.15.
Lad os betragte funktionen $f(x) = x^2$. Vi har i øvelse 4.6 b) set, at f er differentiabel i alle $x_o \in R$, og at $f'(x_o) = 2x_o$. Vi vil nu finde en ligning for tangenten til grafen for f i punktet (2,4).
Ifølge definition 4.14 har vi ligningen: $y = f'(2)\cdot(x-2)+f(2)$,
og da der gælder:

$$y = f'(2)\cdot(x-2)+f(2) \quad \Leftrightarrow \quad y = 4\cdot(x-2)+4 \quad \Leftrightarrow \quad y = 4x-4$$

ser vi, at tangenten ligning er: $y = 4x - 4$ (se figur 4.13).

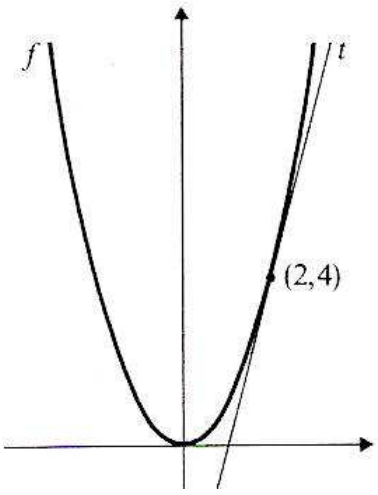


Fig. 4.13

Det approximerende førstegradspolynomium er altså: $t(x) = 4x - 4$
Da $f(x) \approx t(x)$, når x er tæt på 2, så har vi f.eks., at

$$f(2{,}015) \approx t(2{,}015) = 4\cdot 2{,}015 - 4 = 4{,}06.$$

4,06 kan altså bruges som en tilnærmet værdi for $(2{,}015)^2$.
(Faktisk gælder der, at $2{,}015^2 = 4{,}060225$). ♥

Øvelse 4.16.
Find en ligning for tangenten til grafen for funktionen $f(x) = x^2$ i punktet (–1, 1). ♥

Øvelse 4.17.
Betragt funktionen $h(x) = \sqrt{x}$. Bestem det approximerende førstegradspolynomium t for funktionen h i punktet 9 (jfr. eksempel 4.7).
Anvend t til at finde en tilnærmet værdi for $\sqrt{9{,}075}$. Sammenlign denne tilnærmede værdi med værdien af $\sqrt{9{,}075}$ fundet v.hj.a. en regnemaskine. ♥

Den praktiske anvendelse af approximationer ved hjælp af et approximerende førstegradspolynomium er efter regnemaskinernes fremkomst og generelle udbredelse stort set uden betydning.
Men den teoretiske betydning, herunder anvendelse i diverse modeller, af det approximerende førstegradspolynomium er ganske stor. (F.eks. spiller det en væsentlig rolle ved beskrivelse af pendulers svingning).

Afledede funktioner.

Vi har i eksempel 4.10 gjort rede for, at funktionen $f(x) = x^3$ er differentiabel i et vilkårligt punkt x_o, og at $f'(x_o) = 3x_o^2$. Vi kan derfor til et vilkårligt punkt x tilordne differentialkvotienten af f i punktet, hvorved vi får en funktion, som betegnes f', og som kaldes den afledede funktion af f (jfr. definitionen på en funktion).
Vi har altså i det ovenstående tilfælde, at funktionsforskriften for den afledede funktion f' er givet ved: $f'(x) = 3x^2$.

I almindelighed har vi, at hvis en funktion f er differentiabel i en mængde af punkter A, så er den afledede funktion $f'(x)$ defineret for alle $x \in A$. (Forskriften for f' fås ved at bestemme et generelt udtryk for differentialkvotienten $f'(x_o)$, og når dette udtryk er fundet, fjernes index'et o på x'et). Mængden A af punkter, hvor f er differentiabel, kaldes undertiden for differentiabilitetsmængden for f. En funktion, som er differentiabel i alle punkter i sin definitionsmængde, siges kort at være differentiabel.

På baggrund af eksempler og øvelser i det foregående kan vi opstille følgende tabel over nogle funktioner f og de tilhørende afledede funktioner f':

f(x)	k (konst.)	ax+b	$\sqrt{x}$	x^2	x^3	$\frac{1}{x}$
$f'(x)$	0	a	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	2x	$3x^2$	$-\frac{1}{x^2}$

For nemhed skyld vil vi ofte tillade os at skrive: $(x^3)' = 3x^2$ og $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$, og tilsvarende for andre funktioner.

Eksempel 4.18.
Hvis en bil kører ud af en vej, så vil afstanden s fra startpunktet være en funktion af den tid t, som er gået siden starten.
Differenskvotienten $\frac{s(t)-s(t_o)}{t-t_o}$ angiver bilens gennemsnitshastighed i tidsrummet fra t_o til t (eller fra t til t_o), medens differentialkvotienten $s'(t_o)$ angiver hastigheden til tiden t_o (dvs. $s'(t_o)$ angiver, hvad speedometeret viser til tiden t_o). (Jfr. indledningen til dette kapitel).
Den afledede funktion s' angiver altså hastigheden som funktion af tiden t. Ofte – specielt i fysik – skriver man v i stedet for s', altså: $v(t) = s'(t)$. (v står for det latinske ord "velocitas", som betyder hastighed eller fart).

Som bekendt vil hastigheden af en bil ofte ændres i løbet af en køretur – bl.a. afhængig af, hvilken pedal der trykkes på.
Hastigheden v er således en funktion af tiden (som også allerede angivet i betegnelsen v(t)).
Differenskvotienten $\frac{v(t)-v(t_o)}{t-t_o}$ angiver hastighedsændringen i tidsrummet fra t_o til t divideret med den tid, der er brugt til ændringen.
Differenskvotienten for v(t) angiver m.a.o. gennemsnitsaccelerationen i det givne tidsinterval. (Den angiver, hvor hurtigt hastigheden i gennemsnit ændres).
Differentialkvotienten $v'(t_o)$ angiver således, hvor stor en acceleration $a(t_o)$ bilen har til tidspunktet t_o.
Den afledede funktion v' angiver altså accelerationen a som funktion af tiden t.

Vi har altså nu: $a = v'$ og $v = s'$, og vi kan derfor skrive: $a = (s')'$, eller kort: $a = s''$.
s'' kaldes den dobbelt afledede eller den anden afledede af s.
Hvis afstanden s måles i meter (m) og tiden t i sekunder (s), så måles hastigheden i m/s, og dermed måles accelerationen a i (m/s)/s, hvilket skrives: m/s^2. (Læses: "Meter pr. sekund i anden"). ♥

Øvelse 4.19.
På nedenstående figur 4.14 ses grafen for en funktion s, som angiver afstanden fra startpunktet for en bil, som kører ud af en given vej (jfr. eksempel 4.18).

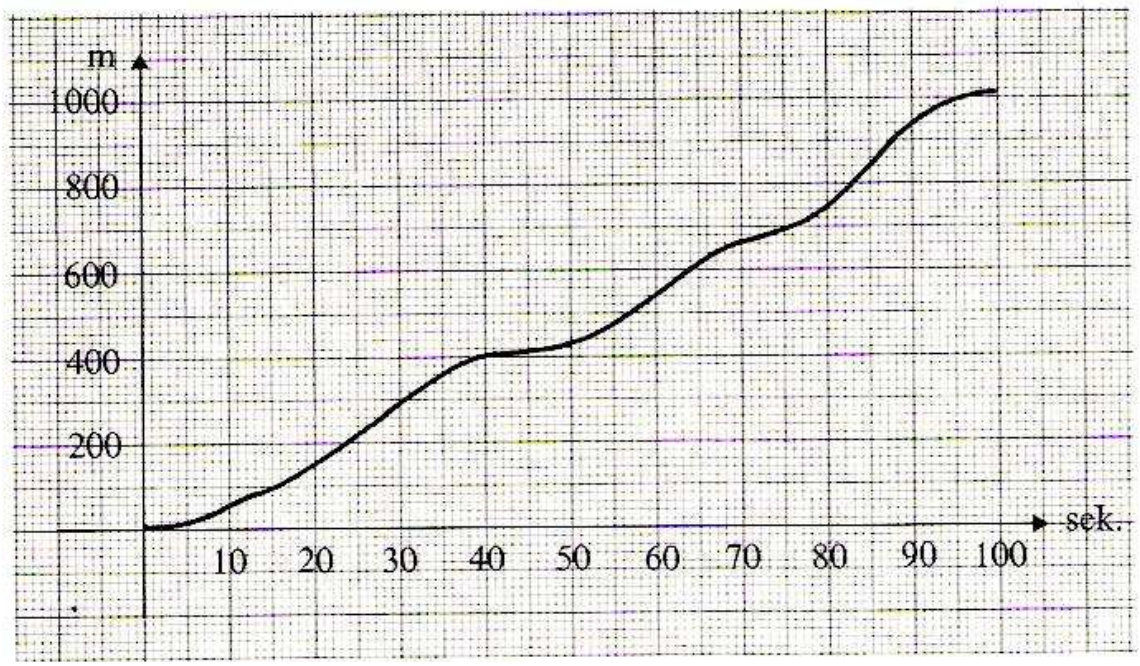


Fig. 4.14

a) Tegn på grundlag af figuren en skitse af hastigheden v som funktion af tiden.
b) Tegn desuden en skitse af accelerationen a som funktion af tiden.
Hvad sker der, når accelerationen er negativ ? ♥

Hvis den afledede funktion f' af en given funktion er differentiabel, så vil vi – som omtalt i eksempel 4.18 – skrive f'' i stedet for $(f')'$. f'' kaldes den dobbelt afledede eller den anden afledede af f.

Vi skal i det følgende kapitel vise, at funktionen $3x^2$ er differentiabel med differentialkvotienten 6x. I det ovenfor betragtede tilfælde: $f(x) = x^3$ og $f'(x) = 3x^2$ får vi således, at den anden afledede er givet ved: $f''(x) = 6x$. Vi vil her tillade os kort at skrive: $(x^3)'' = 6x$.

Øvelse 4.20.
Lad funktionen f være givet ved: $f(x) = x^2$. Angiv en forskrift for $f'(x)$ og for $f''(x)$. ♥

Kapitel 5: Regneregler for differentiation.

I dette kapitel vil vi se på differentiabilitet af og regler for differentiation af: en konstant gange en funktion, en sum af to funktioner, en differens af to funktioner, et produkt af to funktioner, en brøk af to funktioner, sammensætning af to funktioner og den omvendte af en given funktion.
I beviserne anvendes 3-trinsstrategien omtalt i kapitel 4 (side 35).

Differentiation af $f + g$, $f - g$, $k \cdot f$ og $f + k$.

Eksempel 5.1.

a) Betragt en stor beholder, hvor der er monteret to pumper A og B til opfyldning af beholderen. Hvis f(t) betegner væskerumfanget til tiden t, når pumpe A anvendes alene, så angiver $f'(t)$ påfyldningshastigheden til tiden t for pumpe A alene (jfr. indledningen til kapitel 4). Og hvis g(t) betegner væskerumfanget til tiden t, når pumpe B anvendes alene, så angiver $g'(t)$ påfyldningshastigheden til tiden t for pumpe B alene.
Hvis vi nu lader begge pumper virke på én gang, så er rumfanget h(t) som funktion af tiden givet ved: $h(t) = f(t) + g(t)$. Desuden er det klart, at den nye påfyldningshastighed er givet som summen af de to selvstændige påfyldningshastigheder $f'(t)$ og $g'(t)$. Vi har altså:
$h'(t) = f'(t) + g'(t)$. Men da $h(t) = f(t) + g(t)$ ser vi, at: $(f(t)+g(t))' = f'(t) + g'(t)$.

b) I beholderen fra ovenstående eksempel har vi 10.000 l vand. Vi tænker os nu, at den ene pumpe (A) pumper vand ind i beholderen, medens den anden pumpe (B) pumper vand ud.
Hvis f(t) angiver rumfanget til tiden t af vandet i beholderen, når pumpe A virker alene, og hvis g(t) angiver den vandmængde, som pumpe B har pumpet ud til tiden t, så er det faktisk forekommende rumfang h(t) til tiden t givet ved: $h(t) = f(t) - g(t)$.
Da $f'(t)$ angiver indpumpningshastigheden og $g'(t)$ udpumpningshastigheden til tiden t, så er rumfangets ændringshastighed $h'(t)$ givet ved: $h'(t) = f'(t) - g'(t)$.
Der gælder således, at: $(f(t)-g(t))' = f'(t) - g'(t)$.

c) Pumpe B i ovenstående eksempel b), (dvs. den pumpe, som pumper vand ud), er gået delvis i stykker og virker derfor kun med halv kraft. Den vandmængde u(t), som den defekte pumpe har pumpet ud til tiden t, er således givet ved: $u(t) = \frac{1}{2} g(t)$.
Dette sker naturligvis, fordi udpumpningshastigheden er faldet til det halve. Vi har således:
$u'(t) = \frac{1}{2} g'(t)$, dvs. $(\frac{1}{2} \cdot g(t))' = \frac{1}{2} \cdot g'(t)$. ♥

Inspireret af eksempel 5.1 kan vi opstille følgende sætning:

Sætning 5.2.
Lad f og g være to funktioner, som er differentiable i et punkt x_o, og lad k være en konstant.
Da er funktionerne $f + g$, $f - g$, $k \cdot f$ og $f + k$ differentiable i x_o med differentialkvotienterne:

a) $(f+g)'(x_o) = f'(x_o) + g'(x_o)$ b) $(f-g)'(x_o) = f'(x_o) - g'(x_o)$

c) $(k \cdot f)'(x_o) = k \cdot f'(x_o)$ c) $(f+k)'(x_o) = f'(x_o)$

Bevis:
Da f og g – samt den konstante funktion k – er defineret i en omegn om x_o, er funktionerne f + g, f – g, k·f og f + k også defineret i en omegn omkring x_o (overvej !).
Vi skal derfor blot opskrive og undersøge differenskvotienterne for de forskellige funktioner og via passende omskrivninger finde grænseværdierne heraf for x gående mod x_o.

Ad a): $\dfrac{(f+g)(x)-(f+g)(x_o)}{x-x_o} = \dfrac{f(x)+g(x)-f(x_o)-g(x_o)}{x-x_o} = \dfrac{f(x)-f(x_o)+g(x)-g(x_o)}{x-x_o}$

Den sidste brøk opdeles i to brøker, som giver differenskvotienten for hhv. f og g:

$$\frac{f(x)-f(x_o)+g(x)-g(x_o)}{x-x_o} = \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} + \frac{g(x)-g(x_o)}{x-x_o}$$

Da f og g er differentiable i x_o, har vi, at

$$\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} \to f'(x_o) \quad \text{for} \quad x \to x_o$$

og

$$\frac{g(x)-g(x_o)}{x-x_o} \to g'(x_o) \quad \text{for} \quad x \to x_o$$

Vi ser således, at

$$\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_o)}{x-x_o} \to f'(x_o)+g'(x_o) \quad \text{for} \quad x \to x_o$$

Vi har dermed bevist, at f + g er differentiabel i x_o, og at $(f+g)'(x_o) = f'(x_o)+g'(x_o)$.

Ad b): Beviset føres som for a), idet nogle +'er udskiftes med nogle –'er, og omvendt. Detaljerne i beviset overlades til læseren som en øvelse.

Ad c): $\dfrac{(k\cdot f)(x)-(k\cdot f)(x_o)}{x-x_o} = \dfrac{k\cdot f(x)-k\cdot f(x_o)}{x-x_o} = k\cdot\dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$

Da f er differentiabel i x_o har vi, at: $\dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} \to f'(x_o)$ for $x \to x_o$, hvoraf vi ser, at k·f er differentiabel i x_o, og at: $(k\cdot f)'(x_o) = k\cdot f'(x_o)$.

Ad d): Denne regel, der siger, at en konstant lagt til en given funktion ikke ændrer på differentialkvotienten, er indeholdt i a), idet vi blot kan sætte g(x) = k for alle x. Vi får da, at $g'(x_o) = 0$.
Hermed er sætning 5.2 bevist. ♥

Eksempel 5.3.

Hvis $h(x) = 2x^3 + \dfrac{4}{x} - 2$, så får vi ifølge sætning 5.2, at:

$$h'(x) = (2x^3)' + \left(\frac{4}{x}\right)' - (2)' = 2\cdot(x^3)' + 4\cdot\left(\frac{1}{x}\right)' = 2\cdot 3x^2 + 4\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 6x^2 - \frac{4}{x^2}$$ ♥

Øvelse 5.4.
Find differentialkvotienterne af følgende funktioner:
a) $f(x) = x^3 - 3x + 1$
b) $g(x) = 4\sqrt{x} - \frac{1}{2x}$
c) $h(x) = ax^2 + bx + c$, hvor a, b og c er konstanter. ♥

Øvelse 5.5.
Skitsér grafen for funktionen: $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 4$. Bemærk, at da f er differentiabel, skal kurven være "glat" uden "knæk").
Find ligningerne for de tangenter til grafen for f, som går igennem punkterne: (1, f(1)), (–2, f(–2)) og (3, f(3)).
Indtegn tangenterne på figuren – og kommentér resultatet. ♥

Differentiation af produkt og brøk af funktioner.

Vedrørende differentiation af et produkt af funktioner gælder der følgende sætning:

Sætning 5.6.
Hvis f og g er to funktioner, der er differentiable i x_o, så er $f \cdot g$ differentiabel i x_o, og

$$(f \cdot g)'(x_o) = f'(x_o) \cdot g(x_o) + f(x_o) \cdot g'(x_o)$$

Bevis:
Da f og g hver for sig er differentiable i x_o, er de begge defineret i en omegn om x_o. Dermed er $f \cdot g$ også defineret i en omegn om x_o.
Vi skal derfor blot opskrive og undersøge differenskvotienten for $f \cdot g$ og via passende omskrivninger finde grænseværdien heraf for x gående mod x_o. Vi har:

$$\frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(x_o)}{x - x_o} = \frac{f(x) \cdot g(x) - f(x_o) \cdot g(x_o)}{x - x_o}$$

Vi indskyder nu leddet $f(x) \cdot g(x_o)$ i tælleren, idet leddet dels trækkes fra, dels lægges til igen (svarende til, at vi lægger 0 til i tælleren – og det ændrer ikke værdien af brøken). Vi får:

$$\frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(x_o)}{x - x_o} = \frac{f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x_o) + f(x) \cdot g(x_o) - f(x_o) \cdot g(x_o)}{x - x_o}$$

Den sidste brøk kan omskrives ved at sætte f(x) udenfor en parentes i de to første led i tælleren, sætte $g(x_o)$ udenfor en parentes i de to sidste led i tælleren og derefter opdele brøken i to brøker:

$$\frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(x_o)}{x - x_o} = \frac{f(x) \cdot (g(x) - g(x_o))}{x - x_o} + \frac{(f(x) - f(x_o)) \cdot g(x_o)}{x - x_o}$$

Ved at flytte f(x) hhv. $g(x_o)$ ned ved siden af brøken får vi endelig, at:

$$\frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(x_o)}{x - x_o} = f(x) \cdot \frac{g(x) - g(x_o)}{x - x_o} + \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} \cdot g(x_o)$$

Da f og g er differentiable i x_o har vi, at

$$\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} \to f'(x_o) \text{ for } x \to x_o \quad \text{og} \quad \frac{g(x)-g(x_o)}{x-x_o} \to g'(x_o) \text{ for } x \to x_o$$

Ifølge sætning 4.12 har vi desuden, at f er kontinuert i x_o, hvormed vi ser, at:

$$f(x) \to f(x_o) \text{ for } x \to x_o$$

Da $g(x_o)$ er en konstant, får vi alt i alt, at:

$$\frac{(f\cdot g)(x)-(f\cdot g)(x_o)}{x-x_o} \to f(x_o)\cdot g'(x_o)+f'(x_o)\cdot g(x_o) \quad \text{for} \quad x \to x_o$$

Vi ser hermed, at f·g er differentiabel i x_o, samt at $(f\cdot g)'(x_o) = f(x_o)\cdot g'(x_o)+f'(x_o)\cdot g(x_o)$

Da $f(x_o)\cdot g'(x_o)+f'(x_o)\cdot g(x_o) = f'(x_o)\cdot g(x_o)+f(x_o)\cdot g'(x_o)$ er sætningen hermed bevist. ♥

Det er begrænset, hvor mange forskellige, relevante eksempler og øvelser der kan angives på differentiation af et produkt på nuværende tidspunkt i teksten, hvor vi dels endnu ikke kan differentiere sammensatte funktioner, dels ikke kan bruge mere interessante funktioner som x^n, logaritme-, eksponential-, potens- og trigonometriske funktioner. Men her er lidt. Se desuden i opgavesamlingen.

Eksempel 5.7.

Vi vil bestemme differentialkvotienten (den afledede funktion) af funktionen: $h(x) = 8x^3(x^2+x)$

Hvis vi sætter $f(x) = 8x^3$ og $g(x) = x^2 + x$, så får vi ifølge sætning 5.6, at

$$h'(x) = (8x^3)'\cdot(x^2+x)+8x^3\cdot(x^2+x)' = 24x^2\cdot(x^2+x)+8x^3\cdot(2x+1) = 40x^4+32x^3$$

dvs. $h'(x) = 40x^4+32x^3$. ♥

Øvelse 5.8.

Find differentialkvotienten af følgende funktioner:

a) $x\sqrt{x}$ b) $(\sqrt{x}+3)\cdot(7+\frac{1}{x})$ c) $2x^2(5x^3-19x^2)$ ♥

Øvelse 5.9.

Om tre funktioner f, g og h gælder, at de er differentiable i x_o. Find en formel for $(f\cdot g\cdot h)'(x_o)$ ♥

Vedrørende differentiation af en brøk af to funktioner gælder der følgende sætning:

Sætning 5.10.

Hvis f og g er to funktioner, der er differentiable i x_o, og hvis $g(x_o) \neq 0$, så er $\frac{f}{g}$ differentiabel i x_o,

og

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_o) = \frac{f'(x_o)\cdot g(x_o)-f(x_o)\cdot g'(x_o)}{(g(x_o))^2}$$

Bevis:

Vi skal først argumentere for, at $\frac{f}{g}$ er defineret i en omegn om x_o.

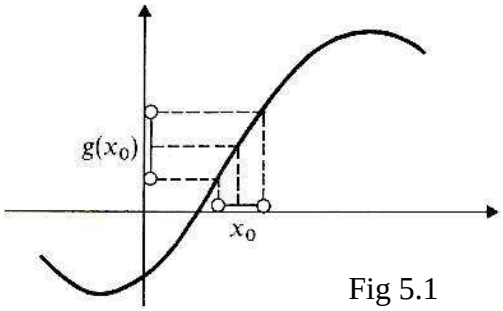


Fig 5.1

Da $g(x_o) \neq 0$, har vi enten, at $g(x_o) > 0$ eller $g(x_o) < 0$.
Lad os antage, at $g(x_o) > 0$. (Hvis $g(x_o) < 0$, forløber argumentet på tilsvarende måde !).
Da g er differentiabel i x_o, er g også kontinuert i x_o, hvormed der gælder, at: $g(x) \to g(x_o)$ for $x \to x_o$.
Da $g(x_o) > 0$ får vi hermed ifølge sætning 2.19 , at der findes en omegn $\omega(x_o)$ om x_o, så (se figur 5.1)

$$x \in \omega(x_o) \Rightarrow g(x) > 0.$$

Dette betyder specielt, at der findes en omegn $\omega(x_o)$, så g er defineret i denne omegn og så $g(x) \neq 0$ for alle x i denne omegn. Da f er differentiabel i x_o, er f defineret i en omegn om x_o.
I alt får vi dermed, at funktionen $\frac{f}{g}$ er defineret i en omegn om x_o (overvej !).

Vi skal derfor blot opskrive og undersøge differenskvotienten

$$\frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x)-\left(\frac{f}{g}\right)(x_o)}{x-x_o}$$

for $\frac{f}{g}$ og via passende omskrivninger finde grænseværdierne heraf for x gående mod x_o.

Tælleren i differenskvotienten omskrives på følgende måde:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)-\left(\frac{f}{g}\right)(x_o) = \frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(x_o)}{g(x_o)} = \frac{f(x)\cdot g(x_o)-f(x_o)\cdot g(x)}{g(x)\cdot g(x_o)} =$$

$$\frac{f(x)\cdot g(x_o)-f(x_o)\cdot g(x_o)-f(x_o)\cdot g(x)+f(x_o)\cdot g(x_o)}{g(x)\cdot g(x_o)} =$$

$$\frac{(f(x)-f(x_o))\cdot g(x_o)-f(x_o)\cdot(g(x)-g(x_o))}{g(x)\cdot g(x_o)}$$

hvor vi undervejs har "indskudt" leddet: $-f(x_o)\cdot g(x_o)+f(x_o)\cdot g(x_o)$, som er lig med 0, samt sat $g(x_o)$ hhv. $-f(x_o)$ (bemærk –'et !) udenfor parenteser.

Differenskvotienten fremkommer nu ved at dividere det fundne udtryk med $x - x_o$. Da man dividerer en brøk med et tal ved at gange med tallet i nævneren, er differenskvotienten altså lig med:

$$\frac{(f(x)-f(x_o))\cdot g(x_o)-f(x_o)\cdot(g(x)-g(x_o))}{g(x)\cdot g(x_o)\cdot(x-x_o)}$$

Ved anvendelse af regneregler for brøker kan denne differenskvotient omformes til (kontrollér !):

$$\frac{\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}\cdot g(x_o)-f(x_o)\cdot\frac{g(x)-g(x_o)}{x-x_o}}{g(x)\cdot g(x_o)}$$

Da f og g er differentiable i x_o har vi, at

$$\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} \to f'(x_o) \text{ for } x \to x_o \qquad \text{og} \qquad \frac{g(x)-g(x_o)}{x-x_o} \to g'(x_o) \text{ for } x \to x_o$$

Da vi desuden har, at: $g(x) \to g(x_o)$ for $x \to x_o$ (idet g er differentiabel og dermed kontinuert i x_o), ser vi alt, at differenskvotienten går imod $\frac{f'(x_o)\cdot g(x_o)-f(x_o)\cdot g'(x_o)}{(g(x_o))^2}$ for x gående mod x_o.

Hermed er det ønskede bevist. ♥

Øvelse 5.11.

Vis v.hj.a. sætning 5.10, at funktionen $\frac{1}{x}$ er differentiabel, og at $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ ♥

Øvelse 5.12.

Find differentialkvotienterne (de aflede funktioner) for hver af følgende funktioner (reducér mest muligt):

a) $h(x) = \frac{x^2-x}{1+x^2}$ b) $h(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$ c) $h(x) = \frac{2x+3}{x\sqrt{x}}$ ♥

Vi har tidligere set, at $(x^3)' = 3x^2$, $(x^2)' = 2x$ og $(x)' = 1$. Desuden ved vi, at $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$, og da $\frac{1}{x} = x^{-1}$ og $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$ kan denne sidste regel skrives: $(x^{-1})' = -x^{-2}$.

Det ser således ud til, at der gælder følgende sætning:

Sætning 5.13.

For alle $n \in Z$ gælder der, at funktionen x^n er differentiabel, og at $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$

Bevis:

For $x \neq 0$ har vi, at $x^0 = 1$, og da $(1)' = 0$, ser vi, at $(x^0)' = 0 = 0 \cdot x^{-1}$, hvormed sætningen gælder for n = 0.

Idet vi allerede har vist sætningen for n = 1, n = 2 og n = 3, vil vi se på n = 4.

Da $x^4 = x^3 \cdot x$ får vi ifølge sætning 5.6, at x^4 er differentiabel, og at

$$(x^4)' = (x^3)' \cdot x + x^3 \cdot (x)' = 3x^2 \cdot x + x^3 \cdot 1 = 3x^3 + x^3 = 4x^3$$

Tilsvarende ses, at da $x^5 = x^4 \cdot x$, så er x^5 differentiabel, og

$$(x^5)' = (x^4)' \cdot x + x^4 \cdot (x)' = 4x^3 \cdot x + x^4 \cdot 1 = 4x^4 + x^4 = 5x^4$$

Således kan vi fortsætte med $x^6 = x^5 \cdot x$, $x^7 = x^6 \cdot x$, osv. osv.
Hermed har vi indset, at sætningen gælder for alle $n \geq 0$.

Betragt nu funktionen x^{-n}, hvor n er et positivt tal (hvormed –n er et negativt tal).
Vi har da, at $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$, hvormed vi ifølge det ovenstående samt sætning 5.10 får, at x^{-n} er differentiabel, og at

$$(x^{-n})' = \left(\frac{1}{x^n}\right)' = \frac{(1)' \cdot x^n - 1 \cdot (x^n)'}{(x^n)^2} = \frac{0 \cdot x^n - n \cdot x^{n-1}}{x^{2n}} = -n \cdot \frac{x^{n-1}}{x^{2n}} = -n \cdot x^{n-1-2n} = -n \cdot x^{-n-1}$$

Hermed er sætning 5.13 bevist. ♥

Øvelse 5.14.
Find differentialkvotienterne af følgende funktioner:

a) $f(x) = 9x^{17} - 3x^6 + 8x^4 - 81$ b) $g(x) = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{6x^6}$ ♥

Differentiation af sammensatte funktioner.

Vi vil nu vende os mod differentiabilitet (og differentiation) af sammensatte funktioner.

Sætning 5.15.
Hvis g er differentiabel i x_o og f er differentiabel i $g(x_o)$, så er $f \circ g$ differentiabel i x_o, og der gælder følgende regel:

$$(f \circ g)'(x_o) = f'(g(x_o)) \cdot g'(x_o)$$

Bevis:
Vi bemærker først, at da f er differentiabel i $g(x_o)$, er f defineret i en omegn omkring $g(x_o)$ og dermed specielt i $g(x_o)$ selv, hvormed det er muligt at definere den sammensatte funktion $f \circ g$.
Da det gælder, at hvis en funktion er differentiabel i et punkt, så er den også kontinuert i dette punkt, får vi ifølge sætning 3.24 og beviset herfor, at der findes en omegn $\omega(x_o)$, hvor $f \circ g$ er defineret. I de følgende betragtninger forudsættes, at $x \in \omega(x_o)$.

Vi vil gerne bevise, at differenskvotienten: $\frac{(f \circ g)(x) - (f \circ g)(x_o)}{x - x_o} = \frac{f(g(x)) - f(g(x_o))}{x - x_o}$ har en grænseværdi for x gående mod x_o og at denne grænseværdi er: $f'(g(x_o)) \cdot g'(x_o)$.
Vi omskriver differenskvotienten på følgende måde (svarende til, at vi ganger den med 1 !):

$$\frac{f(g(x)) - f(g(x_o))}{x - x_o} = \frac{f(g(x)) - f(g(x_o))}{x - x_o} \cdot \frac{g(x) - g(x_o)}{g(x) - g(x_o)} = \frac{f(g(x)) - f(g(x_o))}{g(x) - g(x_o)} \cdot \frac{g(x) - g(x_o)}{x - x_o}$$

Hvis vi sætter $y = g(x)$ og $y_o = g(x_o)$ så får vi, idet g er kontinuert i x_o, at: $y \to y_o$ for $x \to x_o$. Kombineres dette med, at g er differentiabel i x_o og f er differentiabel i $y_o = g(x_o)$, så får vi:

$$\frac{f(g(x)) - f(g(x_o))}{x - x_o} = \frac{f(y) - f(y_o)}{y - y_o} \cdot \frac{g(x) - g(x_o)}{x - x_o} \to f'(y_o) \cdot g'(x_o) \quad \text{for } x \to x_o$$

hvormed det ønskede tilsyneladende er bevist. Problemet er bare, at dette bevis forudsætter, at der findes en omegn $\omega_1(x_o)$, hvorom der gælder: $x \in \omega_1(x_o) \Rightarrow g(x) \neq g(x_o)$, idet vi ellers kommer til at dividere med 0 i omskrivningen ovenfor. De fleste af de funktioner, vi normalt ser på, opfylder ganske vist det ønskede, men hvis g f.eks. er konstant i en omegn om x_o, så kan beviset ikke bruges. Hvis g er konstant i en omegn omkring x_o er det imidlertid let at se, at differenskvotienten for $f \circ g$ er 0 i denne omegn, hvormed dens grænseværdi giver 0. Da der samtidig gælder, at $g'(x_o) = 0$, er såvel differentiabiliteten som formlen også gældende her. Der findes imidlertid funktioner, som ikke er konstante, og som ikke opfylder det nævnte krav til beviset. For at dække sådanne tilfælde, skal beviset "skrues sammen" på en noget anden måde end vist ovenfor. Interesserede læsere henvises til nedenstående eksempel 5.18, hvor der gives et generelt bevis. ♥

Eksempel 5.16.

Vi vil finde differentialkvotienten for funktionerne: $F(x) = \sqrt{x^3 + 2x}$ og $H(x) = (\sqrt{x + \frac{1}{x}})^5$

Vi ser, at F er sammensat af funktionerne: $f(x) = \sqrt{x}$ og $g(x) = x^3 + 2x$. Ifølge sætning 5.15 har vi, at: $F'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{g(x)}} \cdot (3x^2 + 2) = \frac{1}{2\sqrt{x^3 + 2x}} \cdot (3x^2 + 2)$.

Bemærk, at F altså differentieres "udefra og indad", idet vi først differentierer $\sqrt{\ }$ i punktet "et eller andet", og det giver 1 divideret med 2 gange $\sqrt{\ }$ af "et eller andet". Og bagefter differentierer vi det der står under kvadratrodstegnet (det som før blev benævnt "et eller andet") og ganger resultaterne sammen. Dette kan kort skrives således: $(\sqrt{x^3 + 2x})' = \frac{1}{2\sqrt{x^3 + 2x}} \cdot (3x^2 + 2)$.

Hvis vi ønsker værdien af F' i et tal, indsættes tallet på x's plads, altså f.eks. $F'(4) = \frac{50}{2\sqrt{72}} = 2{,}946$.

Vi bemærker, at H er sammensat af tre funktioner, men dette kan opfattes som om H er sammensat af to funktioner, hvoraf den ene så selv er sammensat af to funktioner. Når vi skal finde H'(x) anvendes derfor samme filosofi, dvs. vi differentierer udefra og indefter og får dermed:

$$H'(x) = 5(\sqrt{x + \tfrac{1}{x}})^4 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x + \frac{1}{x}}} \cdot (1 - \frac{1}{x^2})$$

Vi differentierer altså "et eller andet" i 5. og får 5 gange "et eller andet" i 4., derefter differentierer vi $\sqrt{\ }$ osv. osv. ♥

Øvelse 5.17.

Bestem h'(x) og derefter h'(2) for hver af følgende funktioner:

a) $h(x) = (2x - 3)^9$ b) $h(x) = \sqrt{(0{,}3x + 1)^7}$ c) $h(x) = \sqrt{12 - x^3} \cdot (x^2 + 4x)^4$ ♥

Eksempel 5.18.
Som omtalt er der problemer med beviset for sætning 5.15, hvis der ikke findes en omegn $\omega_1(x_o)$, hvorom det gælder, at: $x \in \omega_1(x_o) \Rightarrow g(x) \neq g(x_o)$. Spørgsmålet er altså, om der findes funktioner g, som opfylder det modsatte, dvs.: For enhver omegn om x_o findes der et x indeholdt i denne omegn, så $g(x) = g(x_o)$. Og svaret på dette spørgsmål er: Ja. Uden at gå dybere ind i sagen kan det bemærkes, at f.eks. $g(x) = (x - x_o)^2 \sin(\frac{1}{x - x_o})$ (for $x \neq x_o$ og $g(x_o) = 0$) opfylder dette og er desuden differentiabel i x_o (Prøv at opskrive differenskvotienten og find grænseværdien $g'(x_o) = 0$).
Her følger et lidt mere kompliceret bevis for sætning 5.15, hvor det nævnte problem er elimineret:

Vi sætter $y_o = g(x_o)$. Da f er differentiabel i y_o, er f defineret i en omegn $\omega(y_o)$. Der findes derfor en omegn $\omega_1(0)$ om 0 med samme radius som $\omega(y_o)$, hvor vi for hvert $s \in \omega_1(0)$ kan definere $\Delta f(s) = f(y_o + s) - f(y_o)$ og dermed definere: $T(s) = \frac{\Delta f(s)}{s} - f'(y_o)$ (for $s \neq 0$) og $T(0) = 0$.

Da f er differentiabel i y_o har vi, at $\frac{\Delta f(s)}{s} \to f'(y_o)$ for $s \to 0$, og dermed, at $T(s) \to 0$ for $s \to 0$.

Ifølge definitionen af T har vi for alle $s \in \omega_1(0)$, at: $f(y_o + s) - f(y_o) = \Delta f(s) = (f'(y_o) + T(s)) \cdot s$

Da g er differentiabel i x_o, findes der en omegn $\omega_2(0)$, hvor vi for hvert $h \in \omega_2(0)$ kan definere: $\Delta g(h) = g(x_o + h) - g(x_o)$, og dermed får vi for $h \in \omega_2(0)$, at: $g(x_o + h) = g(x_o) + \Delta g(h)$
Da $\Delta g(h) \to 0$ for $h \to 0$ (idet g er differentiabel og dermed kontinuert i x_o) gælder der specielt, at der findes en omegn $\omega_3(0)$, så: $h \in \omega_3(0) \Rightarrow \Delta g(h) \in \omega_1(0)$. Lad $\omega(0) = \omega_2(0) \cap \omega_3(0)$.
Lad $F = f \circ g$. Vi skal undersøge differenskvotienten for F, og vi ser først på tælleren $\Delta F(h)$.
For $h \in \omega(0)$ gælder der: $\Delta F(h) = F(x_o + h) - F(x_o) = f(g(x_o + h)) - f(g(x_o))$, og da $g(x_o + h) = g(x_o) + \Delta g(h)$ ser vi (idet $g(x_o) = y_o$), at: $\Delta F(h) = f(y_o + \Delta g(h)) - f(y_o)$ for $h \in \omega(0)$.

Hvis vi derfor i det ovenstående erstatter s med $\Delta g(h)$, så får vi for $h \in \omega(0)$, at:
$\Delta F(h) = f(y_o + \Delta g(h)) - f(y_o) = (f'(y_o) + T(\Delta g(h))) \cdot \Delta g(h)$. For $h \in \omega(0)$ gælder derfor alt i alt, at:

$$\frac{\Delta F(h)}{h} = \frac{(f'(y_o) + T(\Delta g(h))) \cdot \Delta g(h)}{h} = (f'(y_o) + T(\Delta g(h))) \cdot \frac{\Delta g(h)}{h}.$$

Da $T(\Delta g(h)) \to 0$ for $h \to 0$ og $\frac{\Delta g(h)}{h} \to g'(x_o)$ for $h \to 0$ ser vi, at: $\frac{\Delta F(h)}{h} \to f'(y_o) \cdot g'(x_o)$ for $h \to 0$, hvormed det ønskede er bevist. ♥

Eksempel 5.19.
En 10 m lang bjælke står op ad en mur som vist på figur 5.2 (se øverst næste side).

Afstanden fra muren ud til stangens røringspunkt B kaldes x, medens toppen af stangen A når h meter op ad muren.
Vi vil undersøge spørgsmålet: Med hvilken hastighed v vil A bevæge sig ned af muren, hvis B trækkes udad med en hastighed på 0,5 m/s ?
For at løse dette problem bemærker vi først, at x er en funktion af tiden t, og at $x'(t) = 0{,}5$ m/s.

Ifølge Pythagoras har vi, at $x^2 + h^2 = 10^2$, hvilket giver: $h = \sqrt{100 - x^2}$. Vi ser således, at h er en funktion af x, der som nævnt er en funktion af t, dvs. $h = h(x(t))$.
Når vi skal finde den omtalte hastighed v, skal vi differentiere h mht. tiden. Vi ser således, at

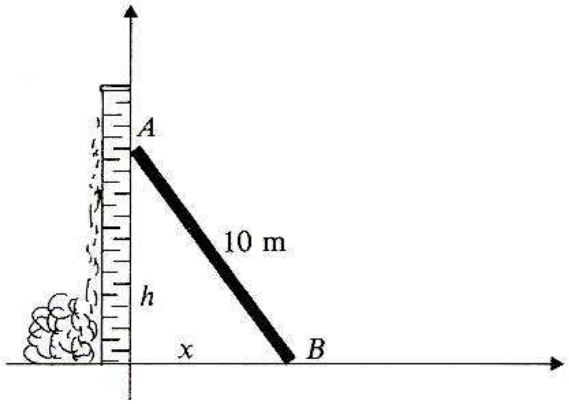


Fig. 5.2

$$v = (h(x(t)))' = h'(x(t)) \cdot x'(t) = \frac{1}{2\sqrt{100 - x^2}} \cdot (-2x) \cdot x'(t) = -\frac{x \cdot 0,5}{\sqrt{100 - x^2}}$$

Der gælder altså dels, at den søgte hastighed er negativ, (hvilket skyldes, at h bliver mindre), dels at hastigheden afhænger af x.
Hvis x = 3 m, så er

$$v(3) = -\frac{3 \cdot 0,5}{\sqrt{100 - 3^2}} = -0,157$$

dvs. v(3) = – 0,157 m/s
Tilsvarende ses, at

$$v(6) = -\frac{6 \cdot 0,5}{\sqrt{100 - 6^2}} = -0,375$$

altså v(6) = – 0,375 m/s. ♥

Øvelse 5.20.
I en grusgrav føres sand ved hjælp af et transportbånd hen til toppen af en bunke sand, der har form som en kegle (se figur 5.3).

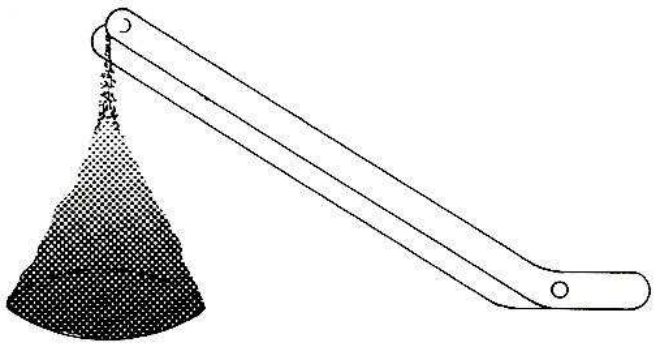


Fig. 5.3

Vi antager for simpelheds skyld, at sandet falder på plads på en sådan måde, at diameteren i grundfladen hele tiden er lig med højden af bunken.

a) Gør rede for, at rumfanget R som funktion af højden h er givet ved: $R(h) = \frac{1}{12}\pi \cdot h^3$
(Rumfanget af en kegle er $\frac{1}{3}Gh$, hvor G er grundfladens areal).

b) Find den hastighed, hvormed rumfanget ændres (dvs. den hastighed, hvormed sandet hældes på) når højden er 11 m, hvis h på dette tidspunkt forøges med $\frac{1}{2}$ m pr. time.
(Vejledning: R er en funktion af tiden, idet h er en funktion af tiden, dvs. R = R(h(t)). ♥

Differentiation af omvendte funktioner.

Vi vil nu til sidst vende os mod differentiabilitet (og differentiation) af omvendte funktioner.
Vi starter med at se på et eksempel.

Eksempel 5.21.
Betragt funktionen $f(x) = x^2$, $x > 0$.
f er injektiv og $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$, $y > 0$, og der gælder, at: $x^2 = y$ eller $x = \sqrt{y}$.
Da $\left(\sqrt{y}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{y}}$ og $\left(x^2\right)' = 2x$ får vi hermed, at:

$$(f^{-1})'(y) = \left(\sqrt{y}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{2x} = \frac{1}{(x^2)'} = \frac{1}{f'(x)}$$

Lad x_o og y_o være valgt, så $f(x_o) = y_o$ og $x_o = f^{-1}(y_o)$ (dvs. $x_o^2 = y_o$ eller $x_o = \sqrt{y_o}$).
Ifølge det netop viste gælder da, at:

$$(f^{-1})'(y_o) = \frac{1}{f'(x_o)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_o))}$$

Hvis vi f.eks. vil finde: $(f^{-1})'(9)$, så kan dette beregnes som:

$$(f^{-1})'(9) = \frac{1}{f'(f^{-1}(9))} = \frac{1}{f'(\sqrt{9})} = \frac{1}{f'(3)} = \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{1}{6}$$

hvilket stemmer fint overens med, at kvadratrodsfunktionens differentialkvotient i tallet 9 er $\frac{1}{6}$. ♥

Inspireret af eksempel 5.21 vil vi opstille og bevise følgende sætning:

Sætning 5.22.

Lad f være en funktion, som er monoton og kontinuert i et interval I.
Hvis f er differentiabel i et punkt $x_o \in I$, og hvis $f'(x_o) \neq 0$, så er f^{-1} differentiabel i $y_o = f(x_o)$, og der gælder, at

$$(f^{-1})'(y_o) = \frac{1}{f'(x_o)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_o))}$$

Bevis:

Ifølge sætning 3.27 a) findes der en omegn $\omega(y_o)$ om y_o , hvor f^{-1} er defineret ($\omega(y_o) \subseteq Vm(f)$).
Vi ser nu på differenskvotienten for funktionen f^{-1} med udgangspunkt i y_o, og vi vælger i det følgende kun $y \in \omega(y_o)$, hvormed der findes tilsvarende $x \in I$, så $f(x) = y$.
Da f er monoton, er f^{-1} også monoton (jfr. sætning A.3.20), hvormed $y \neq y_o$ giver os, at $f^{-1}(y) \neq f^{-1}(y_o)$, og dermed: $f^{-1}(y) - f^{-1}(y_o) \neq 0$.
Vi kan derfor tillade os at foretage følgende omskrivning:

$$\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_o)}{y-y_o} = \frac{1}{\frac{y-y_o}{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_o)}} = \frac{1}{\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}}$$

Vi skal undersøge, om differenskvotienten for f^{-1} har en grænseværdi for $y \to y_o$, og i givet fald bestemme denne. Ifølge sætning 3.27 b) ved vi, at f^{-1} er kontinuert i y_o. Dette betyder, at:

$$y \to y_o \;\Rightarrow\; f^{-1}(y) \to f^{-1}(y_o) \;\Rightarrow\; x \to x_o$$

og da f er differentiabel i x_o får vi hermed, at: $\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} \to f'(x_o)$ for $y \to y_o$

Anvendes dette i den ovenstående omskrivning af differenskvotienten for f^{-1} ser vi alt i alt, at:

$$\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_o)}{y-y_o} \to \frac{1}{f'(x_o)} \quad \text{for } y \to y_o$$

hvor vi udnytter, at $f'(x_o) \neq 0$. Da $x_o = f^{-1}(y_o)$, er sætningen hermed bevist. ♥

Eksempel 5.23.

Sætning 5.22 kan også bevises på følgende måde:
Da f er differentiabel i x_o, har grafen for f en tangent i punktet (x_o , $f(x_o)$). Dermed har grafen for f^{-1} også en tangent i punktet (y_o , $f^{-1}(y_o)$), idet grafen for f^{-1} ifølge sætning A.3.18 fås ved at spejle grafen for f i linien y = x. Og sådan en spejling bevarer grafens geometriske egenskaber. (Se figur 5.4).
Idet tangenten i punktet (x_o , $f(x_o)$) kaldes *l* , ser vi, at *l* spejles over i en linie *m*, som er tangent til grafen for f^{-1} i punktet (y_o , $f^{-1}(y_o)$).
Da en linie af formen y = ax + b, a ≠ 0, spejles over i linien:

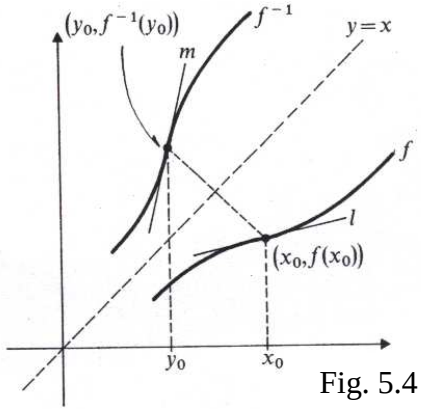


Fig. 5.4

$y = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$ (jfr. sætning A.3.15), og da hældningskoefficienten for *l* er $f'(x_o)$, ser vi, at hældningskoefficienten for *m* er lig med $\frac{1}{f'(x_o)}$. Men det vil netop sige, at f^{-1} er differentiabel i y_o med differentialkvotienten $\frac{1}{f'(x_o)}$. Hermed er sætningen igen bevist. ♥

Eksempel 5.24.

Udtrykket for differentialkvotienten af f^{-1} (men ikke differentiabiliteten af f^{-1}), kan bestemmes ud fra reglen om differentiation af sammensatte funktioner, idet vi ifølge sætning A.3.19 har, at: $y = (f \circ f^{-1})(y)$, og dermed: $1 = (f \circ f^{-1})'(y) = f'(f^{-1}(y)) \cdot (f^{-1})'(y)$. Ved indsættelse af y_o og x_o, og ved division med $f'(f^{-1}(y_o))$ (som er lig $f'(x_o)$) får vi udtrykket i sætning 5.22. ♥

Øvelse 5.25.

Find følgende differentialkvotienter uden først at finde en funktionsforskrift for f^{-1}, (men naturligvis skal $f^{-1}(y_o)$ bestemmes for at kunne finde svaret):

a) $(f^{-1})'(y_o)$, idet $f(x) = 2x + 1$ og $y_o = 3$

b) $(f^{-1})'(y_o)$, idet $f(x) = \sqrt{x+1}$ og $y_o = 1$ ♥

Øvelse 5.26.

Det oplyses, at funktionen $f(x) = \frac{1}{6}x^3 + 2x - 1$ er voksende.

a) Find f(0), f(1), f(–3) og f(6).

b) Find $(f^{-1})'(-11{,}5)$, $(f^{-1})'(-1)$ og $(f^{-1})'(47)$ ♥

Øvelse 5.27.

Betragt funktionen y = f(x) givet ved:

$$y = \frac{x}{1-x} \quad , \quad x > 1$$

Det oplyses, at f er voksende.

Bestem en forskrift for f^{-1}

Bestem en forskrift for funktionen $(f^{-1})'$

– dels ved direkte at differentiere funktionen f^{-1}

– dels ved at anvende formlen for $(f^{-1})'$ fra sætning 5.22.

Reducér mest muligt og konstater, at de to udtryk bliver ens. ♥

Kapitel 6:
Middelværdisætningen, monotoniforhold og optimering.

Vi starter med at undersøge funktionen f med følgende graf:

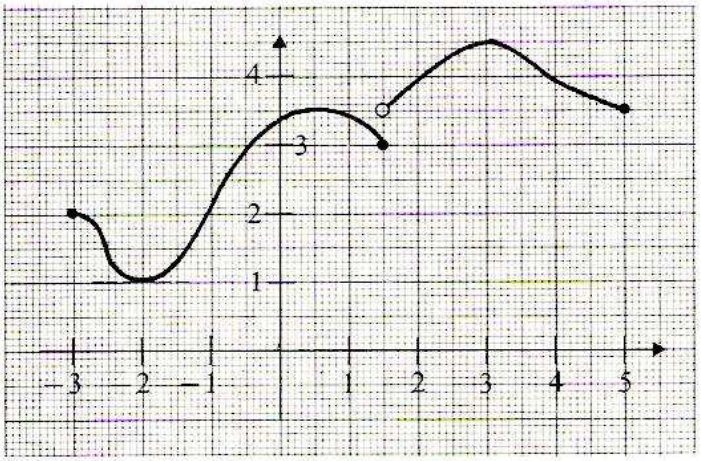


Fig. 6.1.

Denne funktion har lokalt minimum i –2, 1,5 og 5. Og den har lokalt maksimum i –3, 0,5 og 3 (jfr. Appendix 5 vedrørende lokale ekstrema).
Hvis vi prøver at betragte punktet –2, så ser vi, at tangenten til kurven her er vandret. dvs. at differentialkvotienten i –2 er lig med 0.
Tilsvarende har vi i de andre punkter, hvor f har lokalt extremum, og hvor f er differentiabel, at differentialkvotienten er 0. Der gælder således, at $f'(3) = 0$ og $f'(0{,}5) = 0$.
Derimod er f ikke differentiabel i de øvrige punkter, hvor f har lokalt extremum (dvs. –3, 1,5 og 5).

Det ser således ud til, at der gælder følgende sætning:

Sætning 6.1.

Hvis en funktion f er differentiabel i et punkt x_o, hvor f har lokalt extremum, så er $f'(x_o) = 0$.

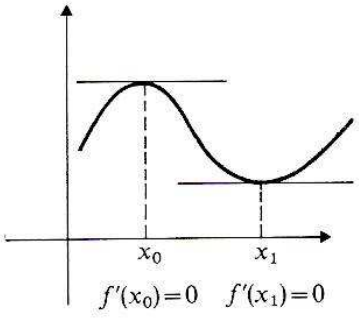


Fig. 6.2

Bevis:
Vi kan f.eks. antage, at f har lokalt minimum i x_o, idet beviset for lokalt maksimum forløber helt tilsvarende.
Da f har lokalt minimum i x_o, findes der ifølge definition A.5.1 en omegn $\omega_1(x_o)$ om x_o, så $f(x) \geq f(x_o)$ for alle $x \in \omega_1(x_o) \cap Dm(f)$.

Da f er differentiabel i x_o findes der ifølge definition 4.4 en omegn $\omega_2(x_o)$ om x_o, hvor f er defineret, dvs. $\omega_2(x_o) \subseteq Dm(f)$.
Hvis vi nu sætter $\omega(x_o) = \omega_1(x_o) \cap \omega_2(x_o)$, (dvs. $\omega(x_o)$ er den mindste af de to betragtede omegne), så har vi, at

$$f(x) \geq f(x_o) \quad \text{for alle} \quad x \in \omega(x_o)$$

og dermed, at

$$f(x) - f(x_o) \geq 0 \quad \text{for alle} \quad x \in \omega(x_o).$$

Lad os nu undersøge differenskvotienten $\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$, idet vi <u>kun</u> betragter $x \in \omega(x_o)$.

Hvis $x > x_o$ (og dermed $x - x_o > 0$), så har vi at

$$\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} \geq 0$$

Ifølge sætning 2.28 får vi da, at

$$\lim_{x \to x_o+} \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} \geq 0$$

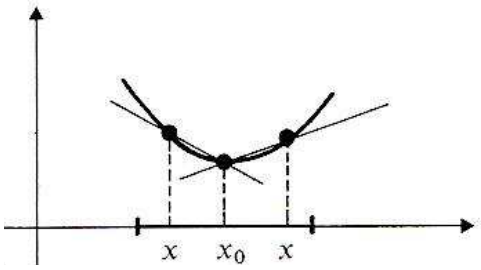


Fig. 6.3

Tilsvarende får vi, at hvis $x < x_o$, så er $\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} \leq 0$, hvormed vi ifølge sætning 2.28 ser, at

$$\lim_{x \to x_o-} \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} \leq 0$$

Da f er differentiabel i x_o, har vi, at

$$\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} \to f'(x_o) \text{ for } x \to x_o$$

hvilket ifølge sætning 2.25 a) giver os, at

$$f'(x_o) = \lim_{x \to x_o+} \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} \quad \text{og} \quad f'(x_o) = \lim_{x \to x_o-} \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$$

I alt ser vi således, at $f'(x_o) \geq 0$ og $f'(x_o) \leq 0$. Dette kan kun være tilfældet, når $f'(x_o) = 0$.
Hermed er sætningen bevist. ♥

I forbindelse med lokale extrema gælder der følgende sætning, hvis argument overlades til læseren:

<u>Sætning 6.2.</u>
Hvis en funktion f har lokalt extremum i et punkt x_o, så gælder en af følgende påstande:
a) x_o er ikke et indre punkt i Dm(f). (x_o er f.eks. et endepunkt for Dm(f))
b) x_o er et indre punkt i Dm(f), og f er ikke differentiabel i x_o
c) x_o er et indre punkt i Dm(f), f er differentiabel i x_o, og $f'(x_o) = 0$

Situationerne i sætning 6.2 er illustreret på figur 6.4 øverst på næste side.

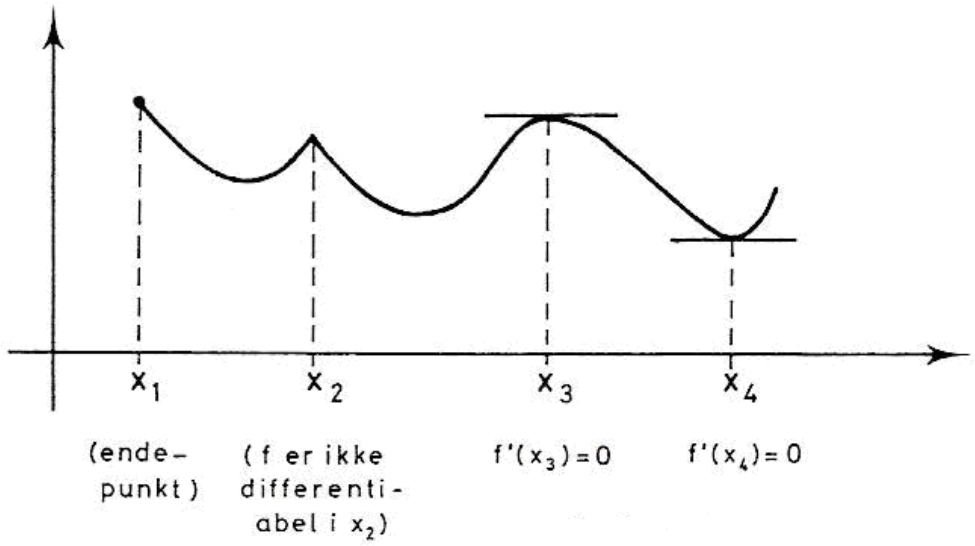


Fig. 6.4

Bemærk, at sætning 6.1 (og sætning 6.2 c)) siger, at hvis f har lokalt extremum i x_o, så er $f'(x_o) = 0$.
Man kan således ikke slutte, at f har lokalt extremum i x_o, blot fordi $f'(x_o) = 0$.
Hvis vi f.eks. betragter funktionen $f(x) = x^3 + 1$ (se figur 6.5), så er $f'(x) = 3x^2$, hvormed vi specielt har, at $f'(0) = 0$. Men f har ikke lokalt extremum i 0. Vi siger i sådanne tilfælde, at funktionen har (vandret) vendetangent i punktet.

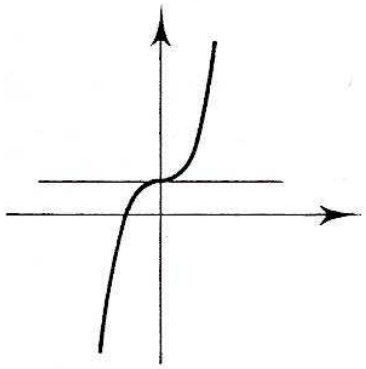


Fig. 6.5

Sætning 6.2 kan bl.a. benyttes til at bestemme værdimængden (og dermed maximum og minimum) for en bestemt slags funktioner, nemlig:
Hvis en funktion f er

a) defineret og kontinuert i et lukket, begrænset interval $[a;b]$
b) differentiabel i $]a;b[$, måske bortset fra i et endeligt antal punkter

så følger det af sætning 3.36, at Vm(f) er et interval, nemlig intervallet fra $\min f(x)$ til $\max f(x)$, dvs. Vm(f) = $[\min f(x); \max f(x)]$.
Da vi ved, at både minimum og maximum specielt er lokale extrema, kan vi ifølge sætning 6.2 bestemme disse størrelser ved at undersøge funktionsværdierne i følgende punkter:
1) endepunkterne a og b, 2) de punkter, hvor f ikke er differentiabel, og 3) de punkter, hvor $f'(x) = 0$.
Den største af disse funktionsværdier er da maximum, og den mindste er minimum.

Det skal bemærkes, at der i praksis oftest ikke forekommer punkter, hvor funktionen er defineret, men ikke er differentiabel. Men det følgende eksempel er konstrueret, så denne egenskab også inddrages i overvejelserne.

Eksempel 6.3.

Betragt funktionen

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 2 & , \ 0 \le x \le 3 \\ -x^2 + 8x - 11{,}5 & , \ 3 < x \le 5 \end{cases}$$

f er defineret i det lukkede, begrænsede interval $[0;5]$

Sæt $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 2$ og $h(x) = -x^2 + 8x - 11{,}5$. Da g og h er kontinuerte i hele R, har vi specielt, at g er kontinuert i $[0;3]$ og h er kontinuert i $]3;5]$.

Da

$$g(x) \to 3{,}5 \text{ for } x \to 3- \qquad \text{og} \qquad h(x) \to 3{,}5 \text{ for } x \to 3+$$

har vi ifølge sætning 3.13, at f er kontinuert i 3. Vi ser således i alt, at f er kontinuert i $[0;5]$.

f er differentiabel i alle punkter i Dm(f), bortset fra 0, 3 og 5.

For $x \in]0;3[$ har vi: $f'(x) = -x + 2$, og for $x \in]3;5[$ har vi: $f'(x) = -2x + 8$. Vi ser således, at $f'(x) = 0$, når $x = 2$ eller $x = 4$.

Vi skal derfor undersøge funktionsværdierne i punkterne 0, 2, 3, 4 og 5. Vi finder:

$$f(0) = 2, \quad f(2) = 4, \quad f(3) = 3{,}5, \quad f(4) = 4{,}5 \text{ og } f(5) = 3{,}5$$

hvoraf vi ser, at $\min f(x) = 2$ og $\max f(x) = 4{,}5$. Dermed får vi, at $Vm(f) = [2;\ 4{,}5]$

På den nedenstående figur 6.6 ses grafen for f.

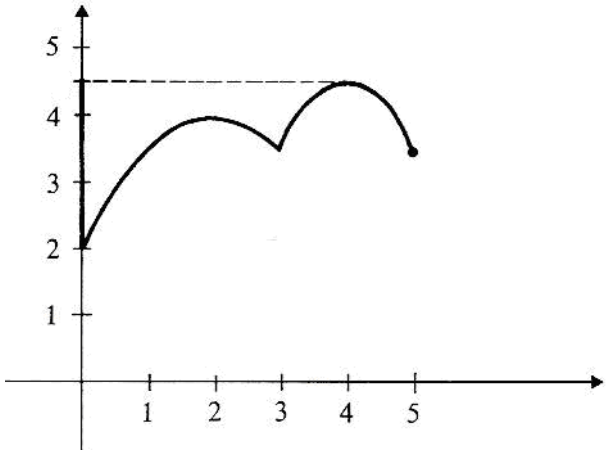


Fig. 6.6 ♥

Øvelse 6.4.

Lad funktionen h være givet ved: $h(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + 1$, $x \in [-5;2]$.

Bestem Vm(h). ♥

Øvelse 6.5.

Bestem værdimængden for funktionen: $f(x) = \sqrt{x}(1-x)$, $x \in [0;3]$

Angiv det approximerende førstegradspolynomium i (1,f(1)). ♥

Sætning 6.1 har sammen med sætning 3.36 andre konsekvenser end den ovenfor omtalte vedrørende værdimængdebestemmelse. Der gælder således følgende sætning, som kaldes Rolles sætning:

Sætning 6.6.
Lad f være en funktion, som er kontinuert i et lukket, begrænset interval $[a;b]$, og som er differentiabel i det tilsvarende åbne interval $]a;b[$.
Hvis f(a) = 0 og f(b) = 0, så findes der et punkt $c \in]a;b[$, hvor $f'(c) = 0$

Bevis:
Da f er kontinuert i $[a;b]$, har f ifølge sætning 3.36 både et maximum og et minimum.
Hvis $\max f(x) = 0$ og $\min f(x) = 0$, så er f konstant lig med 0, hvorfor $f'(c) = 0$ for alle $c \in]a;b[$.
(Se figur 6.7 a)).

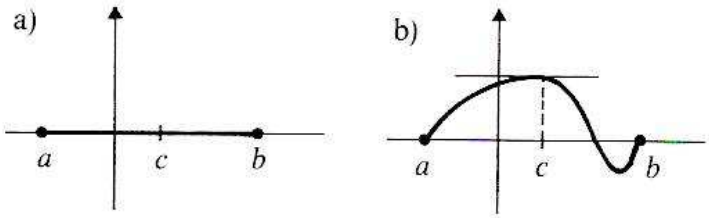


Fig. 6.7

Hvis f.eks. $\max f(x) \neq 0$, så antages maximum i et punkt $c \in]a;b[$. Og da f således har lokalt extremum i et punkt c, hvor f er differentiabel, giver sætning 6.1 os, at $f'(c) = 0$.
Beviset forløber tilsvarende, hvis $\min f(x) \neq 0$.
Hermed er sætningen bevist. ♥

Sætning 6.6 har følgende vigtige konsekvens:

Sætning 6.7. (Middelværdisætningen).
Lad f være en funktion, som er kontinuert i et lukket, begrænset interval $[a;b]$, og som er differentiabel i det tilsvarende åbne interval $]a;b[$.
Der eksisterer da mindst ét punkt $c \in]a;b[$, hvor

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

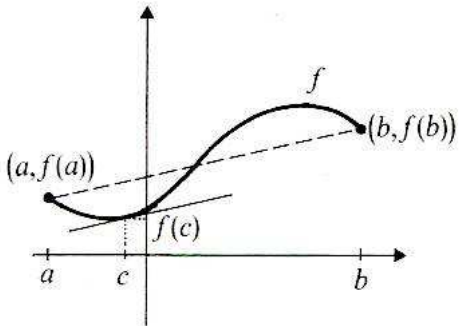


Fig. 6.8

Inden vi giver beviset for middelværdisætningen, vil vi knytte nogle kommentarer til den.
Størrelsen $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ angiver hældningskoefficienten for linien igennem punkterne (a, f(a)) og (b, f(b)), dvs. linien gennem de to "yderpunkter" på grafen for f (se figur 6.8).

Denne linies hældning kan siges at være "middelvæksthastigheden" (den gennemsnitlige vækst-hastighed) for funktionen. Middelværdisætningen siger altså, at der findes et punkt $c \in]a;b[$, hvor funktionens væksthastighed i punktet (dvs. hældningen af tangenten i (c, f(c)),) er lig med funktionens middelvæksthastighed. (Jfr. s. 35).

Eksempel 6.8.

a) Lad os prøve at se på eksemplet med påfyldning af benzin (jfr. figur 4.1). Kurven starter i punktet (0,5) og slutter i (60,35). Der er således fyldt 35 – 5 = 30 liter på i løbet af 60 – 0 = 60 sekunder, hvorfor den gennemsnitlige påfyldningshastighed ("middelvæksthastigheden") er:

$$\frac{35-5}{60-0} = \frac{30}{60} = \frac{1}{2} \qquad \text{dvs. } \tfrac{1}{2} \text{ liter pr. sekund.}$$

Middelværdisætningen siger da, at der findes mindst et tidspunkt, hvor påfyldningshastigheden (dvs. tangenthældningen) er lig med $\frac{1}{2}$ L/sek. Af figur 4.1 ses, at dette faktisk er tilfældet ved t = 14 sek.

b) Hvis vi tænker på en bil, som kører en tur på 35 km i løbet af $\frac{1}{2}$ time, så har bilens gennemsnitshastighed været på 70 km. pr. time.
Middelværdisætningen siger da, at bilen mindst én gang i løbet af turen har kørt netop med hastigheden 70 km pr. time. ♥

Bevis for middelværdisætningen:

Lad *l* være den lineære funktion, hvis graf går igennem punkterne (a, f(a)) og (b, f(b)).
l har altså en funktionsforskrift af typen: $l(x) = p \cdot x + q$, hvor hældningskoefficienten p er givet ved (jfr. figur 6.9):

$$p = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

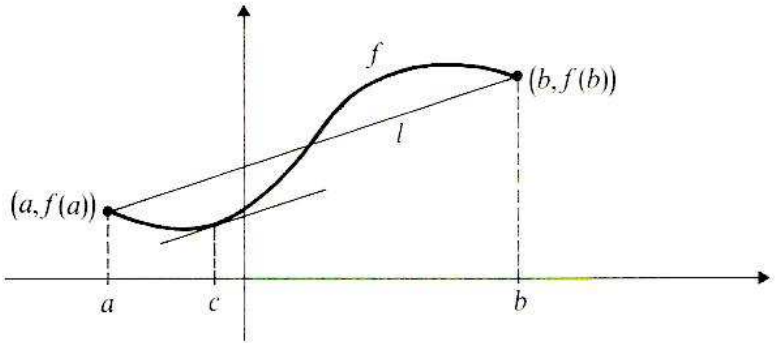


Fig. 6.9

Da funktionen *l* er differentiabel og dermed kontinuert i alle $x \in R$, har vi specielt, at *l* er kontinuert i $[a;b]$ og differentiabel i $]a;b[$. Desuden ved vi, at $l'(x) = p$ for alle x.

Betragt nu funktionen $h(x) = f(x) - l(x)$. Da både f og *l* er kontinuerte i $[a;b]$, er h kontinuert i $[a;b]$. Og da både f og *l* er differentiable i $]a;b[$, er h differentiabel i $]a;b[$.
Vi har desuden, at:

$h(a) = f(a) - l(a) = f(a) - f(a) = 0$ og $h(b) = f(b) - l(b) = f(b) - f(b) = 0$

Der gælder m.a.o., at funktionen h opfylder forudsætningerne i sætning 6.6. Vi kan derfor slutte, sat der findes mindst ét $c \in]a;b[$, hvor $h'(c) = 0$.

Da $0 = h'(c) = f'(c) - l'(c) = f'(c) - p$, ser vi, at: $f'(c) = p = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Vi har således set, at der findes mindst ét $c \in]a;b[$ med den ønskede egenskab, hvormed middelværdisætningen er bevist. ♥

Øvelse 6.9.

Betragt funktionen $f(x) = 5\sqrt{x} - x$, $1 \le x \le 4$
Gør rede for, at f opfylder forudsætningerne i middelværdisætningen.
Find et tal c, som opfylder betingelsen i middelværdisætningen. ♥

Øvelse 6.10.

Skitsér grafen for en funktion h, som opfylder følgende tre krav:

1) h er kontinuert i $[1;5]$
2) h er differentiabel i $]1;5[\setminus \{3\}$ (dvs. h er differentiabel i $]1;5[$ undtagen i 3).
3) der findes ikke noget $c \in]1;5[$, som opfylder betingelsen i middelværdisætningen.

Kommentér resultatet. ♥

Monotoniforhold for og optimering af differentiable funktioner.

Vi har set, at vi ved hjælp af sætning 6.1 er i stand til at finder punkter, hvor der muligvis er lokalt extremum for en given differentiabel funktion.
Funktionen "opførsel" ved siden af og imellem disse potentielle extrema har vi derimod ikke kunnet udtale os om. Og vi har heller ikke kunnet afgøre, om der faktisk er lokalt extremum, samt om det er et lokalt minimum eller et lokalt maksimum.

Vi vil nu anvende middelværdisætningen til at vise følgende vigtige sætning, der hjælper os med at besvare de rejste spørgsmål/udeståender:

Sætning 6.11.

Lad f være en funktion, som er kontinuert i et interval I. Lad det endvidere være givet, at f er differentiabel i alle $x \in I_o$, (hvor I_o er det interval, der fremkommer af I ved at fjerne endepunkter, som eventuelt er med i I). Da gælder følgende:

a) Hvis $f'(x) > 0$ for alle $x \in I_o$, så er f voksende i I
b) Hvis $f'(x) < 0$ for alle $x \in I_o$, så er f aftagende i I
c) Hvis $f'(x) = 0$ for alle $x \in I_o$, så er f konstant i I

Situationerne i sætning 6.11 er illustreret på figur 6.10 øverst på næste side.

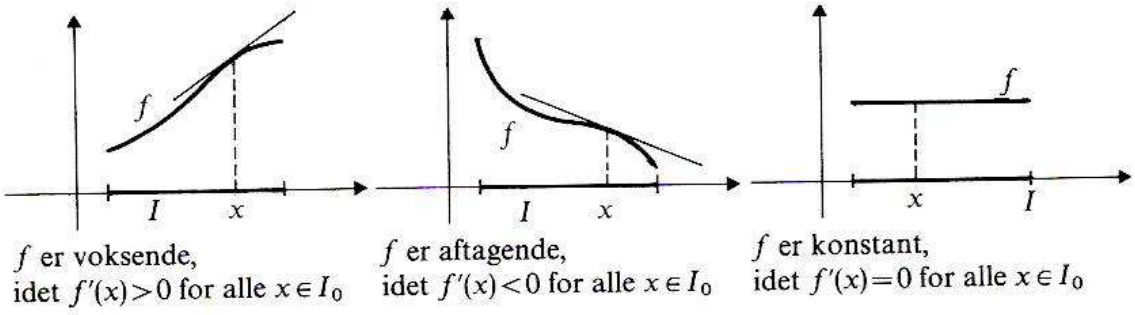


Fig. 6.10

Bevis:
Lad x_1 og x_2 være to vilkårligt valgte tal fra I, hvor $x_1 < x_2$.
Ifølge forudsætningerne om f gælder middelværdisætningen for f i intervallet $[x_1;x_2]$ (Overvej !).
Ifølge middelværdisætningen får vi da, at der findes et tal $c \in]x_1;x_2[$, hvorom der gælder:

$$f'(c) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

Hvis nu $f'(x) > 0$ for alle $x \in I_o$, så har vi specielt, at $f'(c) > 0$, dvs. $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} > 0$.
Da nævneren $x_2 - x_1$ er større end 0, idet $x_1 < x_2$, må tælleren i dette tilfælde også være positiv.
Vi har således, at $f(x_2) - f(x_1) > 0$, dvs. $f(x_1) < f(x_2)$.
Vi har hermed vist, at når $f'(x) > 0$ for alle $x \in I_o$, så får vi for vilkårlige x_1 og x_2 fra I, at

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Og dette betyder netop, at f er voksende i I.

Tilsvarende ses, at f bliver aftagende i I, hvis $f'(x) < 0$ for alle $x \in I_o$, idet dette bevirker, at $f'(c) < 0$ og dermed, at $f(x_2) - f(x_1) < 0$, hvormed vi får: $f(x_1) > f(x_2)$.
Hvis endelig $f'(x) = 0$ for alle $x \in I_o$, så vil også $f'(c)$ være 0, hvoraf vi får, at: $f(x_2) - f(x_1) = 0$, dvs. at $f(x_1) = f(x_2)$. Da x_1 og x_2 er vilkårligt valgt, vil alle punkter fra I således have samme funktionsværdi, dvs. funktionen er konstant.
Hermed er sætningen bevist. ♥

Eksempel 6.12.
Vi betragter funktionen $f(x) = x - 3\sqrt{x}$. Vi vil bestemme monotoniforhold og lokale extrema for f.
f er defineret og kontinuert i $[0;\infty[$, differentiabel i $]0;\infty[$, og der gælder, at:

$$f'(x) = 1 - \frac{3}{2\sqrt{x}}$$

Vi finder først nulpunkterne for $f'(x)$:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 = \frac{3}{2\sqrt{x}} \Leftrightarrow \sqrt{x} = \tfrac{3}{2} \Leftrightarrow x = \tfrac{9}{4}$$

Vi vil herefter finde fortegnene for $f'(x)$ i forskellige intervaller for at kunne bruge sætning 6.11.

I den konkrete situation kan vi løse uligheden $f'(x) > 0$:

$$f'(x) > 0 \iff 1 > \frac{3}{2\sqrt{x}} \iff \sqrt{x} > \tfrac{3}{2} \iff x > \tfrac{9}{4}$$

men ofte(st) er dette ikke muligt – eller i hvert fald ret vanskeligt. Vi kan da finde fortegnene for $f'(x)$ på følgende måde: Vi betragter de åbne intervaller, som nulpunkterne for $f'(x)$ inddeler Dm(f) i – i det konkrete tilfælde intervallerne $\left]0;\tfrac{9}{4}\right[$ og $\left]\tfrac{9}{4};\infty\right[$.

Lad os først se på $\left]0;\tfrac{9}{4}\right[$. Vi vælger et eller andet punkt i dette interval, f.eks. x = 1, og udregner $f'(1)$. (Her kan man – som det f.eks. er tilfældet med x = 1 – med fordel vælge et punkt, som simplificerer udregningen af f' i punktet).

Der gælder: $f'(1) = 1 - \dfrac{3}{2\sqrt{1}} = 1 - \tfrac{3}{2} = -\tfrac{1}{2} < 0.$

Funktionen f' antager altså en negativ funktionsværdi i 1.
Herefter argumenteres der (ved anvendelse af sætning 3.30 a)) på følgende måde:

> Da funktionen f' er kontinuert i intervallet $\left]0;\tfrac{9}{4}\right[$, kan f' ikke skifte fortegn i dette interval uden at antage værdien 0. Men da vi har fundet alle nulpunkter for f' ved vi, at den ikke har noget nulpunkt i $\left]0;\tfrac{9}{4}\right[$. Fortegnet for f' er derfor det samme i hele intervallet $\left]0;\tfrac{9}{4}\right[$.

Vi ser hermed, at $f'(x) < 0$ for alle $x \in \left]0;\tfrac{9}{4}\right[$.

Da $f'(4) = 1 - \tfrac{3}{4} = \tfrac{1}{4} > 0$, ser vi på samme måde, at $f'(x) > 0$ for alle $x \in \left]\tfrac{9}{4};\infty\right[$.
Vi kan derfor angive <u>fortegnsvariationen</u> for f' på følgende måde:

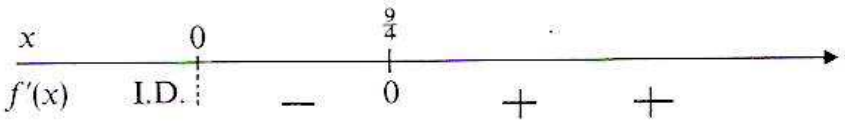


Fig. 6.11

Vi har her tegnet en tallinie, hvorover de mulige x-værdier forekommer, og hvorunder fortegnet for $f'(x)$ angives. (I.D. betyder: "Ikke defineret").
Vi har altså bl.a., at $f'(x) < 0$ for alle $x \in \left]0;\tfrac{9}{4}\right[$. Da vi desuden ved, at f er kontinuert i $\left[0;\tfrac{9}{4}\right]$, får vi ifølge sætning 6.11, at f er aftagende i $\left[0;\tfrac{9}{4}\right]$.
På tilsvarende måde ses, at f er voksende i $\left[\tfrac{9}{4};\infty\right[$.
Da f er aftagende i $\left[0;\tfrac{9}{4}\right]$ og voksende i $\left[\tfrac{9}{4};\infty\right[$, må der være lokalt minimum i $x = \tfrac{9}{4}$.
Alle disse egenskaber ved f kan man symbolisere ved tallinien på følgende måde:

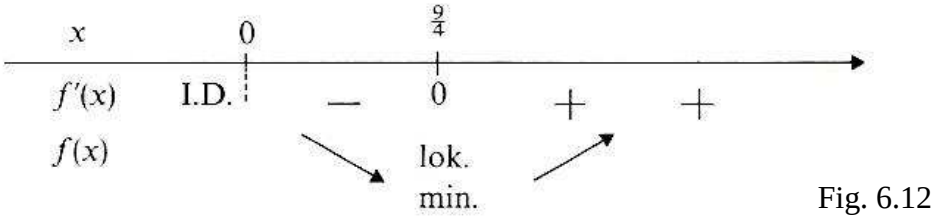


Fig. 6.12

hvor pilene antyder grafens "tendens" i de forskellige intervaller.

Da f er defineret og kontinuert i intervallet $[\,0;\infty[$, og da f er aftagende til venstre for $\frac{9}{4}$ og voksende til højre for $\frac{9}{4}$ ser vi desuden, at der ikke kun er lokalt, men globalt minimum i $\frac{9}{4}$, dvs. at f antager sin mindsteværdi i $\frac{9}{4}$. Vi får altså: $\min f(x) = f(\frac{9}{4}) = \frac{9}{4} - 3\sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} = -\frac{9}{4}$.

På nedenstående figur 6.13 ses grafen for f. Ved tegning af grafen er udover den ovenstående information bl.a. anvendt funktionen nulpunkter, som findes således (idet $x \geq 0$):

$f(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 3\sqrt{x} \;\Leftrightarrow\; x^2 = 9x \;\Leftrightarrow\; x^2 - 9x = 0 \;\Leftrightarrow\; x(x-9) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0 \vee x = 9$

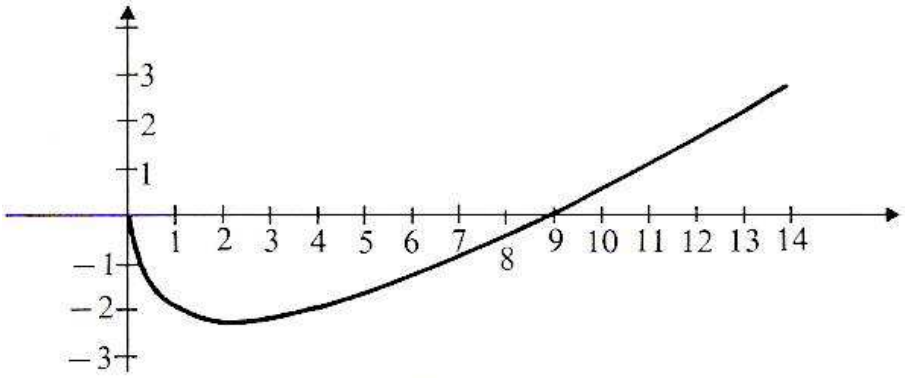


Fig. 6.13

Bemærk, at når man har til opgave at angive monotoniforholdene for funktionen, så er figur 6.12 ikke tilstrækkeligt. Man skal opskrive resultatet:

f er aftagende i $\left[\,0;\frac{9}{4}\,\right]$, f er voksende i $\left[\,\frac{9}{4};\infty\right[$,

altså opskrive monotoniintervallerne. ♥

I forlængelse af eksempel 6.12 kan vi anføre følgende sætning (Overvej !):

Sætning 6.13.

Hvis f er en differentiabel funktion, hvorom det i et punkt x_o gælder, at $f'(x_o) = 0$, så er der:

a) lokalt minimum i x_o, hvis f er aftagende til venstre for x_o og voksende til højre for x_o (figur 6.14 a))
b) lokalt maximum i x_o, hvis f er voksende til venstre for x_o og aftagende til højre for x_o (figur 6.14 b))
c) vendetangent i x_o, hvis f er voksende på begge af x_o, eller hvis f er aftagende på begge sider af x_o (figur 6.14 c og d).

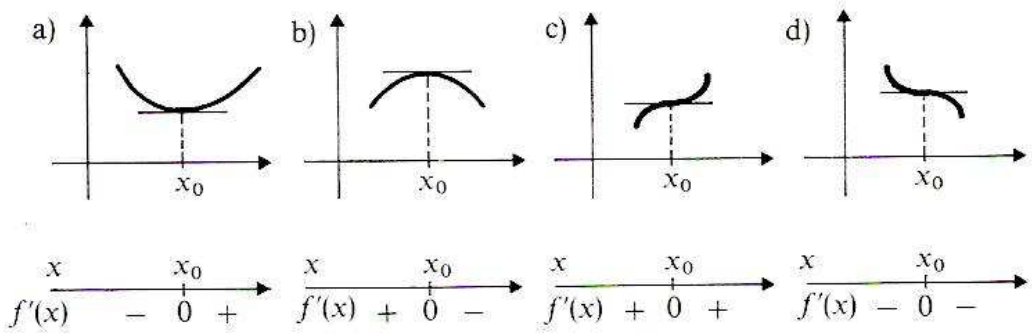


Fig. 6.14

Som demonstreret i eksempel 6.12 kan sætning 3.30 a) og sætning 6.11 anvendes til at finde monotoniforholdene for de fleste funktioner. Dette gøres ved at finde fortegnsvariationen for f', som med fordel kan indtegnes ved en tallinie som vist på figur 6.11.
Fortegnsvariationen for f' findes ved at gennemføre 1), 2) og 3) eller 1), 2) og 4) i det følgende:

1) Indtegn definitionsmængden for f i forbindelse med tallinien
2) Løs ligningen $f'(x) = 0$ og indtegn løsningerne i forbindelse med tallinien
3) Løs uligheden $f'(x) > 0$ (og dermed uligheden $f'(x) < 0$), hvis det med rimelighed er muligt
4) Bestem $f'(x)$ i et punkt x fra hvert af de intervaller, som nulpunkterne for f' inddeler definitionsmængden for f i.
   Hvis f' er kontinuert i det konkrete interval, giver fortegnet for den fundne $f'(x)$–værdi fortegnet for f' i hele intervallet (jfr. den indrammede argumentation i eksempel 6.12).

Eksempel 6.14.

Vi vil bestemme monotoniforhold og lokale extrema for funktionen: $h(x) = \frac{10}{x^2 - 9}$.

Vi ser først, at definitionsmængden for h er alle tal undtagen 3 og –3, dvs. $Dm(h) = R\setminus\{-3,3\}$.

Vi finder dernæst: $h'(x) = \frac{0\cdot(x^2-9)-10\cdot 2x}{(x^2-9)^2} = \frac{-20x}{(x^2-9)^2}$

Så løses ligningen: $h'(x) = 0 \Leftrightarrow -20x = 0 \Leftrightarrow x = 0$
Definitionsmængden for h og nulpunkterne for h' indtegnes ved en tallinie:

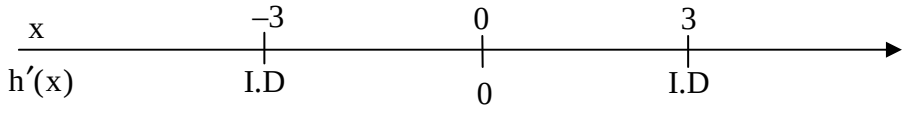


Fig. 6.15

Vi ser, at tallinien inddeles i fire intervaller. Vi vælger et x fra hver interval og udregner $h'(x)$:
$h'(-5) = 0{,}3906 > 0$, $h'(-1) = 0{,}3125 > 0$, $h'(1) = -0{,}3125 < 0$, $h'(5) = -0{,}3906 < 0$
Som i eksempel 6.12 argumenterer vi nu på følgende måde:
Da funktionen h' er kontinuert i intervallet $]-\infty;-3[$, kan f' ikke skifte fortegn i dette interval uden at antage værdien 0. Men da vi har fundet alle nulpunkter for h' ved vi, at den ikke har noget nulpunkt i $]-\infty;-3[$. Fortegnet for h' er derfor det samme i hele intervallet $]-\infty;-3[$.
Da $h'(-5) > 0$ ser vi dermed, at $h'(x) > 0$ for alle $x \in]-\infty;-3[$.
På samme måde gøres med de øvrige intervaller, hvormed vi får følgende fortegnsvariation for h':

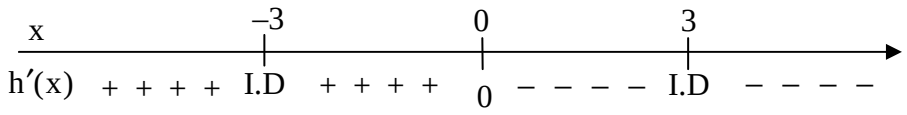


Fig. 6.16

Ifølge sætning 6.11 anvendt på hvert af intervallerne kan vi nu tilføje tendenspile (se figur 6.17 på næste side) og opskrive monotoniforhold. Og ved anvendelse af sætning 6.13 kan vi angive lokale extrema.

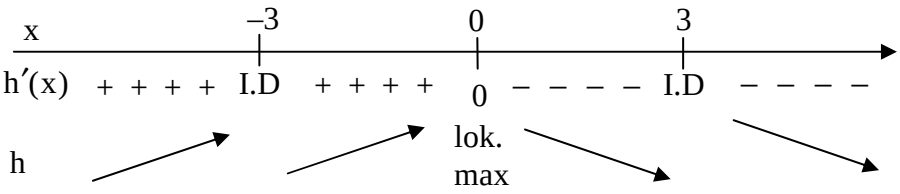


Fig. 6.17

Monotoniforholdene opskrives:
h er voksende i $]-\infty;-3[$ og i $]-3;0]$, h er aftagende i $[0;3[$ og i $]3;\infty[$.
h har lokalt maksimum i 0.

Grafen for h ser ud som vist på følgende figur:

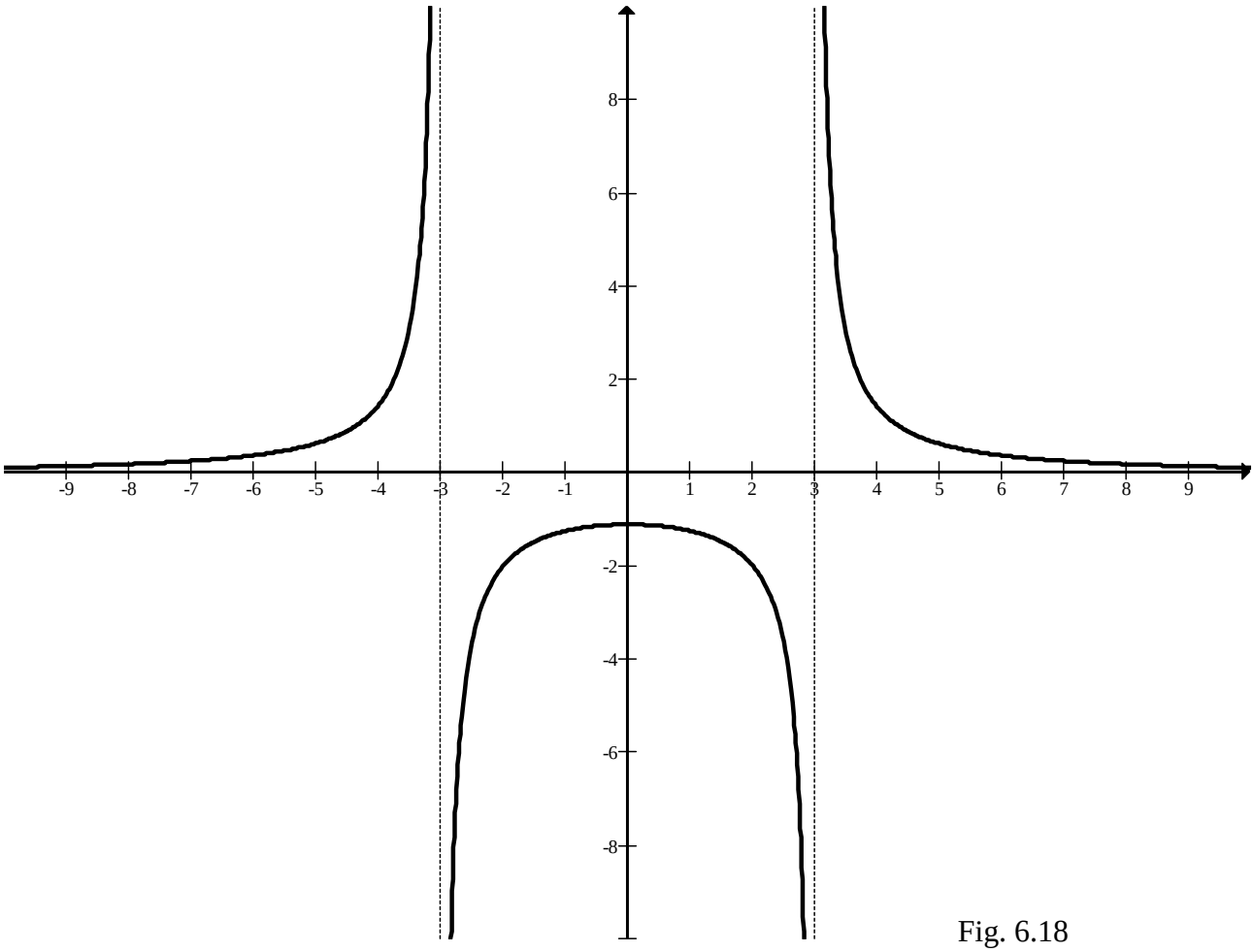


Fig. 6.18

De stiplede linier er indtegnet for dels at vise, at h ikke er defineret i –3 og i 3 (hvormed grafen ikke må krydse disse linier), dels for at vise, at grafen "lægger sig op ad" disse linier i "det fjerne", når x er tæt på 3 eller –3. (Sådanne linier kaldes asymptoter for grafen, se kapitel 8).
Bemærk, at h kun har ét lokalt maximum, men at dette ikke er glogalt maximum (størsteværdi) for h, idet h slet ikke har nogen størsteværdi.
Bemærk desuden, at h er voksende i $]-\infty;-3[$ og i $]-3;0]$, men ikke i $]-\infty;0]$ p.gr.a. "hullet" i definitionsmængden ved –3. Og tilsvarende ved 3. ♥

Øvelse 6.15.
Bestem monotoniforhold og lokale extrema for hver af følgende funktioner, samt undersøg, om funktionerne har et globalt maximum eller globalt minimum:

a) $f(x) = 2x^2 - x + 7$ b) $f(x) = x^3 - 12x + 1$ c) $f(x) = \frac{x+2}{x^2-1}$ d) $f(x) = \frac{x+2}{x^2+1}$ ♥

Øvelse 6.16.
En lineær funktion f(x) = ax + b er voksende, aftagende eller konstant, afhængig af om a > 0, a < 0 eller a = 0. Bevis dette v.hj.a. sætning 6.11. ♥

Øvelse 6.17.
I øvelse 3.34 så vi på funktionen $g(x) = x^3 + 2x - 1$.
Bevis, at denne funktion har netop ét nulpunkt. ♥

Sætning 6.11 a) og b) kan "udvides" til følgende sætning:

Sætning 6.18.
Lad f være en funktion, som er kontinuert i et interval I.
a) Hvis f er differentiabel i x og $f'(x) > 0$ for "næsten" alle x i I (dvs. bortset fra i et endeligt antal punkter), så er f voksende i I.
b) Hvis f er differentiabel i x og $f'(x) < 0$ for "næsten" alle x i I (dvs. bortset fra i et endeligt antal punkter), så er f aftagende i I.

Bevis:
Hvis f f.eks. er kontinuert i intervallet $[a;b]$, og hvis $f'(x) > 0$ for alle x i $[a;b]$ bortset fra i punkterne a, b, s, t, u og v (se figur 6.19), så er f ifølge sætning 6.11 a) voksende i $[a;s]$, $[s;t]$, $[t;u]$, $[u;v]$ og $[v;b]$. Og p.gr.a. kontinuiteten er f dermed voksende i $[a;b]$.

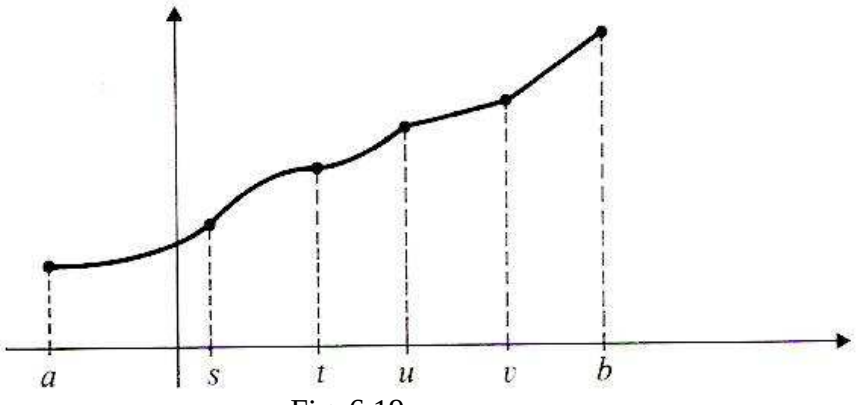


Fig. 6.19

Der argumenteres tilsvarende, hvis $f'(x) < 0$ for "næsten alle" $x \in I$. ♥

Øvelse 6.19.
Vis, at funktionen $f(x) = x^3$ er voksende i hele R. ♥

Sætning 6.11 kan ikke "vendes om". Der gælder altså ikke, at hvis f er voksende, så er $f'(x) > 0$. Vi har f.eks. lige set i øvelse 6.19, at funktionen $f(x) = x^3$ er voksende i hele R, men der gælder, at $f'(0) = 0$.

Men der gælder dog følgende:

Sætning 6.20.
Hvis f er voksende i et interval I, og hvis f er differentiabel i et punkt $x_o \in I$, så er $f'(x_o) \geq 0$.
Hvis f er aftagende i et interval I, og hvis f er differentiabel i et punkt $x_o \in I$, så er $f'(x_o) \leq 0$.

Bevis:

Når f er voksende, så har tæller og nævner i differenskvotienten $\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$ samme fortegn (overvej!), dvs. at differenskvotienten er positiv.
Og da

$$\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} \to f'(x_o) \quad \text{for} \quad x \to x_o$$

får vi dermed ifølge sætning 2.28, at $f'(x_o) \geq 0$ (overvej !).
Argumentet for en aftagende funktion overlades til læseren. ♥

Vi skal i såvel opgavesamlingen som i kapitel 9 om modeller se flere eksempler på, hvordan sætning 6.11 kan bruges til at optimere (maksimere eller minimere) forskellige funktioner.

Kapitel 7: Differentiabilitet 2.

Differentiationsmetoder og notation.

Når man skal bestemme differentialkvotienten for en funktion, så er der i princippet tre forskellige måder at gøre dette på:

1) Hvis man kender en funktionsforskrift for funktionen, så kan man almindeligvis bestemme differentialkvotienten v.hj.a. kendskab til differentialkvotienterne for de grundlæggende funktioner (f.eks. at $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$) samt v.hj.a. de regneregler for differentiation, der er omtalt i kapitel 5.

2) Hvis man har givet grafen for funktionen, kan man bestemme en tilnærmet værdi for differentialkvotienten i et punkt ved at indtegne en tangent til grafen i det pågældende punkt og dernæst bestemme hældningskoefficienten for denne tangent.
Denne metode kaldes "grafisk differentiation".

3) Hvis man kun har givet funktionen ved en (rimeligt detaljeret) tabel – eller hvis beregningerne skal foretages af en computer –, kan man anvende "numerisk differentiation".
Dette kan foregå som følger:

Som tidligere omtalt (se bl.a. side 38) er differenskvotienten $\frac{f(x_o + \Delta x) - f(x_o)}{\Delta x}$ tæt på differentialkvotienten $f'(x_o)$, når blot Δx er "lille" (dvs. tæt på 0).

Vi kan derfor beregne differenskvotienten for en lille Δx-værdi og benytte resultatet som en tilnærmet værdi for $f'(x_o)$.

Men som det fremgår af den følgende figur 7.1, kan vi få en bedre approximation af $f'(x_o)$ ved at benytte gennemsnitsværdien af de to differenskvotienter:

$$\frac{f(x_o + \Delta x) - f(x_o)}{\Delta x} \quad \text{og} \quad \frac{f(x_o) - f(x_o - \Delta x)}{\Delta x}$$

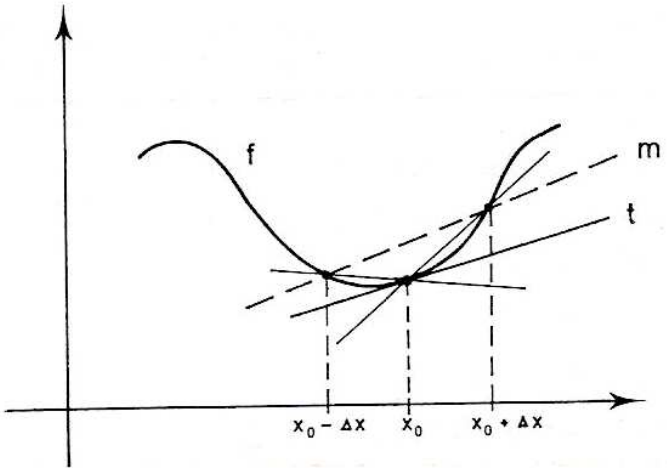


Fig. 7.1

Bemærk, at ved den første differenskvotient er udgangspunktet x_o, medens det ved den anden differenskvotient er $x_o - \Delta x$.
Vi får altså (kontrollér !) følgende approximationsformel ved numerisk differentiation:

$$f'(x_o) \approx \frac{f(x_o + \Delta x) - f(x_o - \Delta x)}{2\Delta x} \quad \text{når } \Delta x \text{ er "lille"}$$

Bemærk, at $f'(x_o)$ er hældningskoefficienten for tangenten t på figur 7.1, medens approximationsudtrykket (brøken) er hældningskoefficienten for linien m på figuren.

Øvelse 7.1.
Bestem ved grafisk differentiation $f'(10)$ og $f'(15)$ for funktionen på figur 4.1 side 31. ♥

Øvelse 7.2.
Bestem ved grafisk differentiation $f'(5)$ for funktionen på figur 4.5 side 34. ♥

Øvelse 7.3.
Betragt funktionen $f(x) = x^3$. Beregn $f'(2)$.
Anvend den ovenstående approximationsformel til at finde en tilnærmet værdi for $f'(2)$, dels hvor $\Delta x = 0{,}1$, dels hvor $\Delta x = 0{,}02$. Kommentér resultaterne. ♥

Øvelse 7.4.
Om en funktion g, der er defineret i et interval I, er opgivet bl.a. følgende funktionsværdier:

x	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4
g(x)	3,795	3,911	4,025	4,135	4,243	4,347	4,450	4,550	4,648
x	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3,0	3,1	3,2	3,3
g(x)	4,743	4,837	4,930	5,020	5,109	5,196	5,282	5,367	5,450

Bestem ved numerisk differentiation en tilnærmet værdi for $g'(2)$, $g'(2{,}4)$ og $g'(3)$. ♥

Øvelse 7.5.
Lav et fysikforsøg med et frit fald, hvor bevægelsen registreres v.hj.a. en timerstrimmel eller lignende. Bestem hastigheden $v = s'$ i bevægelsen i forskellige positioner.
(En timerstrimmel laves ved at et speciallod i sit fald trækker en papirstrimmel gennem en "timer", som sætter en prik på strimlen for hvert 1/100 sekund.
På timerstrimlen bestemmes den bedste tilnærmelse til hastigheden, som loddet havde, da en given prik blev afsat, ved at måle Δs lig med afstanden imellem prikken før og prikken efter den givne prik, og ved at sætte $\Delta t = 2/100$ sek. Forklar hvorfor !). ♥

Differentialregningen blev opfundet omkring 1670 af englænderen Isaac Newton (1642 – 1727) og af Gottfries Leibniz (1647 – 1716) fra Leipzig – vistnok uafhængigt af hinanden, selvom de senere skændtes om hvem der egentlig opfandt det. Grunden til, at dette omtales her er primært, at Newton og Leibniz havde hver deres måde at anføre differentialkvotienten på. Newton anvendte en lille prik over de variable, medens Leibniz anvendte nogle små d'er foran de variable. Idéen med prikkerne er sandsynligvis baggrund for den notationsmetode vi allerede har omtalt, nemlig $f'(x)$, hvorimod Leibniz's små d'er endnu ikke er omtalt hér. Men de bruges stadigvæk – specielt, men ikke kun, når der er tale om matematiske modeller i andre fag som fysik og økonomi – og de indgår desuden i omtalen af differentialer sidst i dette kapitel.
Hvis y = f(x) er en given differentiabel funktion, så benyttes følgende skrivemåder:

$$f'(x) \;=\; \frac{df(x)}{dx} \;=\; \frac{df}{dx}(x) \;=\; \frac{df}{dx} \;=\; \frac{dy}{dx} \;=\; y' \;=\; y'(x)$$

Metoden med mærket er nemmest at anvende rent typografisk, men metoden med d'erne har den fordel, at man nemmere kan se, hvilken størrelse der differentieres med hensyn til hvilken variabel. Hvis vi f.eks. ser på størrelsen $\frac{ds}{dt}$, så kan vi se at der er tale om at differentiere strækningen s med hensyn til tiden t – og dermed opnå at bestemme hastigheden.

Eksempel 7.6.

Betragt funktionen $f(x) = 0{,}5x^3 - 2\sqrt{x}$. Vi vil bestemme $\frac{df}{dx}$ og $\frac{df}{dx}(4)$

$\frac{df}{dx} = 0{,}5\cdot 3x^2 - 2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = 1{,}5x^2 - \frac{1}{\sqrt{x}}$ hvoraf vi ser, at: $\frac{df}{dx}(4) = 1{,}5\cdot 4^2 - \frac{1}{\sqrt{4}} = 23{,}5$ ♥

Øvelse 7.7.

Betragt følgende funktionsforskrifter:

a) $f(x) = 3x^2 + \frac{1}{x} + 8$ b) $y = \frac{x^2 - x}{x^2 + 1}$ c) $h(r) = 2r^2 \cdot \sqrt{r}$

Bestem følgende:

a) $\frac{df}{dx}$ og $\frac{df}{dx}(2)$ b) $\frac{dy}{dx}$ og $\frac{dy}{dx}(-1)$ c) $\frac{dh}{dr}$ og $\frac{dh}{dr}(5)$ ♥

Da den afledede funktion af en funktion f er givet ved: $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$, ser vi, at den anden afledede af f kan anføres ved:

$$f''(x) = \frac{df'(x)}{dx} = \frac{d\left(\frac{df(x)}{dx}\right)}{dx}$$

hvilket normalt skrives således: $\frac{d^2 f(x)}{dx^2}$.

Hvis y = f(x), så kan vi angive den anden afledede på følgende måder:

$$y'' = f''(x) = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \frac{d^2 f}{dx^2}(x)$$

Øvelse 7.8.

a) Bestem $\frac{d^2 f(x)}{dx^2}$ og $\frac{d^2 f}{dx^2}(3)$ for funktionen f i eksempel 7.6.

b) Bestem $\frac{d^2 f(x)}{dx^2}$ og $\frac{d^2 f}{dx^2}(-1)$ for funktionen f i øvelse 7.7 a)

c) Bestem $\frac{d^2 h(r)}{dr^2}$ og $\frac{d^2 h}{dr^2}(5)$ for funktionen h i øvelse 7.7 c). ♥

Differentiation fra højre og fra venstre. Halvtangenter.

Vi har nogle gange haft den situation, at en forelagt funktion er differentiabel i "næsten alle" punkter i sin definitionsmængde, dvs. at der kun findes et endeligt antal punkter, hvor funktionen ikke er differentiabel. Disse punkter kan f.eks. være endepunkter i definitionsmængden eller punkter, hvor grafen "knækker".
Vi vil nu undersøge, hvad der eventuelt kan siges om funktionen i sådanne punkter.

Eksempel 7.9.

Betragt funktionen f givet ved: $f(x) = \left|\frac{1}{4}x^2 - 1\right|$

Da rødderne i andengradspolynomiet $\frac{1}{4}x^2 - 1$ er lig med 2 og –2, kan f også skrives således:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4}x^2 + 1 & \text{når } |x| < 2 \\ \frac{1}{4}x^2 - 1 & \text{når } |x| \geq 2 \end{cases}$$

Grafen for f fremkommer af grafen for funktionen $g(x) = \frac{1}{4}x^2 - 1$ ved en spejling i 1.aksen af den del, som ligger under aksen, medens resten bevares. Øverst på næste side ses figur 7.2, der dels viser grafen for f, dels (stiplet) viser den del af grafen for g, som spejles i 1.aksen. (Der er desuden nogle halvlinier, som omtales i det følgende).

Det fremgår, at f er differentiabel i alle punkter undtagen 2 og –2.

Hvis vi nu indskrænker os til at se på $x \geq 2$, så får vi, idet funktionen $g(x) = \frac{1}{4}x^2 - 1$ er differentiabel, og idet f(x) = g(x) for $x \geq 2$, at der gælder (overvej !):

$$\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{g(x) - g(2)}{x - 2} \to g'(2) \quad \text{for} \quad x \to 2+$$

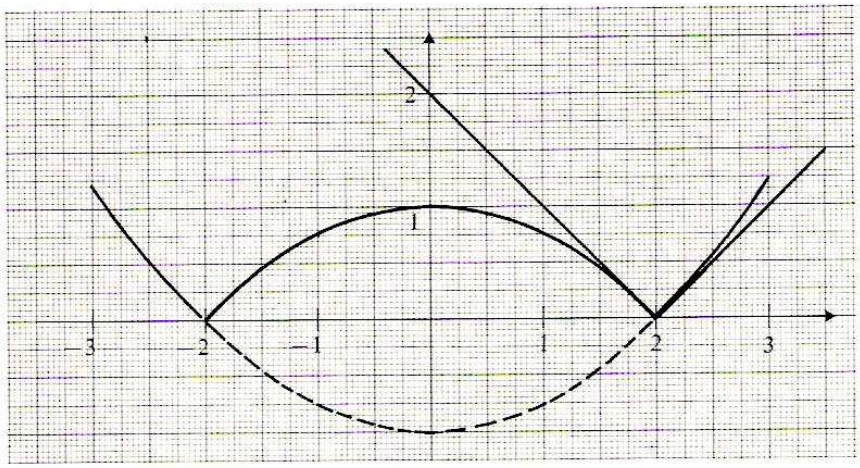


Fig. 7.2

Vi vil derfor sige, at f er differentiabel fra højre i 2 med højre-differentialkvotienten $f'_+(2) = g'(2)$, hvormed vi får, at $f'_+(2) = 1$.
Vi vil kalde den halvlinie, som udgår fra punktet (2, f(2)) (= (2,0)) , og som har hældningskoefficienten $f'_+(2)$ (= 1), for den (fremadrettede) halvtangent i punktet (2, f(2)). (Se figuren).
Denne halvtangent får dermed ligningen: $y = x - 2 \ , \ x \geq 2$

På samme måde ses, at f er differentiabel fra venstre i 2 med venstre-differentialkvotienten $f'_-(2) = (-g)'(2) = -1$. Den tilsvarende (bagudrettede) halvtangent i punktet (2, f(2)) får dermed ligningen: $y = -x + 2$, $x \leq 2$. ♥

På baggrund af det ovenstående eksempel giver vi følgende definition:

Definition 7.10. a)
En funktion f siges at være differentiabel fra højre i et punkt x_o, hvis der findes et tal $f'_+(x_o)$, så

$$\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} \ \rightarrow \ f'_+(x_o) \quad \text{for} \quad x \rightarrow x_o +$$

Tallet $f'_+(x_o)$ kaldes differentialkvotienten fra højre i x_o eller kortere: højre-differentialkvotienten i x_o.

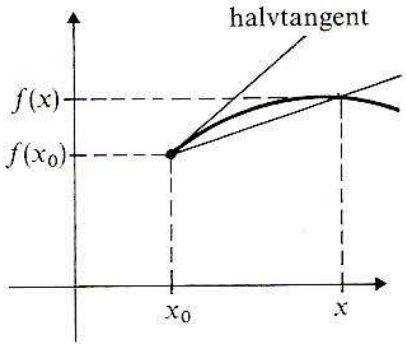


Fig. 7.3

Halvlinien

$$y = f'_+(x_o)\cdot(x-x_o)+f(x_o) \quad , \quad x \geq x_o$$

kaldes den fremadrettede halvtangent til grafen for f i punktet $(x_o , f(x_o))$.

(Fortsættes på næste side)

Definition 7.10 b):
En funktion f siges at være differentiabel fra venstre i x_o, hvis der findes et tal $f'_-(x_o)$, så

$$\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} \to f'_-(x_o) \text{ for } x \to x_o-$$

Tallet $f'_-(x_o)$ kaldes differentialkvotienten fra venstre i x_o eller kortere: venstre-differentialkvotienten i x_o.

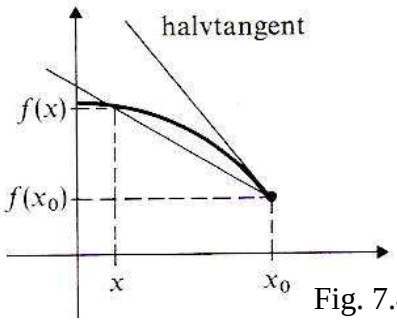


Fig. 7.4

Og halvlinien

$$y = f'_-(x_o)\cdot(x-x_o)+f(x_o) \quad , \quad x \le x_o$$

kaldes den bagudrettede halvtangent til grafen for f i punktet $(x_o , f(x_o))$.

Øvelse 7.11.
Betragt funktionen i eksempel 7.9. Find ligningerne for den fremadrettede hhv. den bagudrettede halvtangent til grafen for f i punktet (–2, f(–2)). ♥

Øvelse 7.12.
Angiv $f'_+(2)$ og $f'_-(2)$ for den i eksempel 4.13 omtalte funktion f.
Bestem en ligning for den bagudrettede halvtangent i punktet (2, f(2)). ♥

Sætning 7.13.
a) Hvis en funktion f er differentiabel i x_o, så er f differentiabel både fra højre og fra venstre i x_o, og
$$f'(x_o) = f'_+(x_o) = f'_-(x_o)$$
b) Hvis en funktion f er differentiabel både fra højre og fra venstre i x_o, og hvis $f'_+(x_o) = f'_-(x_o)$, så er f differentiabel i x_o, og
$$f'(x_o) = f'_+(x_o) = f'_-(x_o)$$

Øvelse 7.14.
Argumentér for rigtigheden af sætning 7.13. ♥

Øvelse 7.15.
Lad funktionen g være givet ved

$$g(x) = \begin{cases} x+\frac{3}{2} & x \ge 1 \\ 2x^2+px+q & x<1 \end{cases}$$

hvor p og q er reelle tal.
Bestem værdien af p og af q, så g bliver differentiabel i 1.
Skitsér grafen for den derved fremkomne funktion. ♥

Undertiden kan det være svært at bevise, at differenskvotienten $\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$ har en grænseværdi for x gående mod x_o fra højre eller fra venstre.
Hvis funktionen er differentiabel "i nærheden" af x_o, så kan vi imidlertid anvende følgende sætning:

Sætning 7.16.
Lad f være en funktion, som er kontinuert fra højre i x_o og differentiabel i en omegn $\omega_+(x_o)$ til højre for x_o.
Hvis der findes et tal a, så

$$f'(x) \to a \quad \text{for} \quad x \to x_o+$$

så er f differentiabel fra højre i x_o, og $f'_+(x_o) = a$.

Det tilsvarende gælder naturligvis fra venstre.

Bevis:
Beviset bygger på middelværdisætningen (sætning 6.7).
Lad h være længden af omegnen $\omega_+(x_o)$, dvs. $\omega_+(x_o) =]x_o ; x_o + h[$.
I det følgende betragtes kun $x \in \omega_+(x_o) =]x_o ; x_o + h[$
Ifølge middelværdisætningen anvendt på f i intervallet $[x_o ; x]$ findes et tal $c_x \in]x_o ; x[$, så

$$\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} = f'(c_x)$$

Det lille indeks x på c'et skal vise, at tallet afhænger af hvilken x-værdi, der vælges.
Da $f'(x) \to a$ for $x \to x_o+$, så har vi også, at $f'(c_x) \to a$ for $x \to x_o+$, idet der hele tiden gælder, at $x_o < c_x < x$. Men heraf får vi netop, at

$$\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} = f'(c_x) \to a \quad \text{for} \quad x \to x_o+$$

Hermed er sætningen bevist. ♥

Øvelse 7.17.
Vis, at funktionen $g(x) = x\sqrt{x} + 2x$ er differentiabel fra højre i 0, og find $f'_+(0)$. ♥

I lighed med kontinuitet af en funktion defineret i et interval (jfr. definition 3.18) har vi følgende definition:

Definition 7.18.
En funktion f siges at være **differentiabel i et interval** $I = [a ; b]$, hvis f er differentiabel i $]a ; b[$, og hvis f er differentiabel fra højre i a og fra venstre i b.

Krumning af grafer.

Definition 7.19.

En funktion f siges at være konvex i et interval $[\,a\,;b\,]$, hvis det for to vilkårligt valgte tal $x_1, x_2 \in [\,a\,;b\,]$ gælder, at liniestykket mellem punkterne $(x_1\,, f(x_1))$ og $(x_2\,, f(x_2))$ ligger over grafen for f. (Se figur 7.5 a)).

En funktion g siges at være konkav i et interval $[\,a\,;b\,]$, hvis det for to vilkårligt valgte tal $x_1, x_2 \in [\,a\,;b\,]$ gælder, at liniestykket mellem punkterne $(x_1\,, g(x_1))$ og $(x_2\,, g(x_2))$ ligger under grafen for f. (Se figur 7.5 b)).

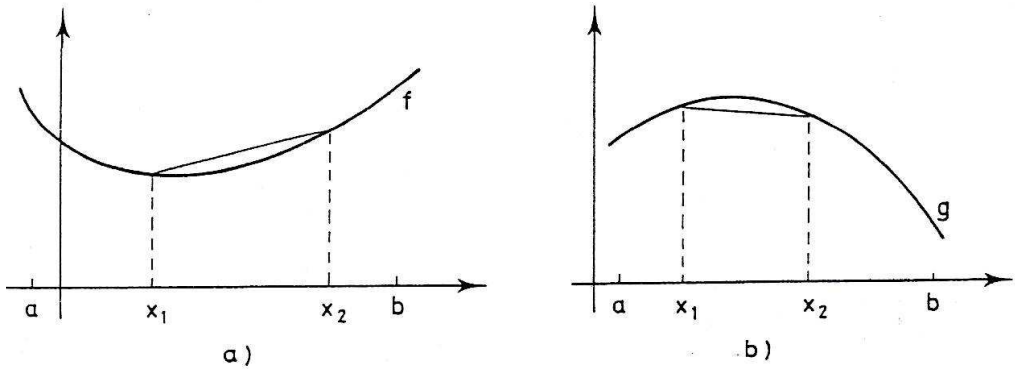


Fig. 7.5

Bemærk, at definitionen lidt kortere, men lidt mindre præcist kan formuleres således:

En funktion f er konvex i et interval $[\,a\,;b\,]$, hvis liniestykket mellem to vilkårlige punkter på grafen ligger over grafen.

En funktion f er konkav i et interval $[\,a\,;b\,]$, hvis liniestykket mellem to vilkårlige punkter på grafen ligger under grafen.

I forbindelse med krumning af grafer anvendes i øvrigt en række forskellige betegnelser:

En konvex funktion siges også at være progressiv, at krumme opad eller at være opad hul.
En konkav funktion siges også at være degressiv, at krumme nedad eller at være nedad hul.

Specielt benævnelserne progressiv og degressiv anvendes meget, bl.a. i økonomiske og samfundsfaglige sammenhænge. (Man taler f.eks. om en progressiv skatteskala).

Bemærk, at der i definitionen står: to vilkårlige tal (eller to vilkårlige punkter). Funktionen på figur 7.6 er således ikke konvex, selv om der findes to punkter, som opfylder det ønskede.

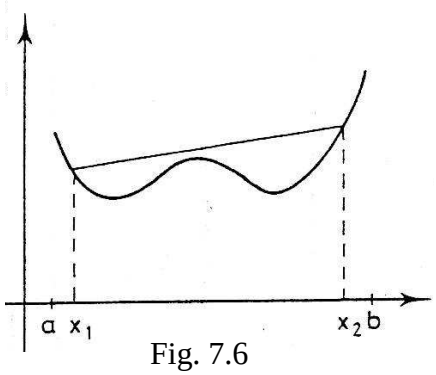


Fig. 7.6

Vi vil nu se på, hvordan vi v.hj.a. differentialregning kan udtale os om krumning af grafen for en funktion.

Ligesom $f'(x_o)$ angiver "ændringshastigheden" af funktionen f i punktet x_o, således angiver $f''(x_o)$, hvor hurtigt differentialkvotienten (den afledede funktion) f' ændres i x_o.
Hvis $f''(x) > 0$ for alle x i et interval I, så er funktionen f' voksende i I, dvs. "ændringshastigheden" forøges i intervallet I. Tangenten til grafen for f får altså større og større hældningskoefficient, hvormed vi ser, at grafen krummer opad (funktionen er konvex) i intervallet I (se figur 7.7 a)).
Tilsvarende vil grafen få mindre og mindre hældningskoefficient i et interval J, hvis $f''(x) < 0$ for alle $x \in J$, hvormed vi ser, at grafen krummer nedad (funktionen er konkav) i J (se figur 7.7.a)).

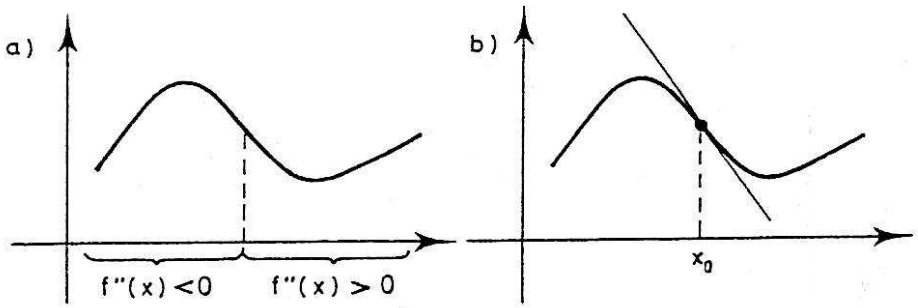


Fig. 7.7

I et punkt x_o, hvor $f''(x_o) = 0$, og hvor $f''(x)$ har forskelligt fortegn på hver sin side af x_o, kaldes tangenten til grafen for f i punktet $(x_o , f(x_o))$ for en vendetangent for grafen , og punktet x_o kaldes et inflexionspunkt for funktionen (se figur 7.7 b)).
Der gælder altså følgende sætning:

Sætning 7.20.
Krumningen af grafen for en funktion f kan fastlægges ud fra fortegnene for den anden afledede f'', idet der gælder følgende:

a) Hvis $f''(x) > 0$ for alle x i et interval, så er f konvex (progressiv) i dette interval.
b) Hvis $f''(x) < 0$ for alle x i et interval, så er f konkav (degressiv) i dette interval.
c) Hvis $f''(x_o) = 0$ i et punkt x_o, og hvis $f''(x)$ har forskelligt fortegn på hver sin side af x_o, så er der vendetangent for grafen i punktet $(x_o , f(x_o))$.

Eksempel 7.21.
Hvis s(t) angiver den strækning, som en bil har kørt ud af en given vej til tiden t, så har vi tidligere set (eksempel 4.18), at $s'(t)$ angiver hastigheden til tiden t, og at $s''(t)$ angiver accelerationen til tiden t.
Betragt figur 7.8, som viser grafen for en sådan funktion s(t). Vi ser her, at hældningskoefficienten for tangenten, dvs. hastigheden, øges indtil tidspunktet t_o, hvorefter den aftager igen. Den maksimale hastighed opnås således til tiden t_o.

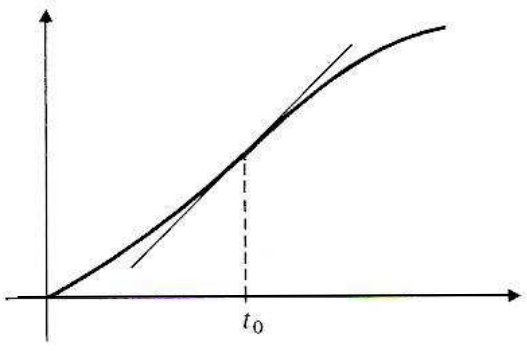


Fig. 7.8

Accelerationen $s''(t)$ er derfor positiv indtil t_o, og negativ derefter (svarende til at funktionen s er progressiv indtil t_o, og derefter degressiv). Funktionen s har altså et inflexionspunkt i t_o, og grafen for s har en vendetangent i punktet $(t_o\ ,\ s(t_o))$.
(Man træder m.a.o. på speederen indtil tiden t_o, hvorefter denne slippes, og bremsen anvendes i stedet for (eller gnidningsmodstanden får bilens hastighed til at falde)). ♥

Eksempel 7.22.
Vi vil bestemme monotoniforhold og krumningsforhold for funktionen:

$$f(x) = -\tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{3}{2}x^2 - \tfrac{5}{2}x + 2$$

Vi finder først den afledede funktion: $f'(x) = -\tfrac{1}{2}x^2 + 3x - \tfrac{5}{2}$

Dernæst finder vi nulpunkter for f' (kontrollér !):

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\tfrac{1}{2}x^2 + 3x - \tfrac{5}{2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 \ \vee \ x = 5$$

Da f' er et andengradspolynomium, hvis graf vender benene nedad, får vi i alt følgende fortegnsvariation for f':

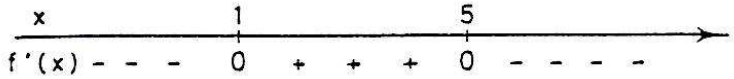


Fig. 7.9

hvormed vi ser, at:

f er aftagende i $]-\infty;1]$, f er voksende i $[1;5]$, f er aftagende i $[5;\infty[$

Ved at differentiere en gang til får vi:

$$f''(x) = -x + 3 \qquad \text{og dermed:} \qquad f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3$$

Fortegnsvariationen for f'' ser altså således ud:

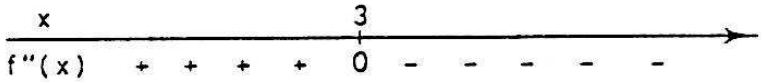


Fig. 7.10

hvormed vi ser, at:

f er konvex i $]-\infty;3]$,
f er konkav i $[3;\infty[$,
f har inflexionspunkt i 3

Grafen for f, der ses tegnet på figur 7.11, har altså en vendetanget i (3, f(3)). ♥

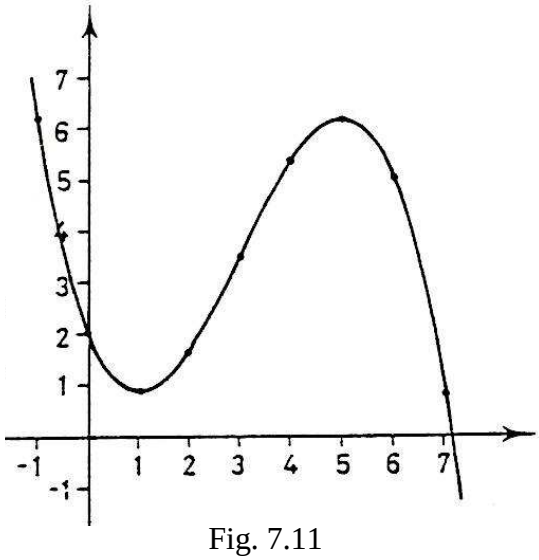


Fig. 7.11

Øvelse 7.23.

Lad funktionen f være givet ved forskriften: $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2$, $x \in]-4;2[$

a) Find $f'(x)$ og $f''(x)$.
b) Bestem monotoniforholdene for f.
c) Bestem krumningsforholdene for f.
d) Tegn grafen for f på grundlag af en række relevante støttepunkter
e) Indtegn tangenten i punktet (–1, f(–1)) – og argumentér for, at det er en vendetangent.
f) Bestem Vm(f). ♥

I forlængelse af eksempel 7.22 og øvelse 7.23 foretages i det følgende eksempel en generel behandling af 3.gradspolynomier, hvor det vises, at der findes 6 forskellige typer 3.gradspolynomier.

Eksempel 7.24.

Betragt et trediegradspolynomium $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, hvor a, b, c og d er konstanter ($a \neq 0$). Vi ser, at $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ er et andengradspolynomium. Fortegnsvariationen for f' – og dermed monotoniforholdene for f – afhænger derfor dels af fortegnet for 3a (og dermed for a), dels af antallet af rødder i dette andengradspolynomium.
Der er her seks principielt forskellige muligheder:

a) a > 0, f' har ingen rødder:
b) a > 0, f' har én rod :
c) a > 0, f' har to rødder:
d) a < 0, f' har ingen rødder:
e) a < 0, f' har én rod:
f) a < 0, f' har to rødder:

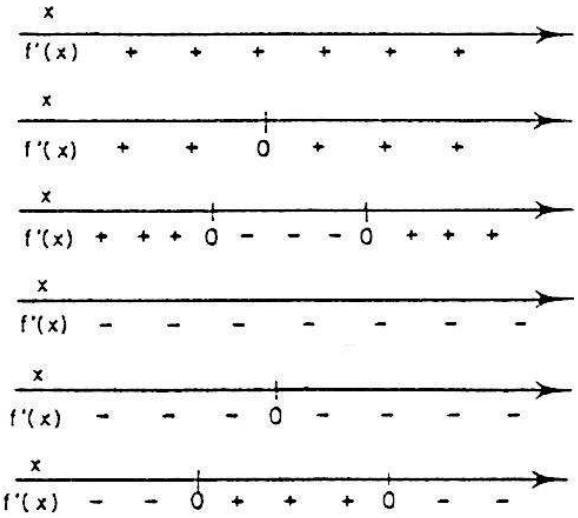


Fig. 7.12

Udover monotoniforhold for f ser vi også på krumningsforhold. I denne sammenhæng finder vi:
$f''(x) = 6ax + 2b$, hvormed vi ser (kontrollér !), at:

1) Når a > 0, så er $f''(x) > 0$ for $x > -\frac{b}{3a}$ og $f''(x) < 0$ for $x < -\frac{b}{3a}$

   Grafen for f er altså konkav til venstre for $x_o = -\frac{b}{3a}$ og konvex til højre for $x_o = -\frac{b}{3a}$

2) Når a < 0, så er $f''(x) > 0$ for $x < -\frac{b}{3a}$ og $f''(x) < 0$ for $x > -\frac{b}{3a}$

   Grafen for f er altså konvex til venstre for $x_o = -\frac{b}{3a}$ og konkav til højre for $x_o = -\frac{b}{3a}$

Kombineres monotoniforhold og krumningsforhold ser vi, at der er seks principielt forskellige typer trediegradspolynomier som skitseret på figur 7.13:

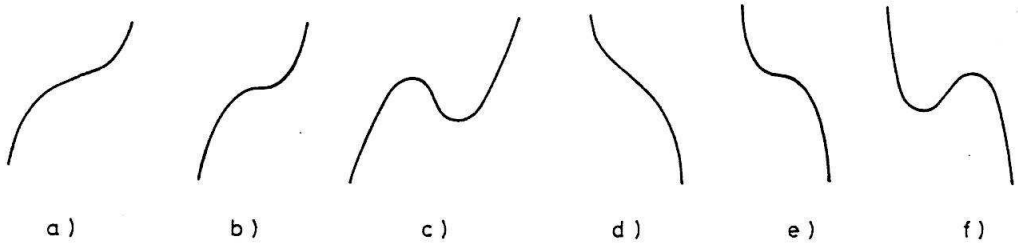


Fig. 7.13

hvor situationerne a) – f) på figuren svarer til situationer a) – f) ved monotoniforholdene ovenfor. ♥

Differentialer.

På side 38 så vi, at differenskvotienten $\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$ for en funktion f kan angives ved:

$$\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} = \frac{f(x_o+\Delta x)-f(x_o)}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

hvor $\Delta x = x - x_o$ betyder tilvæksten i den uafhængige variable x og $\Delta f = f(x_o+\Delta x)-f(x_o)$ er den tilsvarende tilvækst i den afhængige variable.

Og hvis f er differentiabel i x_o, så gælder der: $\frac{\Delta f}{\Delta x} \to f'(x_o)$ for $\Delta x \to 0$

Vi kan således sige, at når Δx er meget lille, så er $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ tæt på $f'(x_o)$, dvs. Δf er tæt på $f'(x_o)\cdot\Delta x$.

Vi kan altså skrive:

$$\Delta f \approx f'(x_o)\cdot\Delta x \quad \text{når} \quad \Delta x \approx 0$$

og "næsten-lig-med" tegnet ≈ kan erstattes med et egentligt lighedstegn, når Δx, og dermed Δf, bliver "uendelig lille".

Som "uendelig små" størrelser anføres Δx og Δf ved hhv. dx og df. Vi får hermed, at:

$$df = f'(x_o)\cdot dx \quad \text{og} \quad \frac{df}{dx} = f'(x_o)$$

Størrelsen df kaldes differentialet af f med udgangspunkt x_o – og det kan også skrives: $df(x_o)$

Størrelsen dx kaldes differentialet af x.

Vi ser således, at $f'(x_o) = \frac{df}{dx}$ er en "brøk" (en kvotient) imellem to differentialer, hvilket også ligger i navnet: differentialkvotient. (Jfr. omtalen s. 74).

Hvis y = f(x), så sætter vi $dy = df(x_o)$, hvormed vi får:

$$dy = f'(x_o)\cdot dx \quad \text{og} \quad \frac{dy}{dx} = f'(x_o)$$

Differentialet dy (= df) angiver altså, hvor stor en tilvækst vi får i funktionsværdien, når vi ud fra x_o giver x-værdien den differentielle tilvækst dx. Og af udtrykket $dy = f'(x_o) \cdot dx$ ser vi, at dy er $f'(x_o)$ gange så stor som dx. Dette svarer geometrisk til – som antydet på figur 7.14 –, at hældningskoefficienten for tangenten er forholdet mellem dy og dx.

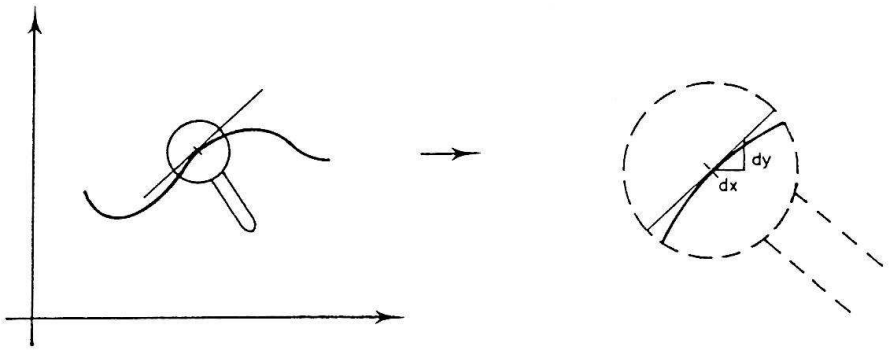


Fig. 7.14

Eksempel 7.25.

a) Om funktionen $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ gælder, at: $df = \frac{1}{2}dx$, dvs. differentialet af f er det halve af differentialet af x. (Overvej den geometriske betydning af dette !).

b) Differentialet af funktionen $g(x) = \frac{1}{4}x^2 - 3$ er med udgangspunkt i $x_o = 4$ givet ved:

$$dg = g'(4) \cdot dx = 2dx$$

dvs. differentialet af g med udgangspunkt i 4 er det dobbelte af dx.
(Overvej den geometriske betydning af dette). ♥

At vi vil beskæftige os med differentialer skyldes først og fremmest, at man ofte med fordel kan betragte udtrykket

$$\Delta f \approx f'(x_o) \cdot \Delta x \quad \text{når} \quad \Delta x \approx 0$$

som værende lig med udtrykket:

$$df = f'(x_o)\,dx$$

Vi kan da enten

- ud fra en given funktion f finde $f'(x_o)$ og dermed tilvæksten i funktionsværdien svarende til en meget lille tilvækst i x, eller
- vi kan finde et udtryk for f' ud fra en given sammenhæng mellem Δf og Δx , hvor $\Delta x \approx dx$, dvs. hvor Δx er meget lille, og hvor $\Delta f \approx df$. – og ud fra dette udtryk kan vi ofte bestemme f.

Eksempel 7.26.

Betragt en kobberklods, der for nemheds skyld antages at have form som en terning. Hvis vi opvarmer sådan en klods, så vil den udvide sig (i alle retninger).
Kaldes sidelængden af klodsen x, så er klodsens rumfang $r(x) = x^3$.
Hvis vi nu p.gr.a. opvarmning får en lille længdeudvidelse Δx af hver side, så vil rumfanget forøges med Δr givet ved:

$$\Delta r \approx 3x^2 \cdot \Delta x.$$

Dette ses af, at når Δx er lille, så har vi: $\Delta x \approx dx$ og $\Delta r \approx dr$, hvorefter formlen:

$$dr(x) = r'(x)dx \qquad \text{dvs.} \quad dr(x) = 3x^2 dx$$

giver det ønskede.

Hvis siden x er 30 cm og den f.eks. forøges med 0,01 cm, så forøges rumfanget med:

$$\Delta r \approx 3 \cdot 30^2 \cdot 0{,}01 = 27$$

dvs. rumfanget forøges med cirka 27 cm^3. ♥

Øvelse 7.27.
Radius i en given metalkugle er 5 cm. Kuglen sprøjtemales og får derved et 0,02 cm tykt lag maling. Beregn, hvor meget rumfanget af kuglen forøges, og dermed hvor mange cm^3 maling, der anvendes. Udregn resultatet såvel v.hj.a. differentialer som v.hj.a. rumfanget efter maling minus rumfanget før – og diskutér forskellen. ♥

Eksempel 7.28.
Vi betragter i dette eksempel en gærcellepopulation, som vokser ved celledeling under optimale vilkår (fastlagt ved korrekt temperatur, rigelig næringsmængde og plads, ringe koncentration af affaldsstoffer o.lign.).

Til et givet tidspunkt t har vi N(t) gærceller pr. ml i en næringsopløsning. Når der sker en lille tilvækst Δt i tiden, så forøges antallet af gærceller p.gr.a. celledelingen.
Lad ΔN betegne tilvæksten i antallet af gærceller i løbet af tidsintervallet Δt. Når Δt er "lille" (set i fht. den "hastighed" hvormed cellerne deler sig), så er ΔN tilnærmelsesvist proportional med både N(t) og med Δt (overvej !). Vi får dermed, at:

$$\Delta N \approx r \cdot N(t) \cdot \Delta t \qquad \text{når} \quad \Delta t \approx 0$$

hvor r er en positiv proportionalitetsfaktor. (r beskriver sandsynligheden for celledeling pr. celle pr. tidsenhed).
Ved division med Δt på begge sider af lighedstegnet får vi differenskvotienten for N(t), og ved at lade Δt gå mod 0 (Δt er "lille") får vi som omtalt ovenfor, at tegnet $\approx$ erstattet af et lighedstegn samtidig med, at differenskvotienten bliver til differentialkvotienten.

Funktionen N(t), som beskriver antallet af gærceller pr. ml til tiden t, opfylder altså ligningen:

$$\frac{dN}{dt} = r \cdot N(t) \qquad \text{som også kan skrives:} \qquad N'(t) = r \cdot N(t)$$

Vi få altså opstillet en ligning, hvor den ubekendte er funktionen N, som man gerne vil bestemme. Løsning af sådanne ligninger hører imidlertid ikke hjemme her (se f.eks. i bogen "Matematik for Gymnasiet. Differentialligninger og matematiske modeller"). Men for læsere, der har lært om eksponentialfunktioner kan det fortælles, at løsningen til den anførte ligning bliver, at funktionen N er givet ved: $N(t) = N_o \cdot e^{rt}$, hvor N_o er antallet af gærcellen til tiden t = 0.

Det skal bemærkes, at denne model for en gærcelle-populations vækst kun gælder ved optimale vilkår. Hvis der bliver pladsmangel, næringsmangel, for høj koncentration af affaldsstoffer eller en forkert temperatur, vil reproduktionsraten (dvs. det enkelte "individs" evne til reproduktion pr. tidsenhed) begynde at aftage. Men dette vil vi ikke komme yderligere ind på her. ♥

Der kan gives en mere præcis og "matematisk korrekt" definition af differentialer end den ovenfor anvendte. Men da den til gengæld gør det hele mere "teoretisk" uden egentligt at bidrage væsentlig til forståelsen i forbindelse med vores brug af differentialer, udelades den her.

Stamfunktioner.

Vi slutter dette kapitel med en kort omtale af, hvad man kunne kalde den "modsatte" regningsart til differentiation, nemlig at finde en stamfunktion til en given funktion, dvs. at finde en funktion, som differentieret giver den funktion, vi allerede har. (Emnet behandles indgående i bogen "Matematik for Gymnasiet. Integralregning. Teori, anvendelser og modeller").

Definition 7.29.
En funktion F siges at være *stamfunktion* til en funktion f i et interval I, hvis: $F'(x) = f(x)$ for alle $x \in I$ (altså hvis F differentieret giver f).
Hvis x er et intervalendepunkt for I, som er med i I, så er det underforstået, at der er tale om $F'_+(x)$ eller $F'_-(x)$

Eksempel 7.30.

a) Funktionen $F(x) = 2\sqrt{x}$ er stamfunktion til funktionen $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ i R_+, idet der for alle positive tal x gælder, at $F'(x) = f(x)$, dvs. $(2\sqrt{x})' = \frac{1}{\sqrt{x}}$

Men bemærk, at funktionerne: $2\sqrt{x} - 3$, $2\sqrt{x} - \frac{1}{2}$ og $2\sqrt{x} + 1001$ ligeledes er stamfunktioner til f(x), idet det konstante led forsvinder ved differentiationen.

b) Funktionen $\frac{1}{4}x^4$ er stamfunktion til funktionen x^3, idet $(\frac{1}{4}x^4)' = x^3$ ♥

Øvelse 7.31.
Bestem en stamfunktion til hver af funktionerne:
a) $f(x) = x^2$ b) $f(x) = 0$ c) $f(x) = x^8$ d) $f(x) = 12$ e) $f(x) = 2x - 1$ ♥

Øvelse 7.32.
Bestem en stamfunktion til:
a) $f(s) = \frac{1}{2}s^2$ b) $g(p) = -2p + 300$ c) $h(y) = 5y^8 - 3y^2$ ♥

Øvelse 7.33.
Argumentér for, at $\frac{1}{n+1}x^{n+1}$ er en stamfunktion til funktionen x^n for alle hele tal $n \neq -1$. ♥

Som omtalt i eksempel 7.30 gælder der, at hvis en funktion f har en stamfunktion F, så er alle funktioner af typen F + k , hvor k er en konstant, også stamfunktioner til f.
I den forbindelse kan man bevise følgende sætning:

Sætning 7.34.
Hvis en funktion f har en stamfunktion F i et interval I, så har den uendeligt mange stamfunktioner.
Og samtlige stamfunktioner til f i intervallet I er af formen: F + k, hvor k er en konstant.

Herudfra kan man bevise, at der gælder følgende sætning:

Sætning 7.35.
Lad f være en funktion, som i et interval I har en stamfunktion F, og lad $(x_o\,,\,y_o)$ være et punkt i planen, hvor $x_o \in I$.
Da har f netop én stamfunktion i I, hvis graf går igennem punktet $(x_o\,,\,y_o)$.

Eksempel 7.36.
Vi vil finde en stamfunktion F til funktionen $f(x) = \sqrt{x}$ i intervallet $I = R_+$, så grafen for F går igennem punktet (4,7), dvs. som opfylder, at F(4) = 7.
Da funktionen $\frac{2}{3}x\sqrt{x}$ er en stamfunktion til f (kontrollér !) får vi ifølge sætning 7.34, at der findes en konstant k, så $F(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + k$. Da F(4) = 7 findes k således: $7 = \frac{2}{3}\cdot 4\cdot\sqrt{4} + k \Leftrightarrow k = \frac{5}{3}$
Vi finder altså, at: $F(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + \frac{5}{3}$, $x \in R_+$ ♥

Øvelse 7.37.
Bestem den stamfunktion Q til funktionen: $q(x) = x + \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x > 0$, som opfylder, at Q(4) = 10 ♥

Til opskrivning af stamfunktioner anvendes almindeligvis det såkaldte integraltegn, som anført i følgende definition:

Definition 7.38.
Som betegnelse for en (vilkårlig) stamfunktion til en given funktion f anvendes ofte symbolet:

$$\int f(x)dx$$

$\int f(x)dx$ kaldes også for et *ubestemt integrale* af f ,
og når vi finder en stamfunktion til f så siger vi, at *integrerer* f.
I opskrivningen af integralet kaldes funktionen f ofte for *integranden.*

Fordelen ved betegnelsen $\int f(x)dx$ for en stamfunktion til f (frem for at kalde den F) er, at man i udtrykket $\int f(x)dx$ kan se, hvilken funktion f vi finder stamfunktionen til. Vi kan derfor f.eks. skrive: $\int 2\sqrt{x}\,dx = \frac{1}{\sqrt{x}}$ i stedet for: $F(x) = 2\sqrt{x}$ er en stamfunktion til $\frac{1}{\sqrt{x}}$

Indholdet i definition 7.38 kan også formuleres således:
Hvis F er en stamfunktion til f i et interval I, så skriver vi $F(x) = \int f(x)dx$ og vi siger, at *F fremkommer ved at integrere f.* $\int f(x)dx$ er altså en funktion (en stamfunktion til f).

Af definition 7.38 ser vi, at der gælder følgende:

$$(*)\quad \int f(x)dx = F(x) \Leftrightarrow F'(x) = f(x) \qquad \text{og} \qquad (**)\quad \left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$$

Reglerne (∗) og (∗∗) kaldes ofte ***integrationsprøven***, idet man kan bruge disse til at kontrollere, om det er korrekt, at en given funktion har en anden given funktion som stamfunktion.
Bemærk, at hvis f er en differentiabel funktion, så er f en stamfunktion til f', dvs.

$$\int f'(x)dx = f(x)$$

Vi kan heraf se, hvorfor man ofte siger, at integration er den modsatte "regningsart" af differentiation.

Eksempel 7.39.

a) Funktionen $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ er stamfunktion til funktionen $f(x) = x^2$, idet der gælder:

$$F'(x) = (\tfrac{1}{3}x^3)' = x^2 = f(x)$$

Vi kan derfor skrive: $\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3$

Funktioner som: $\frac{1}{3}x^3 + 2$, $\frac{1}{3}x^3 - \sqrt{5}$, $\frac{1}{3}x^3 + 108{,}6$ – eller generelt: $\frac{1}{3}x^3 + k$ – er også stamfunktioner til x^2, idet det konstante led forsvinder ved differentiation (jfr. sætning 7.34).
Vi bør derfor skrive: $\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + k$, hvor k er en vilkårlig ("arbitrær") konstant. ♥

Øvelse 7.40.
Bestem følgende ubestemte integraler:

a) $\int x^8 dx$ b) $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ c) $\int 5\,dx$ ♥

I forlængelse af eksempel 7.39 og sætning 7.34 skal det igen fremhæves, at der til enhver stamfunktion kan lægges en vilkårlig konstant, idet denne forsvinder ved differentiation.
En stamfunktion til en given funktion er altså ikke helt entydig fastlagt.
Værdien af konstanten kan i en konkret situation fastlægges ud fra kendskab til en funktionsværdi for stamfunktionen (jfr. sætning 7.35, eksempel 7.36 m.fl. samt nedenstående øvelse 7.41).

Øvelse 7.41.
Bestem til hver af de følgende funktioner en stamfunktion, hvis graf går igennem punktet: (3,10)

a) $f(x) = x^2$ b) $f(x) = 1{,}6x + x^3$ c) $f(x) = 3\sqrt{x}$ ♥

Til hjælp ved bestemmelse af stamfunktioner (ubestemte integraler) gælder en række regneregler, hvor vi hér kun vil omtale de mere simple af dem (som vi faktisk allerede stiltiende har brugt):

Sætning 7.42.
Lad f og g være to funktioner, der har stamfunktionerne $F(x) = \int f(x)\,dx$ og $G(x) = \int g(x)\,dx$ og lad $k \in R$ være en konstant. Der gælder da følgende regler:

a) $\int k \cdot f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$

b) $\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

c) $\int (f(x) - g(x))\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx$

Bevis:
De tre regler følger af, at når F og G er stamfunktioner til f og g, så er kF, F + G og F – G stamfunktioner til hhv. kf, f + g og f – g. Og dette gælder, idet :

$$\begin{aligned}(kF)'(x) &= k \cdot F'(x) = k \cdot f(x)\\ (F+G)'(x) &= F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x)\\ (F-G)'(x) &= F'(x) - G'(x) = f(x) - g(x)\end{aligned}$$ ♥

Eksempel 7.43
Ved anvendelse af de tre regler i sætning 7.42 ser vi f.eks., at:

$$\begin{aligned}\int (\tfrac{1}{2}x^5 - 2x^4 + 9x^2 - 7)\,dx &= \int \tfrac{1}{2}x^5\,dx - \int 2x^4\,dx + \int 9x^2\,dx - \int 7\,dx\\ &= \tfrac{1}{2}\int x^5\,dx - 2\cdot\int x^4\,dx + 9\cdot\int x^2\,dx - 7x\\ &= \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{6}x^6 - 2\cdot\tfrac{1}{5}x^5 + 9\cdot\tfrac{1}{3}x^3 - 7x\\ &= \tfrac{1}{12}x^6 - \tfrac{2}{5}x^5 + 3x^3 - 7x\end{aligned}$$

hvor vi også har benyttet formlen i øvelse 7.33: $\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$ samt det faktum, at en stamfunktion til en konstant er konstanten gange den variable.
Det skal bemærkes, at med lidt øvelse kan man springe direkte fra første til sidste led i den ovenstående omskrivning. ♥

Øvelse 7.44.
Udregn følgende ubestemte integraler:

a) $\int (x^3 - 2x^2 + 5x + 1)\,dx$ b) $\int \frac{2x-1}{\sqrt{x}}\,dx$ ♥

Læsere, der måtte ønske at gå dybere i emnet "integration", henvises som omtalt til bogen: "Matematik for Gymnasiet. Integralregning. Teori, anvendelser og modeller".

Kapitel 8: Lidt om grænsebetragtninger, asymptotiske forhold og funktionsundersøgelse.

Vi skal i dette kapitel studere nogle yderligere egenskaber, som funktioner kan have, og se, hvorledes disse egenskaber giver sig til kende ved funktionernes grafer.

f(x) for x gående mod $x_o \notin$ Dm(f)

Vi starter med at undersøge, hvad der kan ske, hvis en funktion f er defineret til højre eller til venstre (eller til begge sider) for et punkt x_o, men ikke i x_o selv (dvs. $x_o \notin$ Dm(f)).

Eksempel 8.1.

Betragt funktionen $f(x) = \frac{2x}{x-2}$. Vi ser, at f er defineret omkring 2, men ikke i 2 selv.

Vi ser også, at hvis x nærmer sig 2 fra højre, så kommer nævneren $x - 2$ tættere og tættere på 0, og $x - 2$ er hele tiden positiv. Tælleren 2x nærmer sig derimod til 4. Når x nærmer sig 2 fra højre, må f(x) derfor blive større og større (se eksempler i denne tabel):

x	3	2,5	2,1	2,0001
f(x)	6	10	42	40002

Vi kan således få f(x) lige så stor vi vil, blot x ligger tilstrækkeligt tær på 2 (og $x > 2$).

I denne situation vil vi derfor tillade os at skrive: $f(x) \to \infty$ for $x \to 2+$

Tilsvarende ser vi, at: $f(x) \to -\infty$ for $x \to 2-$

idet når x nærmer sig 2 fra venstre, så nærmer $x - 2$ sig til 0 gennem negative værdier, hvorimod tælleren igen nærmer sig til det positive tal 4. (Grafen for f ses på figur 8.5 side 93). ♥

Som i eksempel 8.1 vil vi i almindelighed sige om en funktion f, at:
f(x) går mod uendelig for x gående mod x_o fra højre, hvilket skrives: $f(x) \to \infty$ for $x \to x_o+$, hvis f(x) kan blive vilkårligt stor, når blot x ligger tilstrækkeligt tæt ved x_o (og $x > x_o$) (Se figur 8.1)

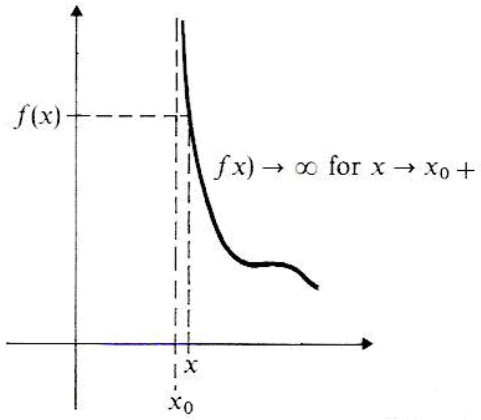


Fig. 8.1

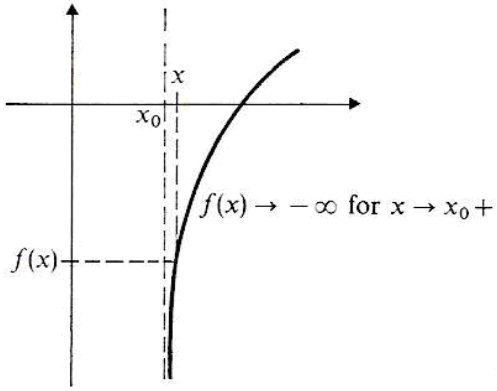


Fig. 8.2

Udtrykkene
$f(x) \to -\infty$ for $x \to x_o+$ (se figur 8.2),
$f(x) \to \infty$ for $x \to x_o-$ og
$f(x) \to -\infty$ for $x \to x_o-$
har en tilsvarende betydning.

Hvis $f(x) \to \infty$ for $x \to x_o+$

og $f(x) \to \infty$ for $x \to x_o-$

(se figur 8.3), så skriver vi kort:

$f(x) \to \infty$ for $x \to x_o$

Og tilsvarende betydning tillægges udtrykket:
$f(x) \to -\infty$ for $x \to x_o$

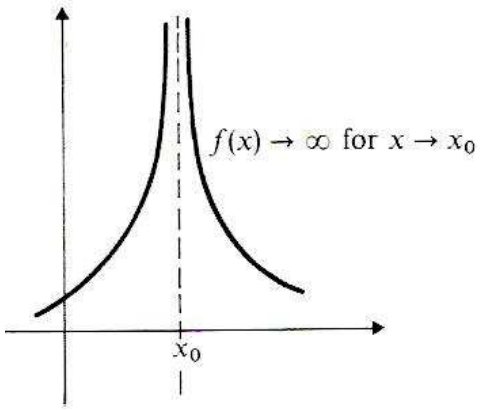


Fig. 8.3

Vi bemærker, at hvis $f(x) \to \infty$ for $x \to x_o+$ (eller lignende), så vil grafen for f "i det fjerne" nærme sig til linien med ligningen $x = x_o$. Denne linie kaldes da en lodret asymptote for grafen.

Eksempel 8.2.
En mere præcis definition af f.eks.: $f(x) \to \infty$ for $x \to x_o+$ kan gives på følgende måde:

Hvis det for et vilkårligt stort tal K er muligt at finde en omegn $\omega_+(x_o)$ til højre for x_o, hvorom der gælder, at:

$$x \in \omega_+(x_o) \Rightarrow f(x) > K$$

så siger vi, at f(x) går imod uendelig for x gående mod x_o fra højre. ♥

Øvelse 8.3.
a) Angiv i lighed med eksempel 8.2 en definition for: $f(x) \to -\infty$ for $x \to x_o+$
b) Opskriv såvel definitionen i eksempel 8.2 som i pkt. a) ved hjælp af kvantorer (se kapitel 1). ♥

Øvelse 8.4.
Argumentér for, at det om funktionen $h(x) = \frac{1}{(x-3)^2}$ gælder, at $h(x) \to \infty$ for $x \to 3$ ♥

Eksempel 8.5.
Betragt funktionen $g(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - 3x}{2x^2 - 7x + 3}$

Da andengradspolynomiet $2x^2 - 7x + 3$ har rødderne $\frac{1}{2}$ og 3, kan dette polynomium omskrives til $2x^2 - 7x + 3 = 2(x - \frac{1}{2})(x - 3)$. Funktionen g er altså defineret for alle x undtagen $\frac{1}{2}$ og 3.

Trediegradspolynomiet $x^3 - 2x^2 - 3x$ kan omskrives ved at sætte x udenfor en parentes og faktorisere det andengradspolynomium, der fremkommer inde i parentesen. Vi får (kontrollér !), at:

$$x^3 - 2x^2 - 3x = x(x+1)(x-3).$$

Forskriften for funktionen g kan hermed omskrives til følgende:

$$g(x) = \frac{x\cdot(x+1)\cdot(x-3)}{2\cdot(x-\frac{1}{2})\cdot(x-3)} \quad , \quad x \in R \setminus \left\{\tfrac{1}{2}, 3\right\}$$

Vi bemærker dels, at både tæller og nævner er 0, når x = 3, dels at hvis $x \neq 3$, så kan parentesen $(x-3)$ forkortes væk. For $x \neq 3$ har vi altså:

$$g(x) = \frac{x\cdot(x+1)\cdot(x-3)}{2\cdot(x-\frac{1}{2})\cdot(x-3)} = \frac{x\cdot(x+1)}{2\cdot(x-\frac{1}{2})}$$

Vi vil undersøge g(x) for $x \to 3$. I den situation kommer x tæt på 3, men x bliver aldrig 3. Vi kan derfor bruge den forkortede funktionsforskrift for g, og da den er kontinuert i 3 får vi, at:

$$g(x) \to \frac{3\cdot(3+1)}{2\cdot(3-\frac{1}{2})} \quad \text{for } x \to 3, \qquad \text{dvs.} \qquad g(x) \to \tfrac{12}{5} \quad \text{for } x \to 3$$

Bemærk, at en funktion således ikke behøver at gå mod uendelig eller minus uendelig ved et punkt, hvor funktionen ikke er defineret !!

Vi afsætter nu tallene –1, 0, $\frac{1}{2}$ og 3 på en tallinie. Ved at se på det uforkortede udtryk for g(x) kan vi vurdere fortegnene for g(x) i hvert område (interval) på tallinien, som herved fremkommer:

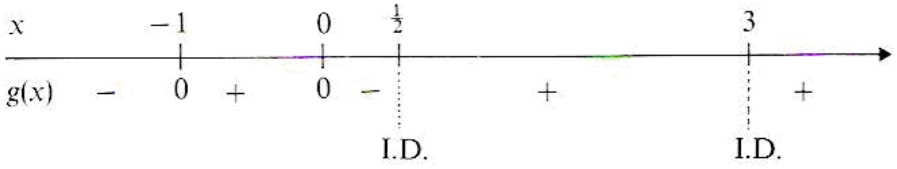


Fig. 8.4

At der f.eks. står + imellem –1 og 0 ses således:
Imellem –1 og 0 er x negativ, x + 1 er positiv, x – 3 er negativ og $x - \frac{1}{2}$ er negativ. I udtrykket for g(x) indgår derfor ét positivt led (udover 2), samt fire negative led.

Udover at vi kan se, om grafen for f ligger over eller under 1.aksen, så kan vi også bruge denne fortegnsvariation til at undersøge g(x) for x gående mod $\frac{1}{2}$.

Det fremgår af den uforkortede forskrift, at nævneren går mod 0 og tælleren går mod $-\frac{15}{8}$, når x går mod $\frac{1}{2}$ (kontrollér !). Dette giver os, at $|g(x)|$ går mod uendelig for x gående mod $\frac{1}{2}$. Hvis vi kombinerer dette med fortegnsvariationen for g(x), så ser vi, at:

$$g(x) \to \infty \quad \text{for } x \to \tfrac{1}{2}+ \quad \text{og} \quad g(x) \to -\infty \quad \text{for } x \to \tfrac{1}{2}-$$

Grafen for g ses på figur 8.16 side 102. ♥

Vi har altså set, at der er mindst to muligheder for f(x), når x går imod x_o, hvor $x_o \notin$ Dm(f):

- f(x) går numerisk mod uendelig for x gående mod x_o
- f(x) nærmer sig et bestemt tal (har en grænseværdi) for x gående mod x_o

Dette sidste ser vi også ved differentiabilitet. Hvis en funktion h er differentiabel i et punkt x_o, så er funktionen $f(x) = \dfrac{h(x)-h(x_o)}{x-x_o}$ ikke defineret i x_o, men alligevel har vi, at $f(x) \to h'(x_o)$ for $x \to x_o$.

f(x) for x gående mod uendelig eller minus uendelig.

Vi vil nu se på, hvad der kan ske med en funktion, som er defineret i et interval af typen $[\,p;\infty[$, $]\,p;\infty[$, $]-\infty;q\,]$, $]-\infty;q[$ eller $]-\infty;\infty[$ (hvor p og q er givne tal) – altså en funktion, som i den ene eller i begge sider er defineret imod det uendelige.

Eksempel 8.6.

Lad os igen se på funktionen f fra eksempel 8.1, dvs. $f(x) = \frac{2x}{x-2}$.

Vi vil undersøge, hvad der sker, når x bliver numerisk stor (dvs. når $x \to \infty$ eller $x \to -\infty$).
Da vi således er borte fra x = 0, kan vi omskrive forskriften for f ved at forkorte den med x. Vi får:

$$f(x) = \frac{2x}{x-2} = \frac{2}{1-\frac{2}{x}}$$

Vi ser her, at efterhånden som $|x|$ bliver større, kommer $\frac{2}{x}$ tættere på 0, hvormed $1-\frac{2}{x}$ kommer tættere på 1. f(x) vil derfor nærme sig 2, når x bliver numerisk stor. (Se den følgende tabel).

x	4	10	50	100	1000	10000
f(x)	4	2,5	2,08	2,04	2,004	2,0004

x	– 4	– 10	– 50	– 100	– 1000	– 10000
f(x)	1,33	1,67	1,92	1,96	1,996	1,9996

Vi ser således bl.a., at vi kan få f(x) lige så tæt på 2, som vi vil, blot vi vælger x tilstrækkeligt stor.
Vi vil derfor sige, at f(x) går mod 2 for x gående mod uendelig, hvilket skrives:

$$f(x) \to 2 \text{ for } x \to \infty \qquad \text{eller} \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = 2$$

På nedenstående figur 8.5 ses grafen for f.

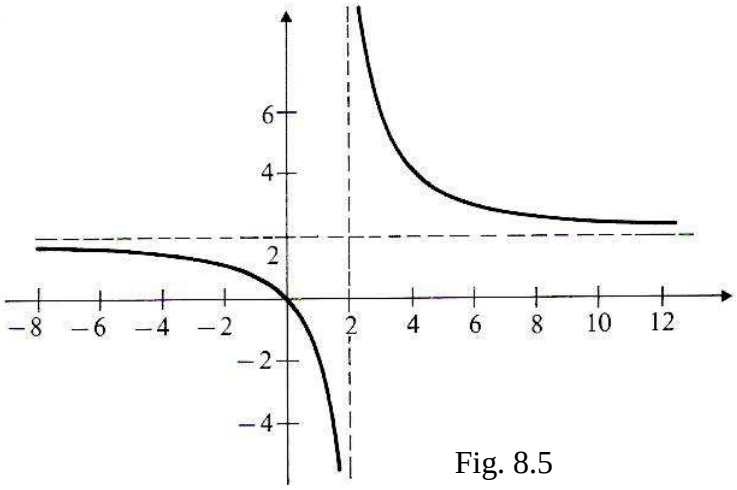


Fig. 8.5

Vi ser ligeledes, at: $f(x) \to 2$ for $x \to -\infty$ eller $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2$ ♥

Som i eksempel 8.6 vil vi i almindelighed sige om en funktion f, at f(x) går mod a for x gående mod uendelig, hvis f(x) kan komme vilkårligt tæt på a, når blot x er tilstrækkeligt stor. (Se figur 8.6). (Man siger også, at f(x) konvergerer mod a). At f(x) går imod a for x gående mod uendelig skrives:

$$f(x) \to a \text{ for } x \to \infty \qquad \text{eller} \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = a$$

Udtrykkene: $f(x) \to b$ for $x \to -\infty$ eller $\lim_{x\to-\infty} f(x) = b$ har en tilsvarende betydning (se figur 8.7).

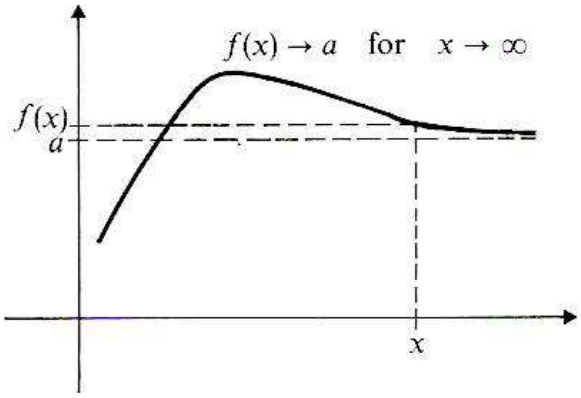


Fig. 8.6

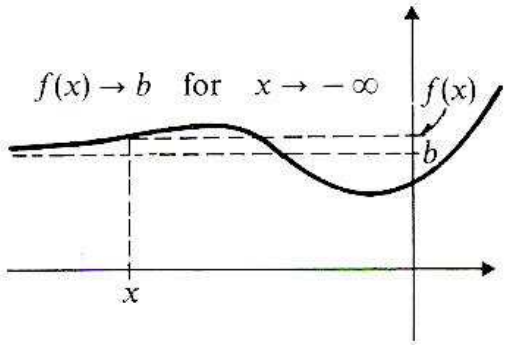


Fig. 8.7

Hvis $f(x) \to a$ for $x \to \infty$, så vil grafen for f "i det fjerne" nærme sig til linien med ligningen y = a (se figur 8.6). Denne linie kaldes en vandret asymptote til grafen for f. Og tilsvarende er linien med ligningen y = b en vandret asymptote til grafen for f, hvis $f(x) \to b$ for $x \to -\infty$.

Øvelse 8.7.

a) Angiv en præcis definition for: $f(x) \to a$ for $x \to \infty$ i lighed med definitionen i eksempel 8.2.
b) Angiv en præcis definition for: $f(x) \to b$ for $x \to -\infty$
c) Opskriv disse definitioner v.hj.a. kvantorer. ♥

Øvelse 8.8.

Argumentér for, at

a) $\frac{1}{x} \to 0$ for $x \to \infty$ b) $\frac{1}{x^2} \to 0$ for $x \to \infty$ ♥

Øvelse 8.9.

Bestem $\lim_{x\to\infty} f(x)$, idet $f(x) = \frac{3x+1}{x^2+2}$ ♥

Som man kan forvente, er det naturligvis ikke alle funktioner, som konvergerer (dvs. har en grænseværdi), når x går mod uendelig eller minus uendelig. F.eks. bliver x^3 vilkårligt stor, når x går mod uendelig.

Vi vil om en funktion f sige, at f(x) går mod uendelig for x gående mod uendelig, hvis f(x) bliver vilkårligt stor, når x bliver vilkårligt stor. (Se figur 8.8). Og vi vil da skrive:

$f(x) \to \infty$ for $x \to \infty$

En tilsvarende betydning tillægges udtrykkene:

$f(x) \to -\infty$ for $x \to \infty$
$f(x) \to \infty$ for $x \to -\infty$
$f(x) \to -\infty$ for $x \to -\infty$

Der gælder altså f.eks., at
$x^3 \to \infty$ for $x \to \infty$

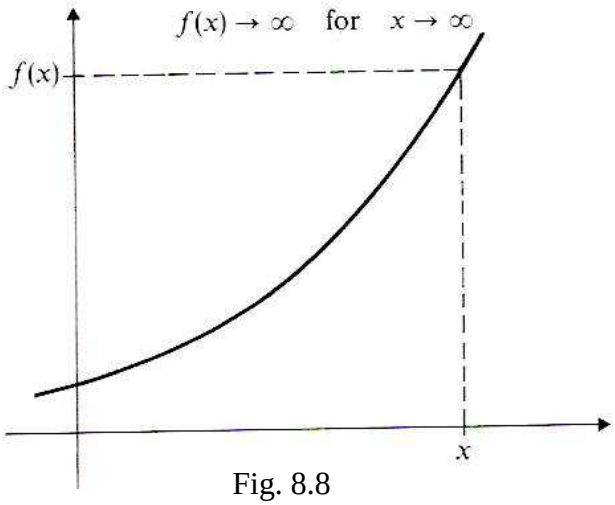


Fig. 8.8

Øvelse 8.10.
En mere præcis definition af: $f(x) \to \infty$ for $x \to \infty$ kan angives på følgende måde:
Hvis der for et vilkårligt valgt stort tal L findes et tal K, så: $x > K \Rightarrow f(x) > L$, så siger vi, at f(x) går mod uendelig for x gående mod uendelig.
Anvend denne definition til at bevise, at:

a) $x^2 \to \infty$ for $x \to \infty$
b) hvis $f(x) \to \infty$ for $x \to \infty$ og $g(x) \to \infty$ for $x \to \infty$, så har vi, at: $f(x) \cdot g(x) \to \infty$ for $x \to \infty$
c) hvis $f(x) \to \infty$ for $x \to \infty$ og $g(x) \to \infty$ for $x \to \infty$, så har vi, at: $f(x)+g(x) \to \infty$ for $x \to \infty$ ♥

Øvelse 8.11.
Angiv i hvert af nedenstående tilfælde to funktioner f og g, som begge går mod uendelig for x gående mod uendelig, og som opfylder:

a) $f(x) - g(x) \to \infty$ for $x \to \infty$
b) $f(x) - g(x) \to 3$ for $x \to \infty$
c) $\frac{f(x)}{g(x)} \to \infty$ for $x \to \infty$
d) $\frac{f(x)}{g(x)} \to \frac{1}{2}$ for $x \to \infty$

Kommentér resultaterne. ♥

Vi vil nu kort undersøge polynomier og polynomiumsbrøker for x gående mod ∞ eller $-\infty$.
Hertil behøves følgende sætning, som klart er opfyldt:

Sætning 8.12.
For ethvert naturligt tal n gælder der, at:
1) Hvis n er lige, så har vi: $x^n \to \infty$ for $x \to \infty$ og $x^n \to \infty$ for $x \to -\infty$
2) Hvis n er ulige, så har vi: $x^n \to \infty$ for $x \to \infty$ og $x^n \to -\infty$ for $x \to -\infty$
3) For alle n har vi: $\frac{1}{x^n} \to 0$ for $x \to \infty$ og $\frac{1}{x^n} \to 0$ for $x \to -\infty$

Eksempel 8.13.

Betragt funktionen: $f(x) = -3x^5 + 2x^4 - x^2 + 3x - 8$.
Umiddelbart kan vi ikke udtale os om f(x) for x gående mod ∞ eller $-\infty$ (hvorfor ikke ?). Men for $x \neq 0$ kan vi foretage følgende omskrivning (vi sætter x^5 udenfor en parentes):

$$f(x) = x^5\left(-3 + 2\cdot\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} + 3\cdot\frac{1}{x^4} - 8\cdot\frac{1}{x^5}\right)$$

Når x går mod ∞ eller $-\infty$, så går hvert af de fire sidste led i parentesen mod 0, hvormed hele parentesen går mod –3. Da $x^5 \to \infty$ for $x \to \infty$ og $x^5 \to -\infty$ for $x \to -\infty$ ser vi hermed, at

$$f(x) \to -\infty \text{ for } x \to \infty \qquad \text{og} \qquad f(x) \to \infty \text{ for } x \to -\infty \qquad \heartsuit$$

Øvelse 8.14.

Undersøg følgende funktioner f(x) for x gående mod ∞ hhv. mod $-\infty$:

a) $f(x) = 5x^4 - 2000x^4 - 120000x - 2000000$

b) $f(x) = (4x^{11} + 56x^7 - x^2 + 3)\cdot(-3x^3 + 2x - 9)$ ♥

Eksempel 8.15.

Betragt funktionen $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2}{x^2 + x + 1}$. Da tæller og nævner hver for sig går mod ∞ eller mod $-\infty$, når x går mod ∞ eller $-\infty$, kan vi ikke umiddelbart udtale os om, hvad der sker med f(x) for x gående mod ∞ eller $-\infty$ (jfr. øvelse 8.11). Vi må derfor omskrive forskriften for f.
Vi forkorter brøken med x^m, hvor m er den mindste grad af de to polynomier, dvs. med x^2. Vi får herefter for $x \neq 0$, at

$$f(x) = \frac{x + 2}{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}$$

Da $x + 2 \to \infty$ for $x \to \infty$ og $1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \to 1$ for $x \to \infty$ ser vi i alt, at

$$f(x) \to \infty \text{ for } x \to \infty$$

Tilsvarende ses, at $f(x) \to -\infty$ for $x \to -\infty$ ♥

Øvelse 8.16.

a) Vis, at det om funktionen $g(x) = \dfrac{8x^5 - 3x^4 + 2x^2 - 9}{-5x^5 + 7x^4 - 3x^3 - x^2 + 2x}$ gælder, at

$$g(x) \to -\tfrac{8}{5} \text{ for } x \to \infty \qquad \text{og} \qquad g(x) \to -\tfrac{8}{5} \text{ for } x \to -\infty$$

b) Vis, at det om funktionen $h(x) = \dfrac{x^3 - 8x^2 + 7x - 1}{3x^6 + 2x^3 - x^2 + 12}$ gælder, at

$$h(x) \to 0 \text{ for } x \to \infty \qquad \text{og} \qquad h(x) \to 0 \text{ for } x \to -\infty \qquad \heartsuit$$

Eksempel 8.17.

Vi vil bestemme monotoniforhold og værdimængde for funktionen: $f(x) = \dfrac{3x^2+3x-6}{x^2+2x+3}$.

Da ligningen $x^2+2x+3=0$ ingen løsninger har, er Dm(f) = R. Vi finder dernæst $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{(6x+3)(x^2+2x+3)-(3x^2+3x-6)(2x+2)}{(x^2+2x+3)^2} = \frac{3x^2+30x+21}{(x^2+2x+3)^2}$$

Heraf får vi (kontollér):

$$f'(x) = 0 \iff 3x^2+30x+21 = 0 \iff x=-5-3\sqrt{2} \vee x=-5+3\sqrt{2}$$

Da fortegnet for $f'(x)$ bestemmes af tælleren $3x^2+30x+21$, som er et andengradspolynomium, hvis graf vender grenene opad, får vi følgende (jfr. kapitel 6):

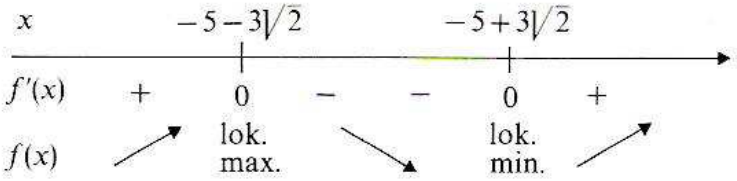


Fig. 8.9

Da $-5-3\sqrt{2} = -9,243$ og $-5+3\sqrt{2} = -0,757$ ser vi, at f er voksende i $]-\infty;-9,243]$, aftagende i $[-9,243;-0,757]$ og voksende i $[-0,757;\infty[$.

Vi ser desuden, at der er lokalt maximum i – 9,243, og det lokale maximum er f(–9,243) = 3,182, samt at der er lokalt minimum i – 0,757, og det lokale minimum er f(– 0,757) = – 3,182.

For at bestemme værdimængden mangler vi nu kun at vide, hvad der sker med f(x), når x går mod ∞ eller mod $-\infty$ (overvej !). Ved at omskrive forskriften for f på samme måde som i eksempel 8.15 får vi (for $x \neq 0$):

$$f(x) = \frac{3+\frac{3}{x}-\frac{6}{x^2}}{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}$$

hvoraf vi ser, at: $f(x) \to 3$ for $x \to \infty$ og $f(x) \to 3$ for $x \to -\infty$

Kombineres dette med monotoniforholdene, de lokale extrema samt kontinuiteten af f, ser vi, at Vm(f) = $[-3,182;3,182]$. Grafen for f ses på nedenstående figur 8.10. ♥

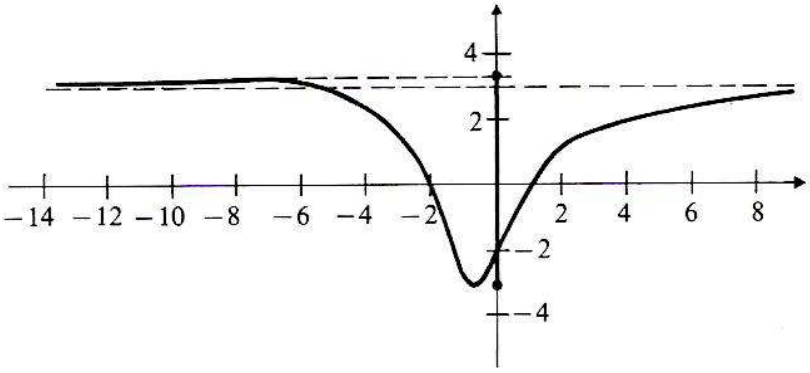


Fig. 8.10

Øvelse 8.18.
Bestem monotoniforhold og værdimængder for følgende funktioner:

a) $f(x) = \dfrac{2x}{x-2}$ b) $g(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$ c) $h(x) = \dfrac{x+2}{2x^2+3x-5}$ ♥

Asymptoter.

Vi har allerede set eksempler på asymptoter, dvs. linier som grafen for en funktion nærmer dig "i det fjerne". På side 91 så vi på en lodret asymptote, og på side 94 så vi på en vandret asymptote.

Eksempel 8.19.

Betragt funktionen: $f(x) = \dfrac{x^3+2x^2}{x^2+x+1}$

Da $x^2+x+1 > 0$ for alle x, er Dm(f) = R. Da f desuden er kontinuert, er der således ingen lodrette asymptoter for funktionen. I eksempel 8.15 undersøgte vi også funktionen f, og vi fandt da, at

$$f(x) \to \infty \text{ for } x \to \infty \quad \text{og} \quad f(x) \to -\infty \text{ for } x \to -\infty$$

Der er derfor heller ikke nogen vandrette asymptoter for funktionen (overvej !).
Men hvis vi omskriver forskriften for f v.hj.a. polynomiers division, så får vi:

$$f(x) = x + 1 - \frac{2x+1}{x^2+x+1}$$

(Læsere, der ikke kender metoden "polynomiers division", kan dels se i bogen "Matematik for Gymnasiet. Indledende funktionsteori", dels kontrollere udregningen ved at sætte på en fælles brøkstreg).

Ud fra denne forskrift ser vi, at

$$f(x) - (x+1) = -\frac{2x+1}{x^2+x+1}$$

hvormed vi får (overvej !), at

$f(x) - (x+1) \to 0$ for $x \to \infty$
$f(x) - (x+1) \to 0$ for $x \to -\infty$

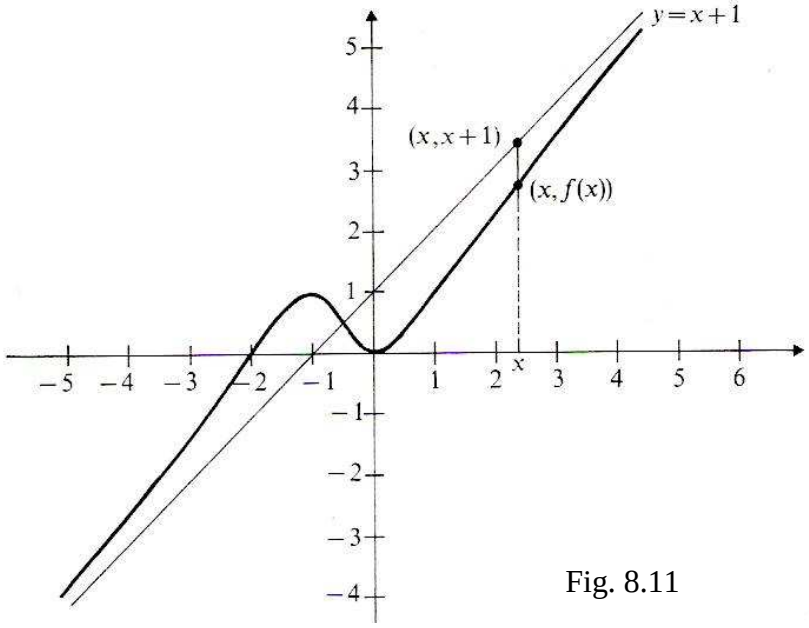


Fig. 8.11

Der gælder således (se figur 8.11), at grafen for f ligger tæt på linien med ligningen $y = x + 1$, når x er numerisk stor. (Størrelsen $|f(x) - (x+1)|$ angiver den lodrette afstand mellem punktet (x, f(x)) på grafen og det tilsvarende punkt (x,y) på linien. Og denne afstand går altså mod 0, når x går ∞ eller $-\infty$).
Vi siger derfor, at linien med ligningen $y = x + 1$ er en skrå asymptote til grafen for f for x gående mod ∞ og for x gående mod $-\infty$. ♥

Som en generalisering af det ovenstående giver vi følgende definition på asymptoter:

Definition 8.20.
Ved en asymptote til grafen for en funktion f forstår vi en linie, som opfylder, at afstanden fra et "grafpunkt" til linien går mod 0, når grafpunktet fjerner sig "i det uendelige". (Grafen nærmer sig altså vilkårligt tæt til linien). Der er her tre muligheder:

1) En lodret asymptote med en ligning af formen $x = x_o$

   Der er her i princippet fire forskellige muligheder.

   Der kan f.eks. gælde (se figur 8.12), at

   $f(x) \to -\infty$ for $x \to x_o+$

   Vi siger da, at linien $x = x_o$ er asymptote til grafen for f for x gående mod x_o (fra højre)

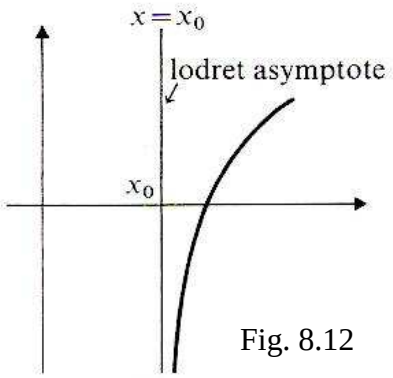


Fig. 8.12

2) En vandret asymptotet med en ligning af formen y= b.

   Der kan her gælde (se figur 8.13), at

   $f(x) \to b$ for $x \to \infty$

   eller at

   $f(x) \to b$ for $x \to -\infty$

   Vi siger da, at linien y = b er asymptote til grafen for f for x gående mod ∞ (hhv. mod $-\infty$).

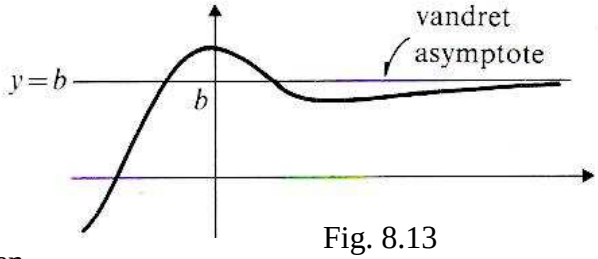


Fig. 8.13

3) En skrå asymptote med en ligning af formen $y = ax + b$ $(a \neq 0)$.

   Der kan her gælde, at

   $f(x) - (ax + b) \to 0$ for $x \to \infty$

   eller at (se figur 8.14)

   $f(x) - (ax + b) \to 0$ for $x \to -\infty$

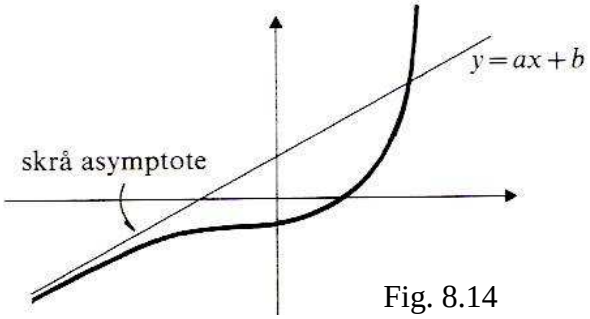


Fig. 8.14

   Vi siger da, at linien y = ax + b er asymptote til grafen for f for x gående mod ∞ (hhv. mod $-\infty$)

Bemærk, at en vandret eller en skrå asymptote giver en approximation af funktionsværdierne f(x), når x er numerisk stor (hvormed et kompliceret funktionsudtryk kan erstattes af værdier fra asymptoten – og herved begås kun en lille fejl).

Eksempel 8.21.
a) Grafen for funktionen i eksempel 8.6 har netop to asymptoter. En vandret med ligningen y = 2 og en lodret med ligningen x = 2.
b) Grafen for funktionen i eksempel 8.19 har netop én asymptote, nemlig en skrå asymptote med ligningen $y = x + 1$. ♥

Øvelse 8.22.

Vis at grafen for funktionen h(x) = $\frac{\frac{1}{2}x^3 - x^2 - \frac{3}{2}x + 1}{x^2 + 2x - 3}$ har netop tre asymptoter, og angiv en ligning for hver af dem.

(Vejledning: Ved polynomiers division kan h(x) omskrives til: h(x) = $\frac{1}{2}x - 2 + \frac{4x - 5}{x^2 + 2x - 3}$

(kontrollér udregningen) – og benyt dette ved en af asymptoterne). ♥

Eksempel 8.23.

Grafen for funktionen x^2 har ingen vandrette eller lodrette asymptoter (hvorfor ?). Men vi kan også vise, at grafen heller ikke har nogen skrå asymptoter for x gående mod uendelig.
Dette kan indses på følgende måde: En skrå asymptote skal have ligningen y = ax + b, og der skal gælde, at $x^2 - (ax + b) \to 0$ for $x \to \infty$. Men vi kan lave følgende omskrivning:

$$x^2 - (ax + b) = x^2 - ax - b = x^2\left(1 - \frac{a}{x} - \frac{b}{x^2}\right)$$

Da $x^2 \to \infty$ for $x \to \infty$ og $\left(1 - \frac{a}{x} - \frac{b}{x^2}\right) \to 1$ for $x \to \infty$, har vi at

$$x^2 - (ax + b) \to \infty \text{ for } x \to \infty$$

hvormed vi ser, at det ønskede ikke gælder. x^2 har altså ingen skrå asymptote.
Efter samme princip kan det vises, at en række andre funktioner heller ikke har en skrå asymptote ♥

Funktionsundersøgelse.

I forbindelse med undersøgelse af funktioner og deres grafer kan vi nu sammenfattende anføre følgende liste af begreber, som kan undersøges:

Definitionsmængde, symmetriegenskaber, kontinuitet, nulpunkter og fortegn, differentiabilitet, monotoniforhold og lokale extrema, asymptoter, halvtangenter, krumningsforhold og vendetangenter. Desuden kan vi undersøge funktionsværdier i nærheden af et punkt, som ikke tilhører definitionsmængden, samt i numerisk stor x-værdier, dvs. for $x \to \infty$ og for $x \to -\infty$. På baggrund af en sådan undersøgelse kan værdimængden bestemmes, og grafen kan tegnes.

Eksempel 8.24.

Vi vil undersøge funktionen g(x) = $\frac{x^3 - 2x^2 - 3x}{2x^2 - 7x + 3}$ (dvs. funktionen fra eksempel 8.5) med hensyn til definitionsmængde, kontinuitet, nulpunkter og fortegn, monotoniforhold og asymptoter.
Desuden vil vi tegne grafen for g og bestemme Vm(g).
Definitionsmængden, nulpunkter og fortegn er allerede bestemt i eksempel 8.5:
Dm(g) = $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}, 3\right\}$, g har to nulpunkter i hhv. –1 og 0, og fortegnene fremgår af figur 8.4.

Kontinuiteten af g ses af, at polynomier er kontinuerte og at en brøk mellem to kontinuerte funktioner er kontinuert (jfr. bl.a. sætning 3.5 og definition 3.25).

Monotoniforhold findes ved hjælp af differentialkvotienten $g'(x)$. For nemmest at finde den benytter vi, at forskriften for g for $x \neq 3$ ifl. eksempel 8.5 kan reduceres til:

$$g(x) = \frac{x \cdot (x+1) \cdot (x-3)}{2 \cdot (x-\frac{1}{2}) \cdot (x-3)} = \frac{x \cdot (x+1)}{2 \cdot (x-\frac{1}{2})} = \frac{x^2+x}{2x-1}$$

hvoraf vi ser, at der for $x \neq 3$ gælder:

$$g'(x) = \frac{(2x+1) \cdot (2x-1) - (x^2+x) \cdot 2}{(2x-1)^2} = \frac{2x^2-2x-1}{(2x-1)^2}$$

Hermed får vi, at

$$g'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 - 2x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \ \vee \ x = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{3}$$

Da fortegnet for $g'(x)$ bestemmes af tælleren $2x^2 - 2x - 1$, idet nævneren $(2x-1)^2$ er positiv for alle $x \in$ Dm(g)), har vi følgende fortegnsvariation for g':

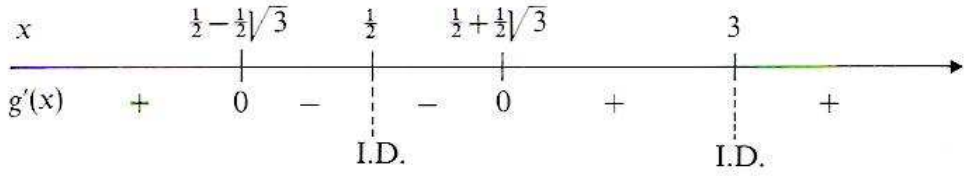


Fig. 8.15

Bemærk, at vi har husket på, at $\frac{1}{2} \notin$ Dm(g) og at $3 \notin$ Dm(g)

Da $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3} = -0,3660$ og da $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3} = 1,3660$, og da g er kontinuert i de relevante intervaller, ser vi af fortegnsvariationen for g', at g har følgende monotoniforhold:

g er voksende i $]-\infty; -0,3660]$

g er aftagende i $[-0,3660; \frac{1}{2}[$

g er aftagende i $]\frac{1}{2}; 1,3660]$

g er voksende i $[1,3660; 3[$

g er voksende i $]3; \infty[$

Vi bemærker, at g har lokalt maximum i –0,3660 og lokalt minimum i 1,3660.

I eksempel 8.5 så vi, at

$g(x) \to \frac{12}{5}$ for $x \to 3$, $g(x) \to \infty$ for $x \to \frac{1}{2}+$ og $g(x) \to -\infty$ for $x \to \frac{1}{2}-$

Der er altså en lodret asymptote med ligningen $x = \frac{1}{2}$, og at der er et "hul" i grafen ved x = 3:

Ved polynomiers division kan forskriften for g (for $x \neq 3$) omskrives til:

$$g(x) = \tfrac{1}{2}x + \tfrac{3}{4} + \frac{\frac{3}{4}}{2x-1}$$

Heraf ser vi, at linien $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$ er en skrå asymptote til grafen for f både for x gående mod ∞ og mod – ∞.

På baggrund af den ovenstående undersøgelse (og på baggrund af en række støttepunkter) ser vi nu, at grafen for g har følgende udseende:

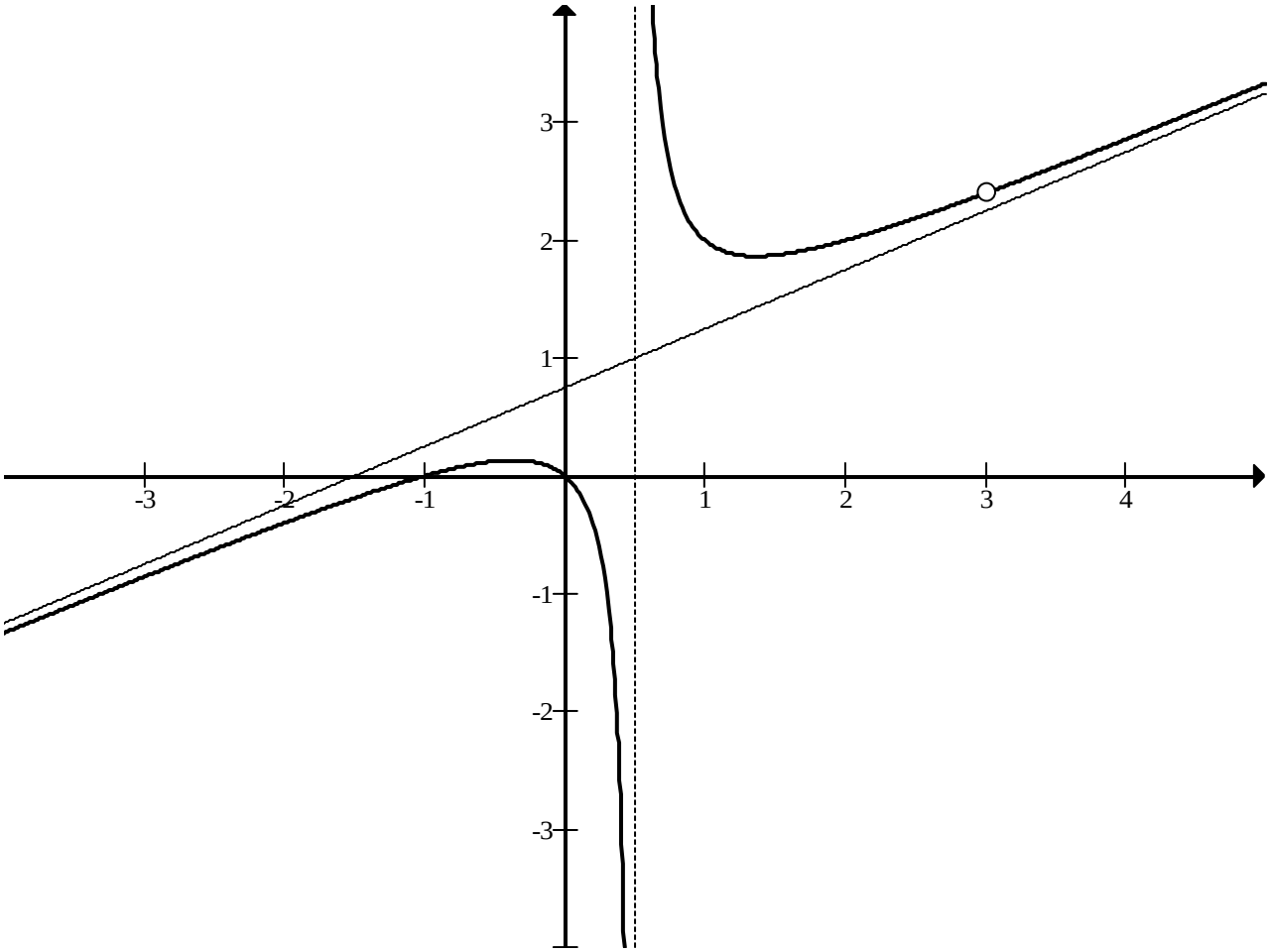


Fig. 8.16

Afslutningsvist bemærker vi, at på baggrund af det ovenstående, og da g(– 0,3660) = 0,1340 og g(1,3660) = 1,8660, kan finde værdimængden for g: $Vm(g) =]-\infty;0{,}1340] \cup [1{,}8660;\infty[$ ♥

Øvelse 8.25.

Undersøg funktionen $h(x) = \frac{1}{3}x^3 \cdot \sqrt{8-x}$ med henblik på definitionsmængde, kontinuitet, nulpunkter og fortegn, differentiabilitet, monotoniforhold, lokale extrema og asymptoter (det oplyses, at grafen for h ikke har nogen skrå asymptoter).
Bestem Vm(h) og tegn grafen for h. ♥

Øvelse 8.26.

Undersøg funktionen $f(x) = 5 - \frac{2x+1}{x^2-9}$ og dens graf. Tegn grafen. ♥

Kapitel 9: Nogle matematiske modeller.

Grænseværdier, kontinuitet og specielt differentialkvotienter anvendes i et utroligt stort antal matematiske modeller – og de må vel nærmest betegnes som de væsentligste matematiske begreber på ikke-trivielt niveau.
I det følgende omtales nogle få modeller og modelgrundlag, hvori disse begreber optræder – og fælles for disse er, at de ikke benytter de specialfunktioner, som omtales i Appendix 6.
Læsere, der ønsker at se modeller, hvori specialfunktionerne optræder, henvises til bøgerne:

a) Matematik for Gymnasiet. Logaritme-, eksponential- og potensfunktioner – og matematiske modeller
b) Matematik for Gymnasiet. Trigonometriske funktioner – og matematiske modeller.
c) Matematik for Gymnasiet: Differentialligninger og matematiske modeller.

Geometrisk Optimering.

Eksempel 9.1.
Gårdejer Jensen har 460 m el-hegn, som han vil bruge til at indhegne et rektangulært græsningsareal for nogle heste. Problemet er: Hvordan skal dette gøres for at græsningsarealet bliver størst muligt ?
Hvis vi kalder bredden b og længden x (se figur 9.1), så gælder der: $2b + 2x = 460$, idet $2b + 2x$ er den samlede længde af siderne på marken.

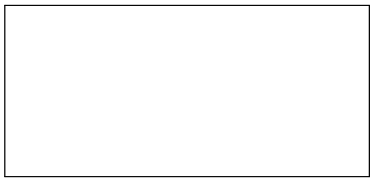


Fig. 9.1

Græsningsarealets størrelse A er givet ved: $A = b \cdot x$.
Ud fra ligningen: $2b + 2x = 460$ finder vi, at: $b = 230 - x$, og indsætter vi dette i udtrykket for A får vi:

$$A(x) = (230 - x) \cdot x \quad \text{dvs.} \quad A(x) = 230x - x^2$$

Vi differentierer nu A(x) og sætter $A'(x)$ lig med 0:

$$A'(x) = 230 - 2x .$$

$$A'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 230 - 2x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 115$$

Ud fra fortegnsvariationen for $A'(x)$ ser vi (kontrollér !), at A(x) har maximum i x = 115.
Når x = 115, så er $b = 230 - 115 = 115$. Vi ser hermed, at græsningsarealet skal være et kvadrat med sidelængden 115 m, og at det største areal dermed bliver $A(115) = 13225\ m^2$. ♥

Øvelse 9.2.

a) Vis, at hvis gårdejer Jensen fra eksempel 9.1 havde L meter hegn, så ville det størst mulige rektangulære område være et kvadrat med sidelængden $\frac{1}{4}L$ og det maximale areal $A = \frac{1}{16}L^2$
b) Vis, at hvis græsningsarealet laves som en cirkel, så får et område med arealet $A = \frac{1}{4\pi}L^2$, samt at dette areal er større end arealet fundet i pkt. a). Kommentér resultatet. ♥

Øvelse 9.3.

a) Vis, at hvis en cylinder har højden h og grundfladeradius x, så er cylinderens samlede overfladeareal A givet ved:

$$A = 2\pi x^2 + 2\pi x \cdot h$$

idet vi både medregner sidefladen og de to endeflader.

b) Vis derefter, at cylinderens rumfang (volumen) V er givet ved:

$$V = \tfrac{1}{2}Ax - \pi x^3$$

Ved fremstilling af en speciel type konservesdåser afsættes 20 cm^3 metal pr. dåse, og da dåsen skal være 0,05 cm tyk, bliver det samlede overfladeareal A lig med: $\frac{20\ cm^3}{0,05\ cm} = 400\ cm^2$.

c) Bemærk, at for sådanne dåser er V en funktion af x, og der gælder: $V(x) = 200x - \pi x^3$
d) Bestem den værdi af x, der optimerer rumfanget, dvs. giver det størst mulige rumfang, og beregn størrelsen af dette maksimale rumfang.
e) Løs ligningen: $V(x) = 0$ og forklar, hvilke (teoretiske) "muligheder" for dåsens udformning dette i praksis svarer til. ♥

Øvelse 9.4.

En virksomhed skal producere tændstikæsker, som skal være 5 cm lange og have et rumfang på 25 cm^3, og som desuden skal laves efter modellen på figur 9.2 (dvs. som en lille "skuffe" og en kasse uden endeflader, hvor kassen skal være udenom skuffen, når æsken er samlet):

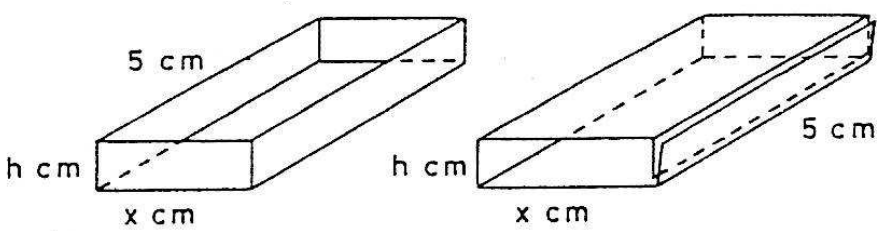


Fig. 9.2

a) Udtryk højden h ved bredden x
b) Vis at skuffens og kassens samlede overfladeareal er: $O(x) = 15x + \frac{125}{x} + 10\ cm^2$
c) Hvilken bredde skal man give æsken, hvis man ønsker mindst muligt forbrug af pap (som æsken er lavet af) ?
d) Find dette mindste papforbrug.

Det bemærkes, at der i den ovenstående matematiske model er foretaget følgende simplificerende antagelser:

1) Højden af kassen er den samme som højden af skuffen, og bredden af kassen er den samme som bredden af skuffen.
   I virkeligheden skal kassen være 0,1 cm højere og 0,2 cm bredere end skuffen.
2) Skuffen har ingen sammenlimningsflader.

e) Opstil en matematisk model, hvor den første antagelse udelades, dvs. en matematisk model, hvor højden af kassen regnes 0,1 cm højere end højden af skuffen, medens bredden af kassen regnes 0,2 cm bredere end skuffens bredde.
f) Hvad bliver den optimale bredde af skuffen, og hvor stort bliver det samlede papforbrug i dette tilfælde ?

Sammenlimning af skuffen kan f.eks. foregå på følgende måde:
Skuffen laves af et rektangulært stykke pap som vist på følgende figur 9.3:

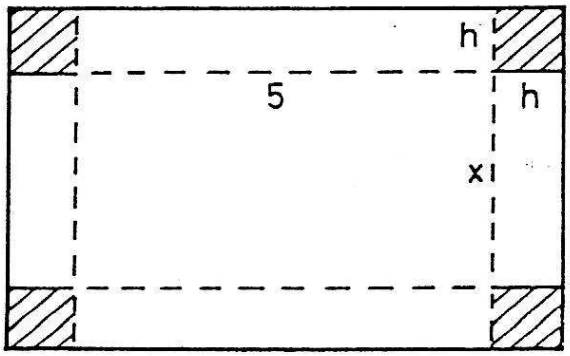


Fig. 9.3

De skraverede områder bruges som sammenlimningsflader. Pappet skæres op langs de fuldt optrukne linier og bukkes langs de stiplede linier.

g) Vis, at det samlede papforbrug er givet ved:

$$SP(x) = 13{,}5 + 15x + 125 \cdot x^{-1} + 100 \cdot x^{-2}$$

idet vi nu ikke længere foretager de ovenfor omtalte simplificerende antagelser 1) og 2).

h) Hvad bliver den optimale bredde af skuffen, og hvor stort bliver det samlede mindste papforbrug i dette tilfælde ?
(*Vejledning:* Ved løsning af ligningen: $SP'(x) = 0$ kan et PC-cas-program eller "solver" på grafregneren bruges. Det skal bemærkes, at man kan bevise, at der kun er én løsning).

i) Sammenlign de optimale bredder i spørgsmål f) og h) – og kommentér resultatet. ♥

Øvelse 9.5.

En landmand har 4 m^3 beton til sin rådighed til at støbe en beholder med form som en betoncylinder med bund, men uden låg. Bund og vægge i beholderen skal være 10 cm tykke, og beholderens udvendige diameter må højst være 5 m og mindst 1 m.
Det overlades til læseren at tegne en skitse af beholderen.

a) Bestem det størst mulige indvendige rumfang for sådan en beholder.
b) Angiv den udvendige højde og den udvendige diameter i den beholder, der har det størst mulige indvendige rumfang.

(*Vejledning:* Benyt den givne mængde beton til at opstille en ligning mellem den indvendige højde h og den indvendige radius x i beholderen. Find heraf h udtrykt ved x, og anvend dette til at finde det indvendige rumfang V(x) af beholderen udtrykt ved x. Optimér V(x).
Til hjælp med beregningerne kan man med rimelighed anvende et cas-program på en PC). ♥

Eksempel 9.6.

På nedenstående figur 9.4 ses et kort over den Mexicanske Golf.
Den 3. oktober kl. 8.00 (GMT) starter skibet "Nautius" (N) fra Veracruz på vel mod Mobile. Det sejler som angivet på figuren langs en ret linie med en fart på 35 km. pr. time.
Samme dag kl. 18.00 (GMT) starter skibet "Caracas Queen" (CQ) fra Mobile på vej mod Venezuela. Caracas Queen sejler med den på kortet angivne kurs med en fart på 30,5 km. pr. time.

Fig. 9.4

Vi vil nu prøve at finde ud af, hvornår de to skibe er nærmest hinanden, hvor stor afstanden da er, samt hvor de to skibe da befinder sig.

For at løse disse problemer indtegner vi et koordinatsystem som vist på figuren.
Nautius' bevægelse kan beskrives ved, at dets 1.koordinat x_N og 2.koordinat y_N afhænger på følgende måde af tiden t, som er gået siden starten i Veracruz:

$$x_N(t) = 17{,}4 \cdot t \qquad \text{og} \qquad y_N(t) = 30{,}4 \cdot t$$

Dette indses således:

Ifølge Pythagoras er afstanden fra Veracruz til Mobile lig med $\sqrt{744^2 + 1296^2}$ km, dvs. 1494,4 km.
Og da Nautius sejler med farten 35 km. pr. time, har den til tiden t bevæget sig stykket 35·t km.
Ved at se på de to ensvinklede trekanter på figur 9.5 (se næste side) får vi, at:

$$\frac{x_N(t)}{744} = \frac{35 \cdot t}{1494,4} \qquad \text{og} \qquad \frac{y_N(t)}{1296} = \frac{35 \cdot t}{1494,4}$$

hvilket netop giver de anførte udtryk for $x_N(t)$ og $y_N(t)$.
På tilsvarende måde kan man indse, at Caraqas Queen's bevægelse er givet ved:

$$x_{CQ}(t) = 744 + 7{,}2 \cdot (t - 10) \qquad \text{og} \qquad y_{CQ}(t) = 1296 - 29{,}6 \cdot (t - 10)$$

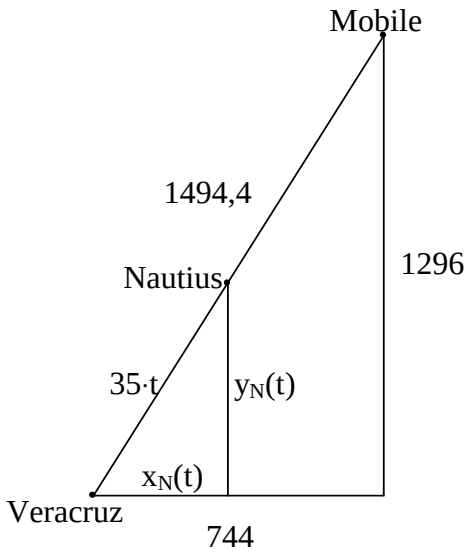


Fig. 9.5

(Prøv at vise dette på samme måde som med Nautius. Tallene 744 og 1296 kommer ind i billedet, idet Mobile's koordinater er (744, 1296). Og leddet $t - 10$ optræder som tidsfaktoren hér, idet Caraqas Queen starter 10 timer senere end Nautius. Endelig optræder minusset foran 29,6 i udtrykket for $y_{CQ}(t)$, idet bevægelsen foregår i 2.aksens negative retning).

Som bekendt (ellers tænk på Pythagoras) er afstanden mellem to punkter A og B med koordinaterne $A = (x_1 , y_1)$ og $B = (x_2 , y_2)$ givet ved:

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Anvendes denne formel på punkterne $(x_N(t), y_N(t))$ og $(x_{CQ}(t), y_{CQ}(t))$ ser vi, at afstanden a mellem de to skibe som funktion af tiden t er givet ved: $a(t) = \sqrt{(x_{CQ}(t) - x_N(t))^2 + (y_{CQ}(t) - y_N(t))^2}$

Da kvadratrodsfunktionen er voksende, vil afstanden være mindst mulig, når leddet under kvadratrodtegnet er mindst mulig. Vi skal derfor finde mindsteværdien af funktionen f(t) givet ved:

$$f(t) = (x_{CQ}(t) - x_N(t))^2 + (y_{CQ}(t) - y_N(t))^2$$

dvs.

$$f(t) = (744 + 7{,}2\cdot(t - 10) - 17{,}4\cdot t)^2 + (1296 - 29{,}6\cdot(t - 10) - 30{,}4\cdot t)^2$$

hvilket reduceres til:

$$f(t) = 3704{,}04\cdot t^2 - 204748{,}8\cdot t + 2986048$$

Vi ser her, at $f'(t) = 2\cdot 3704{,}04\cdot t - 204748{,}8 = 7408{,}08\cdot t - 204748{,}8$

hvoraf vi finder:

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow 7408{,}08\cdot t - 204748{,}8 \Leftrightarrow t = 27{,}64$$

Det overlades til læseren at eftervise, at der her er fundet et minimumssted.

De to skibe er altså nærmest hinanden, når der er gået 27,64 timer, dvs. ca. 27 timer og 38 min. Skibene er altså nærmest hinanden den 4. oktober kl. 11:38 (GMT).

Ved indsættelse af t = 27,64 i udtrykket for a(t) får vi, at den mindste afstand er:
a(27,64) = 395,7 km

Endelig findes skibenes positioner (i det indlagte koordinatsystem), når skibene er nærmest hinanden, ved at indsætte t = 27,64 i udtrykkene for $(x_N(t), y_N(t))$ og $(x_{CQ}(t), y_{CQ}(t))$.

Vi får: $(x_N(t), y_N(t)) = (480{,}9 ; 840{,}3)$ og $(x_{CQ}(t), y_{CQ}(t)) = (871{,}9 ; 773{,}9)$

Disse punkter er markeret med en "fed bolle" på kortet.
Hermed er alle de opstillede problemer løst.

Det skal afslutningsvist bemærkes, at alle modeller i almindelighed indeholder forskellige simplificeringer (ting man ser bort fra), jfr. øvelse 9.4. Dette er også tilfældet her, idet vi ser bort fra Jordens krumning, dvs. vi antager, at det relevante område på kortet er plant. Dette er selvfølgelig ikke helt korrekt, men fejlen skønnes at være behersket. Hvis man vil lave en bedre model, som tager højde for dette, skal man over i "sfærisk geometri", hvormed modellen bliver væsentlig mere kompleks, men naturligvis også mere korrekt. Vi vil imidlertid ikke komme yderligere ind på dette. ♥

Øvelse 9.7.
Find svarene på de rejste spørgsmål i eksempel 9.7, hvis Nautius sejler med hastigheden 28 km pr. time, og Caracas Queen sejler af sted kl. 16.00 (GMT). ♥

Fastlæggelse af ordre- og lagerstørrelse.

I dette afsnit omtales deterministiske (dvs. forudbestemmelige) modeller for den optimale ordrestørrelse ved en produktion, der foregår i serier. Det er desuden muligt at opstille og regne på en stokastisk (dvs. tilfældighedsorienteret) model for den nødvendige lagerstørrelse, hvis virksomheden vil have ringe sandsynlighed for at udgå for varer, men dette udelades i denne bog.

Eksempel 9.8.
I dette eksempel betragter vi et færdigvarelager i en virksomhed, som producerer en given vare. Virksomheden producerer og sælger over en længerevarende periode (f.eks. et år) et givet antal A af den pågældende vare. Og vi vil undersøge den situation, hvor varen ikke produceres løbende, men derimod i serier. Produktionen af varen foregår altså i bestemte produktionsperioder, og i disse perioder fyldes virksomhedens lager op. I den øvrige tid sælges der blot ud af varen fra lageret.

Vi vil for den pågældende vare bestemme den ordrestørrelse (produktionsstørrelse pr. serie), som giver de mindste totale omkostninger for virksomheden. I den forbindelse vil vi opdele omkostningerne i produktionsomkostninger, bestillingsomkostninger og lageromkostninger, hvilket vi vil vende tilbage til senere. Med henblik på at finde frem til lageromkostningerne vil vi imidlertid først undersøge lagerbeholdningens størrelse (lagerstørrelsen) LS.

Når virksomheden producerer den pågældende vare, kan der produceres r vareenheder pr. tidsenhed (f.eks. pr. dag). Vi antager, at salget af den pågældende vare i gennemsnit er s enheder pr. dag.
Da de producerede varer køres ud på lageret, efterhånden som de bliver færdige, og da de solgte varer udgår fra lageret, efterhånden som ordrerne kommer, vil nettotilgangen til lageret være:

$r - s$ enheder pr. dag, når varen produceres
$-s$ enheder pr. dag, når varen ikke produceres

Efter t dages produktion vil der således netto være tilført lageret $(r - s)\cdot t$ enheder.
Vi får dermed følgende grafiske sammenhæng (se figur 9.6 øverst på næste side) mellem tiden målt i dage og lagerstørrelsen LS målt i stk.
Størrelsen k, som vi kan kalde "sikkerhedslageret", er medtaget i denne model, idet vi ønsker at tage højde for, at der kan være udsving i det daglige salg, selvom vi i beskrivelsen forudsætter, at salget pr. dag er konstant.

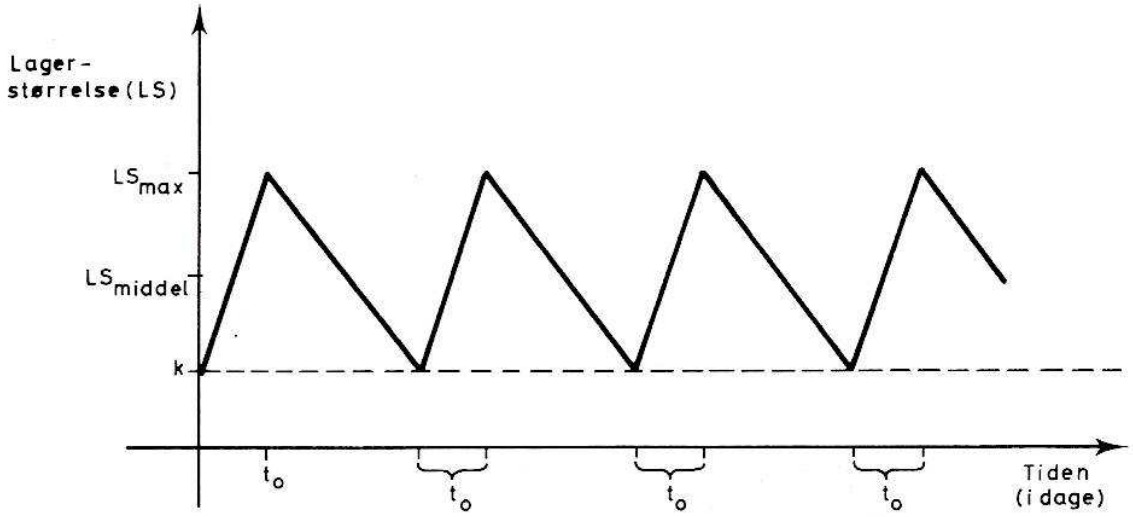


Fig. 9.6

Den maksimale lagerstørrelse LS_{max} opnås efter t_o dages produktion, hvorefter produktionen standses. Herefter aftager lagerstørrelsen jævnt, indtil den er nede på sikkerhedslagerets størrelse k. Herefter produceres igen i et tidsrum af længden t_o dage, osv. osv.
Den maksimale lagerstørrelse er givet ved (overvej !):

$$LS_{max} = (r - s)\cdot t_o + k$$

Og da lagerstørrelsen i produktionsperioden vokser jævnt fra k til LS_{max}, er den gennemsnitlige lagerstørrelse LS_{middel} i denne periode givet ved:

$$LS_{middel} = \frac{(r - s)\cdot t_o}{2} + k$$

Da lagerstørrelsen falder jævnt fra LS_{max} til k i den periode, hvor der ikke produceres den pågældende vare, er den gennemsnitlige lagerstørrelse LS_{middel} den samme som i produktionsperioden.
Det ovenstående udtryk for LS_{middel} gælder altså i almindelighed, og vi vil nu omskrive det på følgende måde:

$$LS_{middel} = \frac{(r - s)\cdot t_o}{2} + k = \frac{t_o \cdot r}{2}\cdot\left(1 - \frac{s}{r}\right) + k$$

Størrelsen $t_o \cdot r$, som angiver produktionsstørrelsen i en enkelt serie, skal være vores variable i vores problemstilling, idet vi som omtalt vil finde den værdi heraf, som giver de mindste produktionsomkostninger. Vi kalder den z, hvormed vi får:

$$LS_{middel} = \frac{z}{2}\cdot\left(1 - \frac{s}{r}\right) + k$$

Vi vil nu vende tilbage til undersøgelse af virksomhedens omkostninger. Som omtalt ovenfor kan de inddeles i tre led:

1) Lageromkostninger: Herunder hører bl.a. rente af den i lageret bundne kapital og omkostninger til det fysiske lager (f.eks. leje af lokaler mm). Lageromkostningerne pr. vareenhed pr. år vil vi kalde L. Da lagerstørrelsen i gennemsnit er LS_{middel}, bliver de årlige lageromkostninger dermed lig med: $LS_{middel}\cdot L$.

2) Bestillingsomkostninger: Hermed menes udgifter til "opsætning" (omstilling) af maskiner til den nye produktionsserie, hvor den givne vare produceres, og anden klargøring til produktion af varen, herunder nødvendigt kontorarbejde mm.
Da vi i alt producerer (og afsætter) A vareenheder pr. år, og vi producerer z enheder pr. serie, er antallet af serier pr. år givet ved: $\frac{A}{z}$. Hvis vi lader b betegne bestillingsomkostningerne pr. serie, så bliver de totale bestillingsomkostninger pr. år givet ved: $\frac{A}{z} \cdot b$
Bestillingsomkostningerne kaldes undertiden også for klargøringsomkostninger eller igangsætningsomkostninger (lidt afhængig af sammenhængen).

3) Produktionsomkostninger: Disse omkostninger svarer til de totale omkostninger ved selve produktionen (råvarer, løn osv.). De afhænger hverken af lager- eller bestillingsomkostninger, men derimod af den valgte/givne samlede produktionsstørrelse A. Vi kalder dem: P(A).

Vi ser derfor, at virksomhedens totale omkostninger Tomk ved produktion og oplagring af den pågældende vare er givet ved:

$$\text{Tomk} = P(A) + \frac{A}{z} \cdot b + LS_{middel} \cdot L = P(A) + \frac{A}{z} \cdot b + \frac{z}{2} \cdot \left(1 - \frac{s}{r}\right) \cdot L + k \cdot L$$

For at finde den værdi af produktionsstørrelsen z pr. serie, som giver de mindste totale omkostninger, differentierer vi Tomk med hensyn til z. Vi finder, at:

$$\frac{dTomk}{dz} = -\frac{A \cdot b}{z^2} + \tfrac{1}{2}\left(1 - \frac{s}{r}\right) \cdot L$$

idet vi forudsætter, at ingen af de øvrige størrelser afhænger af z , eller anderledes udtrykt: at alle størrelser bortset fra z er fastlagte (og dermed konstante). Bemærk også, at P(A) også er konstant, når A er givet.

Vi får nu (kontrollér !): $\frac{dTomk}{dz} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = \sqrt{\frac{2 \cdot A \cdot b}{\left(1 - \frac{s}{r}\right) \cdot L}}$

Vi kalder den her fundne værdi af z for z_o. Vi skal nu argumentere for, at Tomk har minimum i z_o.

Vi undersøger fortegnsvariationen for $\frac{dTomk}{dz}$ ved at løse uligheden: $\frac{dTomk}{dz} > 0$

$$\frac{dTomk}{dz} > 0 \Leftrightarrow -\frac{A \cdot b}{z^2} + \tfrac{1}{2}\left(1 - \frac{s}{r}\right) \cdot L > 0 \Leftrightarrow \frac{A \cdot b}{z^2} < \tfrac{1}{2}\left(1 - \frac{s}{r}\right) \cdot L$$

$$\Leftrightarrow \frac{2 \cdot A \cdot b}{\left(1 - \frac{s}{r}\right) \cdot L} < z^2 \Leftrightarrow z > \sqrt{\frac{2 \cdot A \cdot b}{\left(1 - \frac{s}{r}\right) \cdot L}}$$

Vi ser altså, at differentialkvotienten af Tomk kun er positiv til højre for z_o og dermed negativ til venstre for z_o. Det betyder, at Tomk(z) er aftagende til venstre for z_o og voksende til højre for z_o, hvormed Tomk(z) har minimum i z_o.

Vi har dermed vist Wilson's formel, der siger:

Wilsons Formel.
Den optimale produktionsstørrelse z_o pr. produktionsserie (dvs. den produktionsstørrelse pr. serie, som giver de mindste totale omkostninger), er givet ved:

$$z_o = \sqrt{\frac{2 \cdot A \cdot b}{\left(1 - \frac{s}{r}\right) \cdot L}}$$

hvor
1) A er den totale årlige produktionsstørrelse
2) b er bestillingsomkostningerne pr. produktionsserie
3) s er antallet af afsatte vareenheder pr. dag
4) r er antallet af producerede vareenheder pr. dag, når den pågældende vare produceres
5) L er lageromkostningerne pr. vareenhed pr. år.

Bemærk, at selve produktionsomkostningerne P(A) ikke direkte indgår i Wilsons formel, men de kan indgå indirekte f.eks. ved beregning af lageromkostningerne (se nedenstående taleksempel). Bemærk også, at k (sikkerhedslageret) ikke indgår i Wilsons formel. Men k skal være så lille, som man af hensyn til leveringssikkerheden tør gøre den, idet Tomk derved bliver så lille som mulig.

En virksomhed forventer at kunne sælge 30.000 termostater pr. år, og hvis vi regner med 300 salgsdage på et år, skal der afsættes s = 100 stk. pr. dag. Virksomheden producerer derfor A = 30.000 termostater pr. år, og produktionsomkostningerne er beregnet til 1.870.000 kr.
Termostaterne produceres i serier, og man har skønnet, at det koster 6.400 kr. at klargøre maskiner o.lign. til produktion af termostaterne. Størrelsen b er dermed 6400 kr. Man regner med at kunne producere r = 1000 stk. pr. dag i produktionsperioden.

L skønnes at svare til 12 % af produktionsomkostningerne pr. termostat, dvs. 12 % af $\frac{1870000}{30000}$ kr.

L er altså lig med 7,48 kr. pr. stk. pr. år.

Ved indsættelse i Wilsons formel finder vi: $z_o = \sqrt{\frac{2 \cdot 30000 \cdot 6400}{\left(1 - \frac{100}{1000}\right) \cdot 7,48}} = 7553$

Der skal således produceres ca. 7550 termostater i hver serie.

Antallet af serier pr. år er da givet ved: $\frac{A}{z_o} = \frac{30000}{7550} = 3,974$

hvorfor der skal være ca. 4 produktionsserier af de pågældende termostater om året.
Endelig kan vi finde antallet af produktionsdage pr. serie, idet dette er givet ved:

$$\frac{z_o}{r} = \frac{7550}{1000} = 7,55$$

Der skal således efter klargøring produceres termostater i ca. 7,5 dage.

Det skal afslutningsvist bemærkes, at den ovenstående model kan udvides til at tage højde for den situation, hvor det samme produktionsudstyr skal benyttes til at producere flere forskellige varer (produkter). I den situation er man ofte interesseret i at producere i såkaldte produktionsrunder, hvor hvert produkt fremstilles i et vist antal eksemplarer én gang i hver runde. Og i den udvidede model bestemmes antallet af produktionsrunder pr. år, samt den optimale produktionsstørrelse for hvert af de indgående produkter i runden. Vi skal imidlertid ikke komme yderligere ind på emnet her. ♥

Øvelse 9.9.
Argumentér for, at Wilson's formel i eksempel 9.8 kan omskrives til formlen:

$$z_o = \sqrt{\frac{2 \cdot s \cdot b}{\left(1 - \frac{s}{r}\right) \cdot \ell}}$$

hvor s, r og b har samme betydning som i eksempel 9.8, og hvor ℓ er de gennemsnitlige lageromkostninger pr. vareenhed pr. (salgs)dag.
(*Vejledning:* Antag, at der er T salgsdage pr. år, og forkort brøken under kvadratrodstegnet med T). ♥

Øvelse 9.10.
I denne øvelse betragter vi en virksomhed, hvor grafen for lagerstørrelsen LS som funktion af tiden ser ud som vist på figur 9.7:

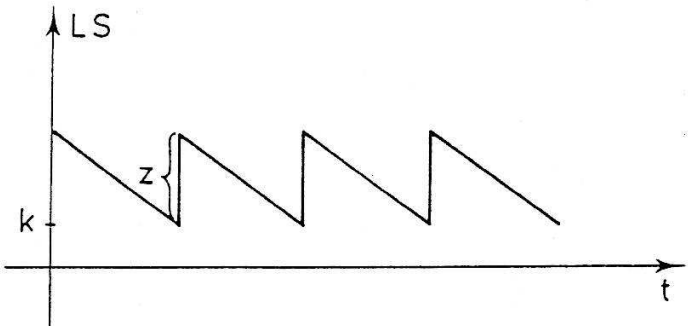


Fig. 9.7

Der sælges altså løbende ud fra lageret, og engang imellem fyldes der op. Dette kan f.eks. forekomme for et færdigvarelager i en produktionsvirksomhed, der producerer i serier, og hvor varerne først køres på lager, når varepartiet er færdigt (der ses dermed stort på eller bort fra omkostninger for kapital bundet i det midlertidigt oplagrede delpartiet inden det anbringes på færdigvarelageret). Denne situation optræder f.eks. hvis produktionshastigheden r er væsentlig større end salgshastigheden s. Se andre muligheder sidst i øvelsen.

a) Argumenter for, at den gennemsnitlige lagerstørrelse er: $LS_{middel} = \frac{z}{2} + k$
hvos z er produktionsstørrelsen pr. serie og k er sikkerhedslageret (jfr. eksempel 9.8).

Hvis der er T salgsdage (= produktionsdage) i den periode man ser på (typisk et år), så er det totale antal solgte (og producerede) vareenheder A for hele perioden lig med s·T.
Produktionsomkostningerne P(A) ved selve produktionen afhænger ikke af z (jfr. eksempel 9.8).

b) Argumentér for, at antallet af serier i den pågældende periode er givet ved $\frac{s \cdot T}{z}$, og at de samlede bestillingsomkostninger er lig med $\frac{s \cdot T}{z} \cdot b$, hvor b er bestillingsomkostningerne pr. serie.

c) Argumentér for, at lageromkostningerne for hele perioden er givet ved $\ell \cdot T \cdot (\frac{z}{2} + k)$,
hvor ℓ er lageromkostningerne pr. vareenhed pr. dag.

Virksomhedens totale omkostninger Tomk ved produktion og oplagring af den pågældende vare er altså givet ved:

$$\text{Tomk} \;=\; P(A) + \frac{s \cdot T}{z} \cdot b \;+\; \ell \cdot T \cdot \left(\frac{z}{2} + k \right)$$

d) Vis ved differentiation af Tomk mht. z (jfr. eksempel 9.8), at den optimale produktionsstørrelse pr. serie i denne sammenhæng er givet ved:

$$\boxed{z_o \;=\; \sqrt{\frac{2 \cdot s \cdot b}{\ell}}}$$

Den hermed beviste formel kaldes også Wilsons formel (her blot ved øjeblikkelig opfyldning).

e) Bestem den optimale produktionsstørrelse pr. serie, hvis bestillingsomkostningerne er 3800 kr. pr. serie, hvis lageromkostningerne er 0,06 kr. pr. stk. pr. dag, og hvis der sælges ca. 800 stk. pr. dag

Den situation, der beskrives i denne øvelse, kan også forekomme for:

- et råvarelager i en produktionsvirksomhed, altså et lager som er forudsætning for en produktion.
- et færdigvarelager (videresalgslager) i en salgsvirksomhed.

Her bestilles varerne hjem med jævne mellemrum, hvorved lageret fyldes op "øjeblikkeligt".
Størrelserne, der indgår i det ovenstående, i eksempel 9.8 og i øvelse 9.9, står da for noget andet:

- z er ordrestørrelsen pr. hjemkøbsordre
- A er den totale årlige hjemkøbsstørrelse
- P(A) er de samlede indkøbsomkostninger
- b er bestillingsomkostningerne pr. hjemkøbsordre
- s er antallet af forbrugte hhv. afsatte vareenheder pr. dag
- ℓ er lageromkostningerne pr. vareenhed pr. dag . ♥

Øvelse 9.11.

Betragt situationen fra øvelse 9.10 i en anden virksomhed. For den givne vare gælder, at b er 49000 kr. og ℓ er 0,10 kr. pr. stk. pr. dag. Virksomheden ønsker at analysere det daglige salgs indflydelse på z_o, dvs. på den optimale produktionsstørrelse pr. serie.

a) Bestem z_o hvis det daglige salg er 450 stk., og hvis det er 600 stk.

b) Bestem et udtryk for størrelsen $\frac{dz_o}{ds}$,
og bestem værdien heraf, når s = 450 stk. pr. dag hhv. når s = 600 stk. pr. dag.

c) Forklar tydeligt, hvad størrelsen $\frac{dz_o}{ds}$ beskriver – og kommentér de ovenstående resultater. ♥

Øvelse 9.12.

Argumentér for, at hvis antallet r af producerede vareenheder pr. dag er meget større end antallet s af afsatte vareenheder pr. dag, så giver de to "udgaver" af Wilsons formel (jfr. øvelse 9.9 og øvelse 9.10) tilnærmelsesvist samme resultat. ♥

Kontinuum og marginalfunktioner.

Matematiske forudsætninger for modellerne.

Grænsebetragtninger (herunder grænseværdi, kontinuitet og differentiabilitet) har i forbindelse med matematiske modeller kun interesse i modeller, hvor der ved såvel den uafhængige som ved den afhængige variable med rimelighed kan anlægges en kontinuert fortolkning (opfattelse), og hvor der derfor med rimelighed kan betragtes en (glat) sammenhængende kurve.
Vi interesserer os altså her for matematiske modeller, hvor der såvel den uafhængige variable (den variable på 1. aksen) som den afhængige variable (funktionsværdien på 2.aksen) med rimelighed kan opfattes som hørende til et kontinuum.

Selv om såvel den skattepligtige indkomst som skatten angives i hele kroner, så er en forskel på 1 kr. meget lille set i forhold til det variationsområde, der betragtes for skattepligtige indkomster (f.eks. fra 0 kr. til 1.000.000 kr. pr. år). Det er derfor rimeligt at benytte en kontinuert model for skatten og den skattepligtige indkomst.
Tilsvarende kommentarer kan anføres, hvis vi f.eks. ser på

- en virksomheds produktionsomkostninger som funktion af produktionsantallet, når det f.eks. drejer sig om produktion af "mindre" enheder som sikkerhedsnåle, konservesdåser eller strygejern.
  Hvis det derimod drejer sig om produktion af boreplatforme eller tankskibe, så vil en "enhed" være så "stor", at en kontinuert model vil være urimelig.
- afsætningen af et givet produkt på et marked som funktion af prisen, og dermed også på omsætningen for produktet. (Disse begreber forklares i næste afsnit).
  Der skal være så stor en afsætning, at en afsætningsændring på 1 enhed kan betragtes som meget lille – og at der dermed kan benyttes en kontinuert model, dvs. en kontinuert variation af afsætningen ved en gradvis (kontinuert) ændring af prisen.
- udviklingen i antallet af individer i en given population som funktion af tiden (f.eks. antallet af får på en øde ø eller antallet af gærceller i en given beholder som funktion af tiden).

Ofte vil man således i matematiske modeller ved bl.a. økonomiske og biologiske beregninger antage både kontinuitet og differentiabilitet af de implicerede funktioner og variable, selvom f.eks. et kronebeløb, et salgstal eller en populationsstørrelse i sagens natur ikke kan variere helt glat og sammenhængende på "mikroskopisk" niveau.

Ofte er man interesseret i at undersøge ændringerne af funktionsværdier som resultat (konsekvens) af mindre ændringer i den uafhængige variable. Der kan her f.eks. være tale om at undersøge:

- Hvordan ændres omkostninger, omsætning og profit ved få %'s forøgelse eller formindskelse af produktionen og afsætningen ?
- Hvor stor en populationsvækst forekommer ved en lille forøgelse af tiden ?
- Hvor meget skal man betale ekstra i skat, når ens indtægt forøges en smule ?

Differentialregning handler netop om beregning, fortolkning og vurdering af ændringer i funktionsværdier som konsekvens af mindre ændringer i de uafhængige variable. Dette harmonerer med forudsætningen om, at der kan anlægges en kontinuert fortolkning af de variable, og at de relevante funktioners grafer kan beskrives ved "glatte" kurver – dvs. de betragtede funktioner er differentiable.
(Bemærk, at der ved en "mindre ændring" forstås en ændring, som højst er nogle få procent af hele variationsområdet (definitionsmængden)).

Marginalfunktioner.

I økonomiske sammenhænge kaldes differentialkvotienten af en funktion – dvs. den afledede funktion – ofte for marginalfunktionen eller grænsefunktionen. (De omtalte økonomiske begreber gennemgås i næste afsnit).

Betragt omsætningen Oms(q) som funktion af det afsatte antal vareenheder q.
Grænseomsætningen eller marginalomsætningen Groms er da fastlagt ved:

$$\text{Groms}(q) = \text{Oms}'(q) = \frac{d\text{Oms}(q)}{dq}$$

Betragt de totale omkostninger TC(q) eller de samlede variable omkostninger VC(q) som funktion af det producerede antal vareenheder q.
Grænseomkostningerne eller marginalomkostningerne Gromk er da fastlagt ved:

$$\text{Gromk}(q) = \text{TC}'(q) = \frac{d\text{TC}(q)}{dq} = \text{VC}'(q) = \frac{d\text{VC}(q)}{dq}$$

Betragt skatten S(i) som funktion af den skattepligtige indkomst i.
Grænseskatten eller marginalskatten MS er da fastlagt ved:

$$\text{MS}(i) = \text{S}'(i) = \frac{d\text{S}(i)}{di}$$

Som omtalt på side 38 nederst og side 83 midtpå har vi for en given funktion f, at:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} \to f'(x_o) \quad \text{for} \quad \Delta x \to 0$$

samt at, at når Δx er "lille", så er $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ næsten lige med $f'(x_o)$, hvilket vi skriver: $\frac{\Delta f}{\Delta x} \approx f'(x_o)$.

Vi får dermed også, at $\Delta f \approx f'(x_o) \cdot \Delta x$, når Δx er "lille".

Hvis en tilvækst på 1 enhed, dvs. $\Delta x = 1$, kan betragtes som "lille", så har vi dermed, at der om den tilsvarende funktionstilvækst Δf gælder, at: $f(x_o + 1) - f(x_o) = \Delta f \approx f'(x_o) \cdot 1 = f'(x_o)$.

Vi får hermed følgende sætning:

Sætning 9.13.
Marginalfunktionen kan fortolkes som den funktionstilvækst, der svarer til en tilvækst på 1 enhed i den uafhængige variable, hvis en sådan tilvækst på 1 enhed kan betragtes som "lille".

Eksempel 9.14.
Under de i sætning 9.13 omtalte forudsætninger gælder der følgende:

- Marginalskatten kan fortolkes som den ekstra skat, man skal betale pr. ekstra krone, man tjener.
- Grænseomkostningerne kan fortolkes som omkostningsforøgelsen ved at producere en enhed mere.
- Grænseomsætningen kan fortolkes som den omsætningsforøgelse, der opnås ved at afsætte en enhed mere. ♥

Nogle grundæggende erhvervsøkonomiske begreber og modeller.

Afsætning.
Ved en virksomheds afsætning af en given vare (et givet produkt – f.eks. termokander, cigaretter, vægtæpper eller småkager) forstår vi antallet af vareenheder q, som virksomheden afsætter (sælger) på et givet marked indenfor et bestemt tidsrum (f.eks. pr. uge, pr. måned eller pr. år).

Virksomhedens afsætning afhænger af mange ting, bl.a. af varens pris, varens kvalitet, den reklameindsats virksomheden ofrer for varen på markedet, konkurrencen på markedet, markedets demografiske struktur, salgskanalerne (hvem sælger varen) og evt. sæsonforhold. Vi vil hér kun se på afsætningens afhængighed af prisen p pr. vareenhed.
Det vil almindeligvis gælde, at jo højere pris der forlanges, desto mindre er det antal, der kan afsættes/sælges. Vi må således forvente, at funktionen f fastlagt ved: q = f(p), er aftagende. (f er altså den funktion, som til en given pris p giver os det antal vareenheder q, som det er muligt at afsætte til prisen p). Funktionen f(p) kaldes virksomhedens afsætningsfunktion for den pågældende vare.

Det er i øvrigt – uanset hvilken model man ser på – vigtigt at bemærke, at modellen (forskriften) kun gælder i et mere eller mindre begrænset interval (definitionsmængden for forskriften). Begrænsninger fastlægges af en lang række faktorer der har med forudsætningerne for modellen og dens parametres størrelse at gøre.

Øvelse 9.15.
En virksomhed regner for en given vare med afsætningsfunktionen q = f(p), hvor
$f(p) = 35.000 - 260 \cdot p \ , \ p \in [40; 90]$. Tegn grafen for f og kommentér resultatet. ♥

Omsætning.
Ved en virksomheds omsætning Oms for en given vare på et givet marked indenfor en given tidsperiode forstås afsætningen q gange prisen p, dvs. omsætningen er antallet af kroner (eller anden møntenhed) som virksomheden får ind ved salget af varen på markedet indenfor det givne tidsrum. Virksomhedens omsætning Oms vil altså med de indførte betegnelser være givet ved:

$$Oms(p) = q \cdot p = f(p) \cdot p$$

Hvis virksomheden f.eks. sælger 8000 enheder til prisen 140 kr. pr. enhed, så er omsætningen $8000 \cdot 140 = 1.120.000$ kr.
Vi har her set på omsætningen som funktion af prisen, men som vi straks skal se, kan vi også angive omsætningen som funktion af den afsatte mængde.

Da q = f(p) og da f er injektiv (idet f er aftagende) har vi: $p = f^{-1}(q)$.

Funktionen $f^{-1}(q)$ kaldes ofte for virksomhedens prisfunktionen, og den angiver den (maksimale) pris p som virksomheden kan forlange, for at virksomheden i den betragtede tidsperiode kan få afsat q enheder på det givne marked.
Vi ser hermed, at omsætningen som funktion af afsætningen (den afsatte mængde) q er givet ved:

$$Oms(q) = q \cdot p = q \cdot f^{-1}(q)$$

Øvelse 9.16.
a) Bestem prisfunktionen svarende til afsætningsmodellen i øvelse 9.15 (husk definitionsmængden)
b) Bestem et funktionsudtryk for Oms(q).
c) Find omsætningen ved et salg på 20.000 vareenheder ♥

Grænseomsætning.
Hvis antallet af afsatte varer ændres fra q_o til q, så får vi tilvæksten: $Oms(q) - Oms(q_o)$ i omsætningen, hvormed den gennemsnitlige omsætningstilvækst pr. ekstra vareenhed er lig med:

$$\frac{Oms(q) - Oms(q_o)}{q - q_o}$$

Hvis $q - q_o$ er "lille", så er denne brøk ca. lig med $Oms'(q_o)$ – jfr. det foregående afsnit om kontinuum og marginalfunktioner.
Størrelsen $Oms'(q_o)$ kaldes som omtalt grænseomsætningen $Groms(q_o)$ (eller marginalomsætningen).
Og hvis en tilvækst på 1 enhed kan regnes for "lille", så har vi ifølge sætning 9.13 (og eksempel 9.14), at grænseomsætningen angiver tilvæksten i omsætningen ved at afsætte en ekstra enhed.

Øvelse 9.17.
Bestem Groms(13000) og Groms(20000) for afsætningsmodellen fra øvelse 9.15 (se øvelse 9.16), og forklar, hvad de fundne tal står for. ♥

Omkostninger
En virksomheds omkostninger ved at producere en given vare kan deles i de faste omkostninger (FC), som for en eksisterende produktion ikke afhænger af produktionsstørrelsen, og de variable omkostninger (VC), som afhænger af hvor mange vareenheder der produceres.

De faste omkostninger dækker f.eks. el, vand og varme til virksomheden, forrentning af den investerede kapital i bygninger, løn til en ikke-producerende direktion osv., medens de variable omkostninger er knyttet direkte til produktion og distribution af varerne (f.eks. råvarer og lønninger).
VC er en voksende funktion af antallet q af producerede vareenheder (jo flere varer der produceres, desto mere koster det!).
Bemærk, at såvel ved FC som VC er der tale om omkostninger knyttet til produktionen i en given tidsperiode.

Hvis virksomheden kun producerer én vare, så er virksomhedens totale omkostninger TC (som undertiden også benævnes Tomk) givet ved: TC = VC + FC, eller mere udførligt:

$$TC(q) = VC(q) + FC$$

idet de faste omkostninger ikke afhænger af produktionsstørrelsen q.

Hvis virksomheden derimod producerer flere forskellige vare(typer), så er det kun i sjældne tilfælde muligt at fastlægge, hvor stor en del af de faste omkostninger, der hører til hver enkelt vare. Man må derfor i de samlede beregninger for virksomheden medtage VC(q) for den givne vare, og så indkalkulere de samlede faste omkostninger til sidst (se begrebet dækningsbidrag senere i teksten).

Ved analyse og beregning af VC(q) er man ofte interesseret i at se på de variable enhedsomkostninger VU(q) (dvs. de variable omkostninger pr. enhed, når der produceres q enheder). Disse er givet ved:

$$VU(q) = \frac{VC(q)}{q}$$

Hvis de variable omkostninger ved at producere 800 enheder af en given vare er 13.200 kr., så er $VU(800) = \frac{13200}{800}$ kr. pr. stk. = 16,50 kr. pr. stk.

Undertiden er VU konstant, dvs. den har den samme størrelse uanset hvor mange enheder man producerer (indenfor visse grænser – svarende til omkostningsfunktionens definitionsmængde). I dette tilfælde er VC(q) = VU·q og TC(q) = VU·q + FC.
Hvis f.eks. VU er konstant 28 kr., og de faste omkostninger er 230.000 kr., så er VC(q) = 28·q og TC(q) = 28·q + 230.000. Vi ser altså, at omkostningsfunktionerne VC(q) og TC(q) bliver lineære funktioner, når VU er konstant.

Det er imidlertid vigtigt at bemærke, at VU ofte ikke er konstant, men derimod afhænger af, hvor mange enheder q man producerer. VU bliver altså en funktion af q, dvs. VU(q).
Der er visse faktorer, der bevirker at VU(q) aftager ved øget produktion, og der er andre faktorer der bevirker, at VU(q) vokser ved øget produktion. (Se opgave 9.6).
Hvis VU(q) bliver større ved forøgelse af produktionstallet q, så vil omkostningsfunktionerne VC(q) og TC(q) krumme opad (få en øget tangenthældning), hvormed der er tale om en progressiv omkostningsfunktion. Hvis VU(q) derimod bliver mindre ved forøgelse af produktionstallet q, så vil omkostningsfunktionerne VC(q) og TC(q) krumme nedad (få en aftagende tangenthældning), hvormed der er tale om en degressiv omkostningsfunktion.
Som det fremgår af opgave 9.7 kan der også forekomme en blanding heraf, idet den degressive tendens typisk vil forekomme ved "lave" produktionstal medens den progressive tendens vil forekomme ved "høje" produktionstal.

Øvelse 9.18.
I produktionsintervallet $q \in [0;25000]$ kan de variable omkostninger for produktionen af den vare, der omtales i øvelse 9.15 og 9.16, bestemmes ved $VC(q) = 0,00000018q^3 - 0.04q^2 + 30q$

a) Bestem de variable enhedsomkostninger VU(q) og kommentér resultatet.
b) Tegn grafen for VC og kommentér resultatet.
c) Bestem de faste omkostninger FC, hvis de totale omkostninger ved produktion af 20000 stk. er lig med 700.000 kr. (og virksomheden kun producerer denne ene vare).

Grænseomkostninger.
Som omtalt i det foregående afsnit om kontinuum og marginalfunktioner, definerer vi grænseomkostningerne (marginalomkostningerne) Gromk(q) ved:

$$\text{Gromk}(q) = TC'(q) = VC'(q)$$

Bemærk, at $TC'(q) = VC'(q)$, idet forskellen på TC og VC er FC, som er en konstant, og som derfor forsvinder ved differentiationen.
Og hvis en tilvækst på 1 enhed kan regnes for "lille", så har vi ifølge sætning 9.13 (og eksempel 9.14), at grænseomkostningerne angiver tilvæksten i de totale eller i de variable omkostninger ved at producere en ekstra enhed.

Øvelse 9.19.
Bestem Gromk(13000) og Gromk(20000) for den omkostningsmodel, der omtales i øvelse 9.18.

Profit og dækningsbidrag
Vi antager nu, at virksomheden på baggrund af kendskab til sin afsætningsfunktion producerer lige så mange vareenheder q, som den kan afsætte.

Virksomhedens profit (fortjeneste, gevinst) Pr(q) er da givet ved:

$$Pr(q) = Oms(q) - TC(q)$$

Virksomhedens dækningsbidrag DB(q) ved produktion og salg af q vareenheder er givet ved:

$$DB(q) = Oms(q) - VC(q)$$

Dækningsbidraget er, som navnet siger, den pågældende vares bidrag til at dække virksomhedens faste omkostninger, men den gør det ikke alene. Når alle dækningsbidragene fra virksomhedens produkter lægges sammen viser det sig forhåbentlig, at summen er større end FC og at der dermed skabes et overskud for virksomheden.

Det skal bemærkes, at man almindeligvis og naturligvis er interesseret i at sikre, at $Pr(q) \geq 0$.
Den mindste værdi af q, for hvilke dette er opfyldt, kaldes "break-even punktet".
Ofte er der også en største værdi af q som opfylder, at $Pr(q) \geq 0$. Denne værdi kaldes profitgrænsen.
I stedet for break-even-punktet og profitgrænsen anvendes undertiden også benævnelserne: nedre dækningspunkt og øvre dækningspunkt.

Øvelse 9.21.
Bestem break-even-punktet og profitgrænsen for den vare, som vi har set på i øvelserne 9.13 til 9.18, idet vi antager, at modellen i øvelse 9.13 gælder for priser op til 130 kr., samt at virksomheden kun producerer denne ene vare og derfor får den i øvelse 9.16 c) fundne FC.

Profitmaksimering (dækningsbidragsmaksimering)
Det kan betale sig for virksomheden at øge produktionen af en given vare så længe profitten eller dækningsbidraget bliver større, dvs. så længde $Pr'(q) \geq 0$ eller $DB'(q) \geq 0$ – under forudsætning af, at vi ikke hermed ryger udenfor definitionsmængden for afsætnings- eller omkostningsfunktionen. (Det hjælper ikke meget, at det matematisk set tilsyneladende viser sig at kunne betale sig at øge produktionen til f.eks. det 4-dobbelte, hvis virksomhedens produktionskapacitet ikke kan håndtere dette, og der derfor skal investeres i nye bygninger, maskineri, medarbejdere mm., hvormed omkostningsfunktionen ikke længere er gældende).
Da

$$Pr'(q) = Oms'(q) - Tomk'(q) = Groms(q) - Gromk(q)$$

og

$$DB'(q) = Oms'(q) - VC'(q) = Groms(q) - Gromk(q)$$

(overvej !), er en produktionsforøgelse altså givtig, så længe: $Groms(q) \geq Gromk(q)$. Således må det naturligvis også være, idet det må kunne betale sig for virksomheden at øge produktionen, så længe omsætningsforøgelsen pr. ekstra vareenhed er større end omkostningsforøgelsen pr. ekstra vareenhed.
Den optimale produktionsstørrelse q_o bestemmes ved at løse ligningen: $Groms(q) = Gromk(q)$, samt sikre, at monotoniforholdene er således, at der ér tale om et maksimum i den fundne løsning q_o .

Øvelse 9.20.
Bestem et udtryk for dækningsbidraget DB(q) for den vare, der omtales i øvelse 9.15, 9.16 og 9.18. Hvor mange varer skal virksomheden producere (og afsætte) for at få maximalt dækningsbidrag ?