

Den harmoniske svingning

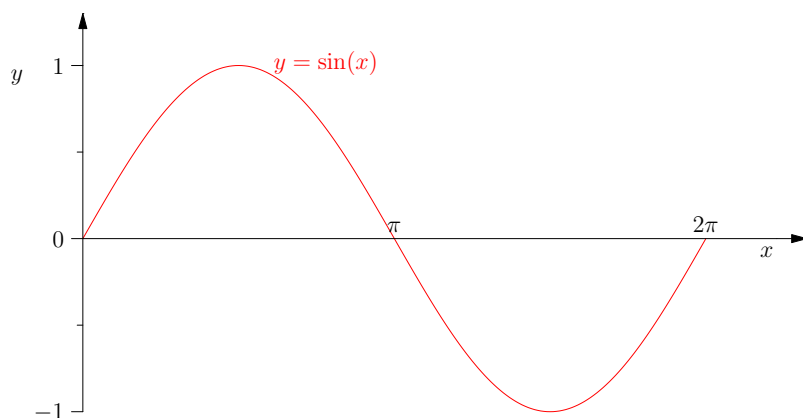
Teori og en anvendelse

Preben Møller Henriksen

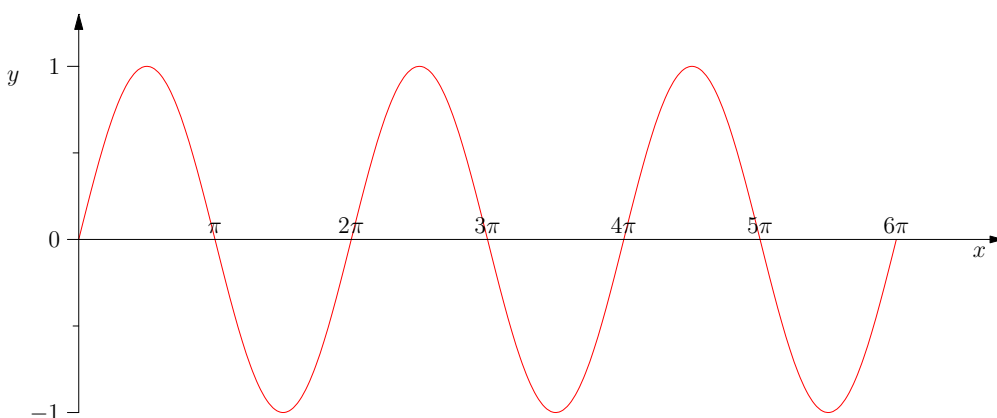
Version 1.0

Noterne forudsætter kendskab til sinus og cosinus som funktioner af alle reelle tal, dvs. radiantal.

I figuren nedenunder har vi tegnet grafen for funktionen $f(x) = \sin(x)$ i intervallet $[0; 2\pi]$.



Grafen viser en enkelt periode for sinussvingningen. Hvis vi udvider definitionsmængden til \mathbb{R} vil grafen blot gentage sig selv uendelig mange gange, idet det for alle $x \in \mathbb{R}$ gælder, at $\sin(x + p2\pi) = \sin(x)$ hvor $p \in \mathbb{Z}$. Nedenunder er der tegnet tre perioder:

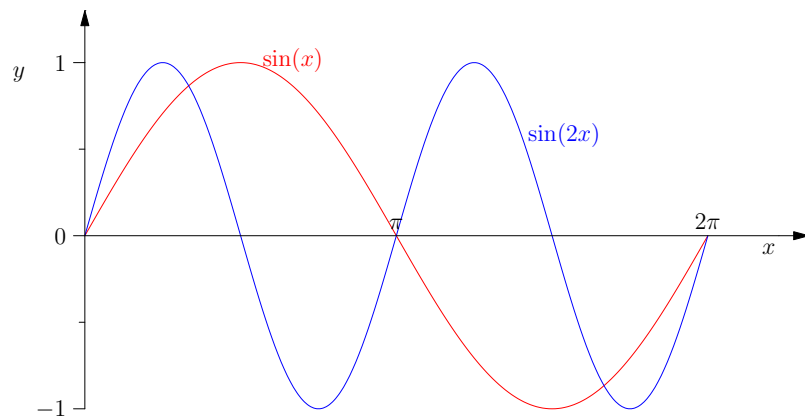


Da grafen svinger mellem -1 og 1 siger vi at svingningen har *amplituden* 1. Amplituden er altså udsvingets absolutte størrelse regnet fra x -aksen.

Når vi ser på svingninger, vil vi altid gå ud fra, at x er en tidsvariabel (s). Vi kan se, at sinussvingningen bruger 2π sekunder om at udføre en svingning. Derfor siger vi, at

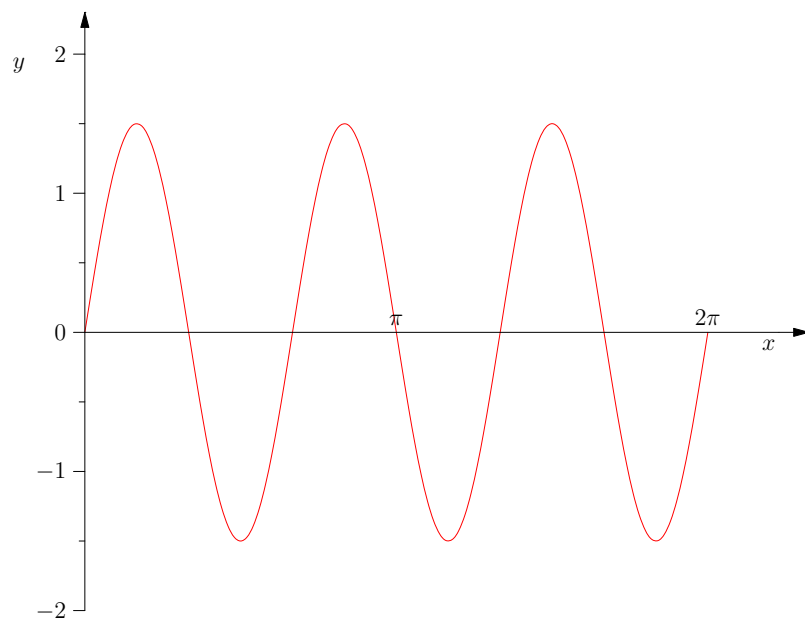
svingningens *periode* er 2π sekunder, hvilket skrives således $T = 2\pi$ s.

Eksempel 1 Her har vi tegnet svingningerne med ligningerne $y = \sin(2x)$ og $y = \sin(x)$



Grafen for ligningen $y = \sin(2x)$ udfører to hele svingninger på samme tid, som grundsvingningen (dvs. $y = \sin(x)$) bruger for at udføre en svingning, dvs. at perioden er π . Amplituden er 1.

Eksempel 2 Svingningen givet ved $y = 1.5 \sin(3x)$:



Her kan vi se, at der udføres tre hele svingninger på den samme tid, som grundsvingningen bruger om at udføre en hel svingning, dvs. at perioden $T = \frac{2\pi}{3}$. Amplituden er 1.5. \square

Ovenstående er eksempler på sinussvingninger givet ved en funktion af formen

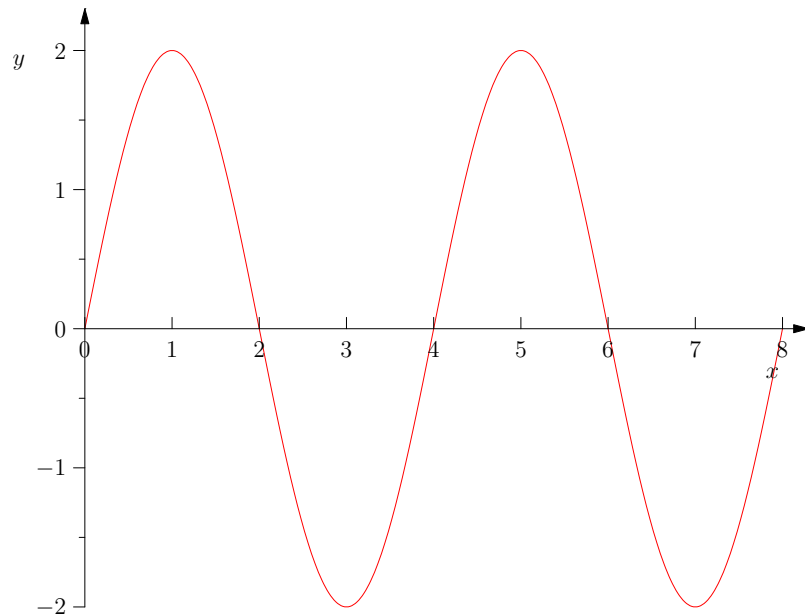
$$f(x) = A \sin(\omega x),$$

og de omtales som *harmoniske* svingninger¹. Konstanten A kaldes amplituden, idet den udtrykker udsvingets størrelse omkring x -aksen, og konstanten ω kaldes vinkelfrekvensen. Af de foregående eksempler fremgår det, at perioden $T = \frac{2\pi}{\omega}$, hvilket også er let at

¹den generelle definition følger senere

indse, idet svingningen skal starte forfra første gang, når ωT bliver lig med 2π .

Eksempel 3 En svingning hvor $T = 4$ og $A = 2$. Ligningen bliver derfor $y = 2 \sin(\frac{\pi}{2}x)$.



Vi opsummerer vores resultater nedenunder:

$f(x) = A \sin(\omega x)$ (en harmonisk svingning) $A =$ amplituden (udsvingets størrelse). $T =$ perioden (den tid (s) det tager at udføre en svingning). $\nu = \frac{1}{T}$ frekvensen (antal svingninger pr. sekund). $\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$ vinkelfrekvensen.

Vi kan dermed udtrykke den harmoniske svingning på forskellige måder :

$$f(x) = A \sin(\omega x) = A \sin(2\pi\nu x) = A \sin\left(\frac{2\pi}{T}x\right)$$

afhængig af den givne situation.

Eksempel 4 En svingning med amplituden 230 og frekvensen 50 Hz, har forskriften $f(x) = 230 \sin(100\pi x)$. □

Eksempel 5 Den harmoniske svingning givet ved $f(x) = 15 \sin(10\pi x)$ har amplituden 15 og frekvensen 5 Hz, og perioden er derfor lig med 0,2 s . □

Vi er nu klar til den endelige definition. Ved en *harmonisk svingning* forstås en funktion f givet ved

$$f(x) = A \sin(\omega x + \varphi) + C$$

Konstanten φ kaldes fasekonstanten og konstanten C forskyder grafen langs y -aksen, således at den svinger omkring linjen $y = C$. Da virkningen af konstanten C er triviel, vil vi se bort fra C i det følgende.

Vi foretager følgende omskrivning:

$$f(x) = A \sin(\omega x + \varphi) = A \sin(\omega(x + \frac{\varphi}{\omega})) = g(x + \frac{\varphi}{\omega}),$$

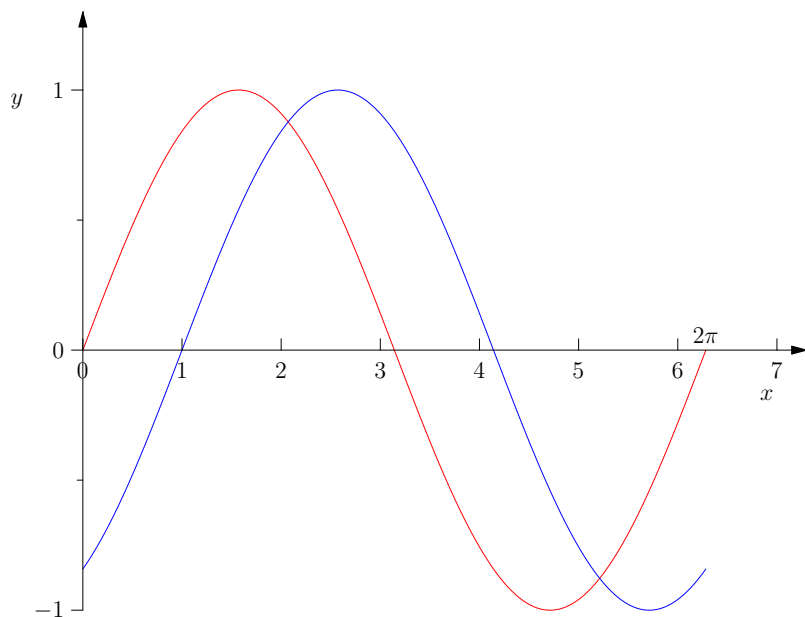
hvor

$$g(x) = A \sin(\omega x).$$

Omskrivningen viser os, at grafen for f fremkommer ved at parallelforskyde grafen for g stykket $-\frac{\varphi}{\omega}$ i x -aksens retning. Vi omtaler derfor tallet $-\frac{\varphi}{\omega}$ som faseforskydningen.

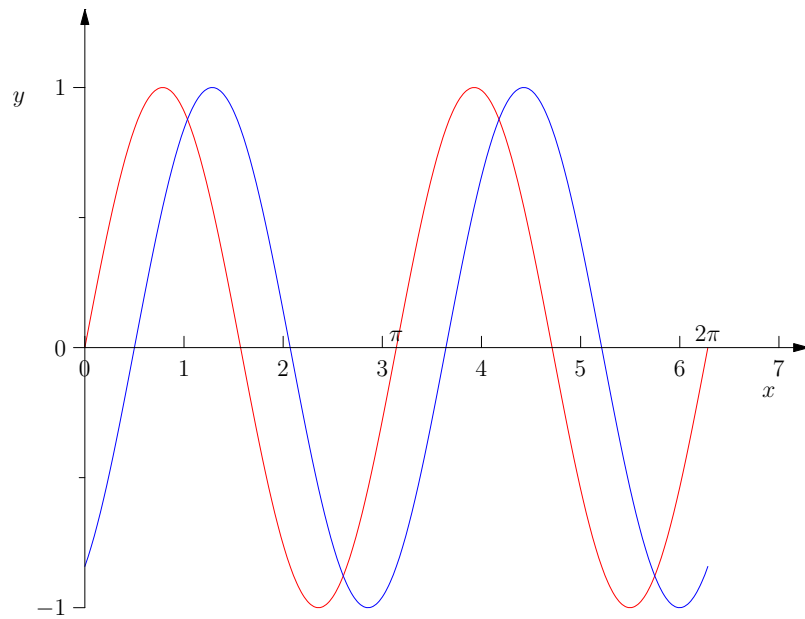
Eksempel 4

Herunder er en tegning af graferne for grundsvingningen og for $f(x) = \sin(x - 1)$. Vi kan se, at sidstnævnte graf er forskudt en enhed til højre.



Når vinkelfrekvensen er 1, er fasekonstanten og faseforskydningen modsatte tal. □

Eksempel 5 Her er en tegning af graferne for $g(x) = \sin(2x)$ og for $f(x) = \sin(2x - 1)$. Vi kan se, at sidstnævnte graf er forskudt en halv enhed til højre !



□

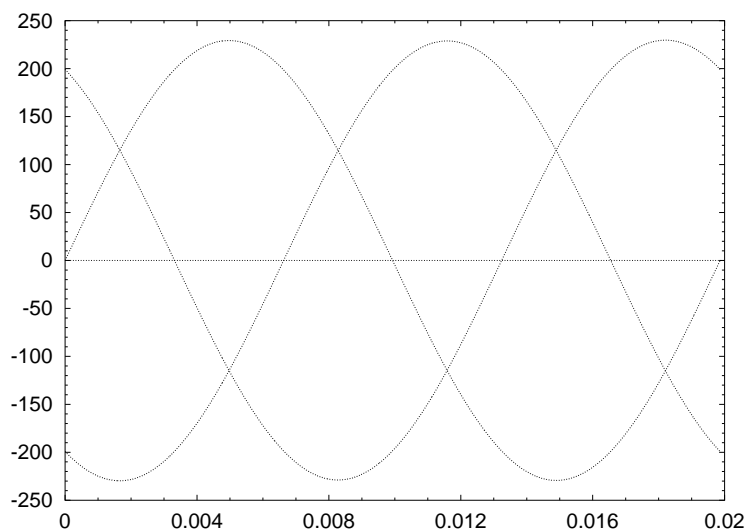
Vekselstrøm

Vekselstrøm kan beskrives ved en sinussvingning med frekvensen 50 Hz, dvs. spændingen svinger 50 gange i sekundet mellem -230 V og 230 V. Det har ingen betydning for en glødelampe, idet glødetråden er varm i de korte tidsrum, hvor spændingen falder, men fx. computerskærme vil blinke 50 gange i sekundet, men det er så hurtigt at vores øjne ikke kan opfatte det.

Komfurer, opvaskemaskiner mv. kræver normalt trefaset vekselstrøm, hvor spændingen svinger mellem -400 V og 400 V. Trefaset vekselstrøm består af tre elledninger med almindelig vekselstrøm, hvor sinussvingningerne er faseforskudt med en tredjedel periode.

De tre svingninger kan derfor beskrives ved følgende forskrifter:

- $f(x) = 230 \sin(100\pi x)$
- $g(x) = 230 \sin(100\pi x - \frac{2}{3}\pi)$
- $h(x) = 230 \sin(100\pi x - \frac{4}{3}\pi)$



Der gælder følgende:

- De tre faseforskudte svingninger ophæver hinanden, dvs. hvis man lægger dem sammen får man 0-funktionen.
- Differencen mellem to vilkårlige af svingningerne er en harmonisk svingning med en amplitude på ca 400 V (sådan laver man altså trefaset vekselstrøm).

Påstandene er en konsekvens af følgende

Sætning

Summen af to harmoniske svingninger med samme vinkelfrekvens (eller samme frekvens) er selv en harmonisk svingning (evt. nulfunktionen).

Der gælder nemlig, at hvis vi lader $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi_1)$ og $g(x) = B \sin(\omega x + \varphi_2)$, så er

$$f(x) + g(x) = C \sin(\omega x + \varphi), \text{ hvor}$$

$$C = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

og φ kan bestemmes på følgende måde:

$$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{A \sin(\varphi_1) + B \sin(\varphi_2)}{A \cos(\varphi_1) + B \cos(\varphi_2)} \right)$$

når nævneren ikke er 0. Hvis nævneren er negativ, skal der dog lægges π til.

(Beviset udelades.)

Bemærkning

$\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$, så vi kan undgå negative argumenter til \cos .

Formlerne gælder for alle $A, B \in \mathbb{R}$, og dækker derfor også det tilfælde, hvor vi trækker fra i stedet for at lægge til.

Vi vil nu efterregne påstandene ovenfor :

Først viser vi, at summen af de tre svingninger giver 0-funktionen. Vi ser først på summen af de to første:

1. $230 \sin(100\pi x) + 230 \sin(100\pi x - \frac{2\pi}{3}) :$

$$C = \sqrt{2 \cdot 230^2 + 2 \cdot 230^2 \cos(\frac{2\pi}{3})} = 230$$

så amplituden er uændret.

$$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{230 \sin(0) + 230 \sin(-\frac{2\pi}{3})}{230 \cos(0) + 230 \cos(-\frac{2\pi}{3})} \right) = -\frac{\pi}{3}$$

så regneforskriften for summen bliver lig med: $230 \sin(100\pi x - \frac{\pi}{3})$. Vi lægger den nu sammen med den tredje svingning:

2. $230 \sin(100\pi x - \frac{\pi}{3}) + 230 \sin(100\pi x - \frac{4\pi}{3}) :$

$$C = \sqrt{2 \cdot 230^2 + 2 \cdot 230^2 \cos(\pi)} = 0$$

altså amplituden bliver 0, hvormed resultatet er bevist.

Vi ser nu på differencen mellem de to første (svarende til at $B = -230$) :

$$230 \sin(100\pi x) - 230 \sin(100\pi x - \frac{2\pi}{3}). \text{ Her får vi, at}$$

$$C = \sqrt{2 \cdot 230^2 - 2 \cdot 230^2 \cos(\frac{2\pi}{3})} = 230 \sqrt{3}$$

så amplituden er ≈ 400 , og

$$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{230 \sin(0) - 230 \sin(-\frac{2\pi}{3})}{230 \cos(0) - 230 \cos(-\frac{2\pi}{3})} \right) = \frac{\pi}{6}$$

så regneforskriften for differencen bliver lig med: $230\sqrt{3} \sin(100\pi x + \frac{\pi}{6})$.

□

Preben M. Henriksen 14/1/2006