Rotter og indianere. Og Kloge Hans.

Af Jørgen Ebbesen

Tal, sprog og kognition

Et af de mere delikate spørgsmål inden for matematikkens videnskabsteori er det ontologiske spørgsmål: hvad er de matematiske objekter for en slags størrelser, i hvilken forstand eksisterer de? Er de menneskeskabte, eller ville de være der, selv hvis der ikke var mennesker til?

Det er ganske let at afvise spørgsmålene som noget fortænkt pladder. Tag fx det sidste. Hvordan skulle vi mennesker kunne afgøre, om matematikkens objekter eksisterede, hvis vi ikke selv gjorde det, og hvilken glæde ville vi i øvrigt have af svaret?

Men alligevel er der noget fascinerende ved spørgsmålene. Det er underligt, at det er så svært at forklare, hvad noget så velkendt som fx tallene er. Man kan anlægge den synsvinkel, at tallene og det, vi gør ved dem, udgør et lille hjørne af menneskets sprog, og som sådan er menneskeskabt. Men der er noget specielt ved dette hjørne: det virker mere universelt end resten af sproget. Normalt er det svært at oversætte ordret fra et sprog til et andet – der er en tendens til, at sprog er mere nuancerede på områder, som optager de mennesker, der taler dem. Desværre er de over hundrede ord for sne på grønlandsk en myte[7] – der findes kun to! Men når myten er så sejlivet, er det fordi, at den udtrykker noget, vi alle sammen godt ved. Nemlig at sproget er kulturelt forankret. Men talordene findes på de fleste sprog – der er dog interessante undtagelser, se senere – og er som regel direkte oversættelige fra sprog til sprog – på tværs af kulturer. Så selv hvis man accepterer, at matematik er en menneskeskabt sproglig praksis, står man med det problem, at man er nødt til at forklare, hvad der gør denne praksis til noget helt specielt.

Blandt andet vil de fleste naturvidenskabsfolk nok være villige til at skrive under på Galileis berømte ord om, at ***Naturens** store bog er skrevet **i det** matematiske **sprog***. Men som Eugene Wigner påpeger i sin banebrydende artikel ***The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Science***[8] (1960) er der tale om noget nær et mirakel. Det er måske nok til at forstå, at matematikken kan bruges til at beskrive observerbare hverdagsfænomener, som hvordan ting ser ud, og hvordan de bevæger sig. For det er matematik i nogen grad udviklet til. Men hvordan kan matematikken bruges til at forudsige observerbare fænomener inden for kvantemekanik og almen relativitetsteori. Områder, der ligger milevidt fra vores hverdagserfaringer?

Med mindre naturligvis, at de matematiske strukturer på en eller anden mystisk måde er indbygget i naturen. Man kan stramme den lidt og hævde, at matematikkens objekter nødvendigvis må

---

[7] Læs fx Henrik Dahl: Eskimoers hundrede ord for sne er en myte, 2009 på http://videnskab.dk/content/dk/kultur/eskimoers_hundrede_ord_for_sne_er_en_myte

[8] Eugene Wigner: *The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences*, Communications in Pure and Applied Mathematics, vol. 13, no. I (February 1960). Kan downloades fra http://www.physik.uni-wuerzburg.de/fileadmin/tp3/QM/wigner.pdf

eksistere, fordi de er nødvendige i naturvidenskab ***(Quine–Putnam** uundværligheds argument for realisme).*

Synspunktet kan naturligvis kritiseres. For hvis de matematiske strukturer eksisterer i en eller anden forstand, så har vi et problem (kendt blandt filosoffer som Benacerrafs dilemma). Så er et udsagn om en matematisk struktur jo sandt, hvis strukturen opfylder udsagnet. Men det er jo ikke sådan, at vi afgør, om matematiske udsagn er sande. Det gør vi ved at bevise dem. Vi har altså to konkurrerende sandhedsbegreber. Det er ikke så godt. Og ikke nok med det. Beviserne bygger på aksiomsystemer. Hvordan sikrer vi os, at aksiomerne beskriver virkeligheden?

Man kan blive helt rundtosset, man havner jo i noget snavs, ligegyldigt hvilken position, man indtager. Måske er her en ide til et indslag i matematikundervisningen: del eleverne op i to grupper. Den ene skal optræde som realister, den anden som antirealister. De skal så argumentere for deres respektive syn på matematik. Hvis man forsyner dem med passende stikord, kan de finde argumenter på nettet til at argumentere modpartens synspunkt langt ned under gulvbrædderne. Det bliver straks sværere at forsvare sit eget synspunkt, så der skulle være mulighed for en god og medrivende diskussion.

Realismediskussionen er i øvrigt ikke kun indskrænket til matematik, men den har det – lige som alle andre filosofiske emner – med at blive noget højpandet. Vi forlader derfor det filosofiske spor for at angribe sammenhængen mellem sprog og matematik fra en lidt anden synsvinkel.

Omdrejningspunktet er Whorf-Saphir hypotesen, som i grove træk hævder, at vores tanker er formet af det sprog, vi taler. Det er en kontroversiel påstand, som findes i mange varianter. I den bløde ende af skalaen udtrykker WS-hypotesen noget, som artiklens forfatter er tilbøjelig til at tilslutte sig: sproget påvirker vore tanker. Hvis man fx har lært differential- og integralregning, forsynes man med et mentalt værktøj, som gør det lettere at tænke nogle bestemte tanker om bevægelser og vækst. I den anden ende af skalaen udarter WS-hypotesen til, at strukturen af det enkelte menneskes modersmål fuldstændig fastlægger vedkommendes mentale verdensbillede. Det skal retfærdigvis anføres, at hverken Whorf eller Saphir var talsmænd for denne mere ekstreme position.

Elevopgave 1

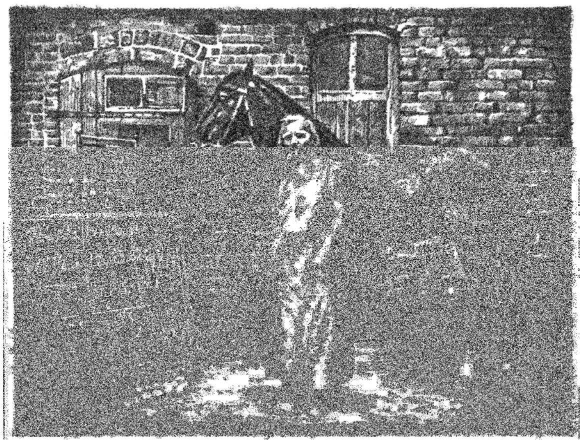
Find informationer på nettet om Whorf-Saphirs hypotese. Ser alle mennesker de samme farver? Afhænger de farver man ser, af det sprog, man taler? Findes der empiriske undersøgelser af spørgsmålet? I Amazonas lever fx en indianerstamme, pirahãerne isoleret fra omverdenen. De har tilsyneladende ikke ord for farverne. Ser de verden på en anden måde, end vi gør?

Jeg tror, at det er muligt at stable et afsindigt spændende AT-forløb med temaet ***Sprog, tanke og virkelighed – hvad former hvad?*** På benene. Måske er det bedst egnet til en eksamensopgave? Udover at emnet er spændende, giver det mulighed for at få nye fag på banen, da det vil være oplagt at forlange, at et fremmedsprog eller matematik inddrages. Og det bliver for en gang skyld svært at inddrage faget historie. Ideen være hermed givet videre. Hvis læseren sidder og spekulerer over, hvor i al verden matematik kommer ind i billedet, så vent og se.

Vi hænger lige Whorf-Saphirs hypotese lidt til tørre. Vi kaster os i stedet over de forsvarsløse dyr. De har i hvert fald ikke noget sprog, som kan påvirke deres (tanker i det omfang, de har nogen, og deres) adfærd.

Men først historien om Kloge Hans, der viser, hvor let det er at tage fejl, når man studerer dyreadfærd.

I år 1900 købte den pensionerede matematiklærer i gymnasiet Wilhelm von Osten en araberhingst.



Som det fremgår af billedet, var der tale om et ualmindeligt smukt dyr. Men hesten var ikke bare smuk. Van Osten var overbevist om, at dyr er intelligente, og som det ses til venstre i billedet, havde van Osten svært ved at slippe sit gamle job. Han lærte blandt andet hesten tysk, logik og matematik. Han var med rette stolt af hesten. Så stolt, at han rejste Tyskland rundt for at vise sin dygtige hest, som han kaldte Kluger Hans (Kloge Hans) frem. Og det ganske gratis, for van Osten var en idealist, der troede på sin hests evner, og ikke en gemen plattenslager, der scorede kassen ved at føre publikum bag lyset. Hvis van Osten spurgte Kloge Hans: ”Hvad giver $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$?”, ville Kloge Hans svare ved først at skrabe 5 gange med hoven, holde en pause og til sidst skrabe 6 gange med hoven. Kloge Hans kunne også svare på regnestykkerne, hvis de blev skrevet op på en tavle.

Elevopgave 2

Regnede Kloge Hans rigtigt?

Van Osten og Kloge Hans blev så berømte, at det tyske undervisningsministerium nedsatte et ekspertpanel, ***Kloge Hans Kommissionen***, som i 1904 nåede frem til det resultat, at der ikke var snyd med i billedet, og at Kloge Hans regnede som en gennemsnitsskoleelev på 14 år.

Den mest oplagte mulighed for snyd ville være, at det var van Osten, der signalerede de rigtige svar til Kloge Hans. Men Kloge Hans kunne regne, selv om van Osten ikke var til stede!

De følgende spørgsmål skal ikke udleveres på en gang, for et spørgsmål vil typisk indeholder oplysninger, der røber svaret på de foregående.

Elevopgave 3

Diskussionsopgave. Var det snyd, eller hvad? Kan dyr tælle og regne? Kender I eksempler, der tyder på det? Eller på det modsatte?

I 1907 påviste psykologen Oscar Pfungst, at Kloge Hans faktisk var utrolig begavet. Men regne kunne hesten ikke.

Elevopgave 4

Oscar Pfungst viste først publikum tavlen med regnestykket, så viste han lidt efter regnestykket til Kloge Hans, som regnede forkert. Hvad var der specielt ved Oscar Pfungst regnestykker? Vink: han var lidt af en fusker.

Elevopgave 5

Hvordan kan det være, at Kloge Hans, tilsyneladende var så dygtig til at regne, når den ikke lige frem blev narret?

Historien om Kloge Hans viser, hvor omhyggelig man skal være, når man designer dyreforsøg (herunder psykologiske forsøg, der involverer mennesker). Den har også haft den virkning, at det har været ualmindeligt svært at vinde gehør for undersøgelsesresultater, der påviser, at dyr kan tælle og/eller regne.

Som en lille krølle på historien kan jeg ikke dy mig for at anføre, at matematikundervisningen i gymnasiet den dag i dag ind i mellem har mindelser om Kloge Hans: eleverne er gode til at aflæse lærerens mimik. Et hævet øjenbryn, og de svarer det modsatte af det, de var i færd med. Et begyndende smil, og eleverne fremturer ad den vej, de er startet på. Lærerens dagsorden er logisk, elevernes psykologisk.

Men lad os vende tilbage til spørgsmålet om, hvor vidt dyr kan tælle og regne.[9] Man tager en sulten(det hjælper på rottens motivation) rotte (og det gjorde Francis Mechner i 1958) og placerer den i en lukket kasse med to pedaler A og B inde i kassen. Når rotten træder på pedal B kan den få en portion mad, ***hvis den vel at mærke har trampet det rigtige antal gange på pedal A forinden***. Hvor mange gange den skal træde på pedal A, indstilles af forsøgslederen.

Elevopgave 6

Kurverne nedenfor viser, hvordan forsøgsresultaterne fordelte sig ved et forsøg, hvor rotterne skulle trampe henholdsvis 4, 8, 12 eller 16 gange for at udløse belønningen.

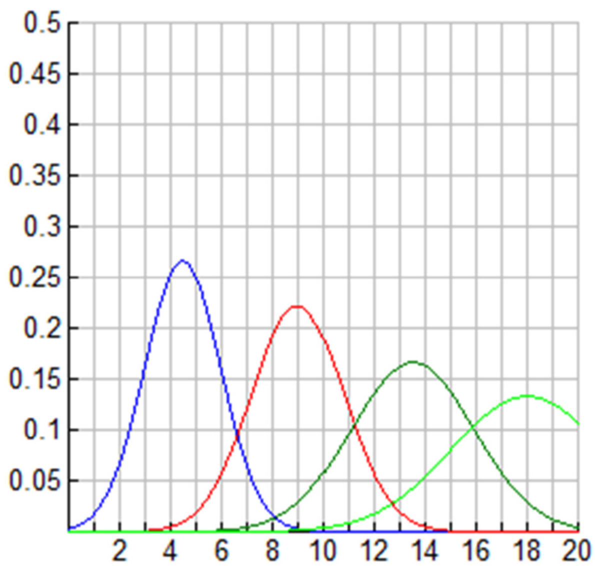
Kan rotter tælle?

---

[9] Fortællingen om rotterne er baseret på et afsnit i Stanislas Dehaene: *The Number Sense – How the Mind Creates Mathematics*, Oxford University Press 1997. Man kan Google sig frem til e-bogudgaven. Overskriften til afsnittet, ***Rat Accountants*** lader sig desværre ikke oversætte, uden at ordspillet går tabt. Inspirationen fra Dehaenes bog fornægter sig heller ikke i forbindelse med Kloge Hans og babyerne.

Det er let at svare ***nej*** på ovenstående spørgsmål. Rotterne er måske ikke vanvittigt gode, men kan de slet ikke tælle?

Hvis rotten trampede på pedal B, ***før*** den havde trampet tilstrækkeligt mange gange på pedal A, blev den straffet. Så kan den lære det! Fx ved at lyset i kassen blev slukket, eller ved at pedalsystemet blev låst, så rotten ikke kunne forsøge sig igen et stykke tid. Afspejles dette i kurverne nedenfor?



Som antydet kan man godt forsvare synspunktet, at rotterne må have en talfornemmelse, selv om den måske ikke er helt præcis. Men kunne man forestille sig, at det i virkeligheden var noget andet rotterne var gode til? Har du nogle forslag?

Elevopgave 7

En oplagt indvending ville være, at rotterne havde en indbygget tidsfornemmelse, så de vidste, hvor længe de skulle trampe, snarere end hvor mange gange.

Denne indvending kan afvises på en enkelt og elegant måde. Man sulter rotterne i rigtig lang tid og gentager forsøget. Det laver ikke om på rotternes træfsikkerhed.

Kan du regne ud, hvorfor det viser, at det ikke kan være tiden, der er afgørende for rotten?

(Svaret er selvfølgelig, at en sulten rotte tramper som død og helvede, så den ville skyde langt over målet, hvis den trampede et bestemt stykke tid).

Som bekendt er læring situeret, og måske lærte rotterne kun, at en trampedans med det rigtige antal trin udløste belønning? For at kunne tale om et egentlig talbegreb, må vi kunne påvise, at rotter, der har lært tallet 4 i en sammenhæng, kan genkende tallet 4 i andre sammenhænge.

Der er desværre ikke, så vidt jeg ved, udført særligt mange eksperimenter til at vurdere overførbarheden af tal lært af dyr i bestemte situationer. Men her er endnu et rotteforsøg. Man tager en sulten rotte (og det gjorde Church og Meck i 1983) og placerer den i en lukket kasse med to pedaler A og B inde i kassen. Så lærer man den, at hvis den hører 2 toner, er der mad, hvis den trykker på pedal A. Hvis den hører 4 toner er der mad, hvis den trykker på pedal B. Man lærer den samme rotte, at hvis den ser 2 lysglimt, er der mad ved A. Ved 4 lysglimt er der mad ved B.

Elevopgave 8

Man synkroniserer lysglimtene og tonerne, sådan at rotten ser to lysglimt, samtidig med at den hører to toner. Hvilken pedal, tror du, at rotten træder på?

Den træder faktisk på pedal B. Kan du forklare det?

Elevopgave 9

Det vil nok være at stramme den, at rotten udfører regnestykket $2 + 2 = 4$. Hvorfor egentlig?

Hvis en chimpanse får god tid og valget mellem en bakke med en bunke med 5 stykker chokolade og et enkelt stykke ved siden af og en bakke med en bunke med 3 stykker og en bunke med 4 stykker, vælger den sidste bakke. Hvorfor (er der andre muligheder)?

Elevopgave 10

Det lader til, at mange dyr har en eller anden form for talfornemmelse. Find argumenter for, at en ”talfornemmmelse” forbedrer forskellige dyrs overlevelseschance i naturen.

Hvad har ovenstående ekskursion til dyreriget med matematiks videnskabsteori at gøre? Traditionelt set ikke noget. Men artiklens forfatter synes alligevel, at den kaster mere lys over, hvad tal egentlig er, end den akademiske realismediskussion. Hvor man som filosof kan argumentere for, at hvis tallene eksisterer i en eller anden abstrakt forstand, er de forbandet svære at komme i kontakt med, har dyr et mere afslappet forhold til tallene. Og tilsyneladende ikke svært ved at komme i kontakt med dem.

Eller? Hvad er det egentlig forsøgene viser? Metodespørgsmål er centrale i forbindelse med de skitserede dyreforsøg i modsætning til den fuldstændigt påklistrede metodediskussion i AT. For en gangs skyld er den hypotetisk-deduktive metode ikke bare noget, man læser om, men vi benytter den i praksis. Og svagheden udstilles oven i købet: vi kan forkaste alternative hypoteser til den hypotese, vi ønsker at eftervise, men har vi overvejet alle alternativer?

Og så tjener ekskursionen også til at belyse sprogets betydning. Det vil vi nu se nærmere på. Selv hvis man som forfatteren er imponeret over dyrene, er deres talbegreb noget upræcist. Men hvad med mennesker? Hvordan kan det være, at vi ville få mad hver eneste gang, hvis vi skulle trampe 4 gange på en pedal, for at få det? Gælder det alle mennesker, uanset køn, alder og race?

Det er sjældent, at aviserne bringer stof af selvstændig matematikfaglig interesse, men da tidsskriftet ***Science*** offentliggjorde artiklen ***Life Without Numbers in the Amazon*** i sin onlineudgave 19/8 2004[10], gik der kun ganske få dage før ***Berlingske Tidende*** fulgte op med artiklen ***En plus en er cirka to*** 24/8 2004. Artiklen er tilgængelig på ***Infomedia***

Den lille indianerstamme pirahãerne består af cirka 200 individer, som lever i små landsbyer ved en biflod til Amazonfloden. Stammens sprog er på mange måder begrænset. Der er kun i alt 10 konsonanter og vokaler, sproget mangler som tidligere nævnt ord for farver, men mest interessant for os: talordforrådet er næsten ikkeeksisterende. Pirahãerne har ord for 1 og 2, and that's it![11] For at det ikke skal være løgn, bruges tallene for 1 og 2 noget sløset efter vores målestok.

Elevopgave 11

Sløsede tal findes også på dansk. I nogle sammenhænge betyder et par præcis to. I andre sammenhænge tager vi det ikke så tungt. Find selv på eksempler!

Set i lyset af Whorf-Saphir hypotesen, som går ud på, at sproget former vores begreber, snarere end at sproget sætter ord på vores begreber, kunne det være interessant at vide, om pirahãerne har en indbygget talfornemmelse på trods af deres åbenlyse mangel på talord.

Det var præcis det, Peter Gordon havde undersøgt i den undersøgelse, hvis resultater blev offentliggjort i ***Science***.[12]

Peter Gordon satte sig sammen med forsøgspersonen ved et bord. Bordet var delt af en pind på midten, og på den ene sides sad PG og stillede opgaverne. For eksempel lagde PG et antal walkmanbatterier på sin bordhalvdel, og indianeren skulle så løse opgaven ved at lægge præcis det samme antal batterier på sin bordhalvdel.

Peter Gordon varierede opgaven noget.[13] Vi har illustreret de forskellige versioner af opgaven på figuren nedenfor (opgaven stilles på venstre bordhalvdel, og det ønskede svar er angivet til højre).

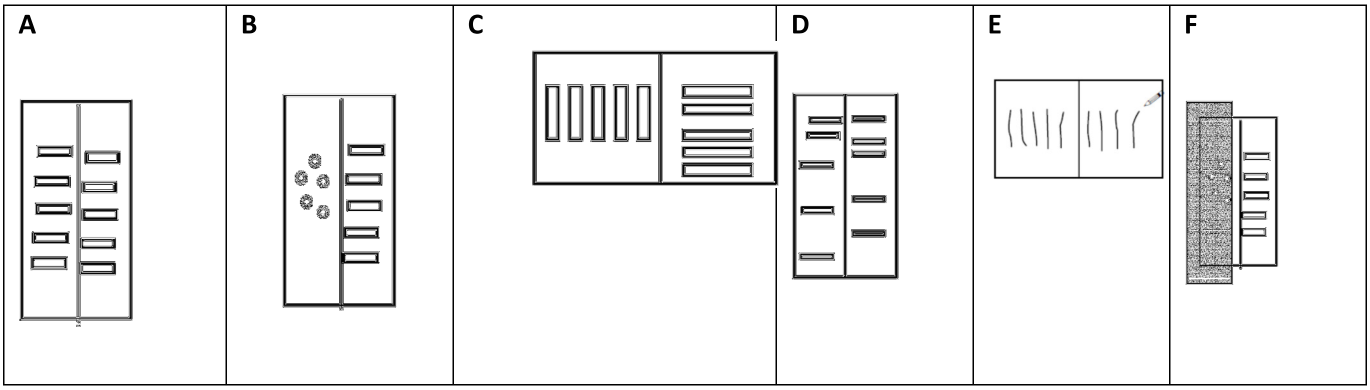
---

[10] Peter Gordon: *Numerical Cognition Without Words: Evidence from Amazonia*, Science vol. 306, 2004. http://www.sciencemag.org/cgi/reprint/306/5695/496.pdf

[11] Læs mere om sammenhæng mellem tal og sprog – fx om sprog, som opererer med et sæt talord, når det er fisk, der skal tælles, og et andet, når det er kanoer – i Sieghard Beller, Andrea Bender: The *Limits of Counting: Numerical Cognition Between Evolution and Culture,* Science vol. 319, 2008. http://www.sciencemag.org/cgi/reprint/319/5860/213.pdf

[12] Forsøgsskitserne er taget fra det supplerende materiale til Peter Gordons artikel, *Supporting Online Material*, www.sciencemag.org/cgi/content/full/1094492/DC1

[13] Det undrer mig, hvordan man sikrer sig, at indianeren forstår spørgsmålet, uden at man selv giver svaret. Og hvis man ikke gør det, risikerer man at give indianeren så få instrukser, at indianeren ikke forstår, hvad man vil have ham til.



Forsøg A er det, vi så på før. I ***forsøg B*** lægger PG et antal nødder op, men indianeren skal stadig svare med batterier. I ***forsøg C*** lægger PG batterierne på den anden led, men indianeren skal stadig svare på den gamle led. I ***forsøg D***, driller PG ved at lægge batterierne med forskellig afstand. I ***forsøg E*** er batterierne erstattet med blyantsstreger. Endelig er ***forsøg F*** en af variant af forsøg B, men PG skjuler nødderne, før indianeren skal svare.

Elevopgave 12

Hvad skal de forskellige varianter af forsøget gøre godt for, viser de ikke det samme?

Graferne, som illustrerer forsøgsresultaterne findes i Peter Gordon: *Numerical Cognition Without Words: Evidence from Amazonia*, Science vol. 306, 2004. Artiklen er tilgængelig online på adressen

http://www.sciencemag.org/cgi/reprint/306/5695/496.pdf

For at få adgang til artiklen skal du registreres, men det er gratis og tager kun et par minutter, og så har du adgang til spritnye forskningsresultater fra ***Science***. Og du kan svare på nedenstående spørgsmål vedrørende graferne.

Det antal, som indianerne skulle matche, er ud ad x-aksen. Procentdelen af rigtige svar er opad y-aksen. Vurdér ud fra resultaterne, om de deltagende indianere kan genkende antallet 4, når de ser det. Hvad med 2?

Forsøg D adskiller sig fra de andre. Hvordan? Har du en forklaring på, at indianerne klarer den tilsyneladende svære opgave så godt?

Du får nu en ekstra oplysning: pirahãer kan ikke tegne, så bare det at skulle tegne en lige streg fik dem til at jamre højlydt. Hvad viser indianernes resultater i forsøg E?

Elevopgave 13

Peter Gordons resultater gik verden rundt og blev af mange udlagt som, at nu havde man den endelige påvisning af den stærkeste version af Whorf-Saphir hypotesen: sproget er bestemmende for vores begrebsverden. Pirahãerne har ikke noget talbegreb, ***fordi*** de ikke har ord for tal, forlød det.

Der er en elementær logisk fejl i denne argumentation. Har Peter Gordons undersøgelser vist en *årsagssammenhæng?*[14]

Forskningen tyder på, at talordene er nødvendige for et eksakt talbegreb, når vi når op på tal større end to. Men det er vel ikke utænkeligt, at talordene er resultatet af et behov for at tælle, altså at sproget er en følge af begrebet, ikke omvendt. Hvorfor skulle man indføre talord, hvis ikke det var for at tælle? Er der i øvrigt ikke lidt hønen og æggene over problematikken?

I ***Berlingske Tidendes*** version blev det til:

Forskere har i Sydamerika fundet frem til en indianerstamme, der er totalt talblind. De kan kun tælle en, to, mange. Forskerne gør med deres undersøgelse op med teorien om, at mennesker har en medfødt sans for tal.

En plus en er cirka to*, Berlingske Tidende 24/8 2004*

Det er nok at stramme den, al den stund at selv rotter har en medfødt sans for tal. Den er bare ikke særlig præcis for større tals vedkommende. Det samme gjaldt pirahãerne.

Elevopgave 14

Hvorfor tror du, at ***Berlingske Tidende*** bragte artiklen?

Tjek lige overskriften: ***En plus en er cirka to***. Er der belæg for den i Peter Gordons undersøgelse?

Det hører til vores børnelærdom, at $1 + 1 = 2$. Faktisk har ligningen været brugt til at bevise Guds eksistens. Beviset tager sit udgangspunkt i, at der findes evige sandheder som at $1 + 1 = 2$. Detaljerne overlades til læseren;) Men ***er*** $1 + 1 = 2$ en evig sandhed?

Der er faktisk noget, der tyder på det. Man tager en 4½ måned gammel baby (Det var lige præcis, hvad Karen Wynn gjorde)[15]. Så filmer man babyens reaktion på en lille dukketeaterforestilling i tre akter. I første akt kommer dukke 1 ind på scenen og bliver skjult bag en skærm. I anden akt accelererer handlingen: dukke 2 bliver ført ind bag skærmen. Tredje akt, som traditionelt er der, hvor intrigen opløses, findes i to versioner. I den ene går skærmen ned, og babyen ser to dukker. Det er den kedelige udgave af stykket. I den anden går skærmen ned, og nu tager stykket en overraskende drejning: der står kun én dukke tilbage på scenen. Babyen tror ikke sine egne øjne.

[14] Man kunne forestille sig, at de manglende ord og manglende begreber har en fælles årsag, nemlig et jungleliv, hvor man ikke har brug for eksakte størrelser, og derfor hverken udvikler ord eller begreber.

[15] Karen Wynn: *Addition and subtraction by human infants*. Nature vol. 358, 749-750, 1992.

Elevopgave 15

Babyerne så markant længere tid på den overraskende slutscene end på den kedelige. Hvad er din konklusion? Kan forsøgsresultatet forklares på andre måder, end at babyen ved, at $1 + 1 = 2$?

Der findes en omfattende litteratur om forholdet mellem tal og sprog. Nogle få er nævnt i fodnoterne. Men de er forholdsvis letlæste og forsynet med omfattende litteraturlister, hvoraf en del af referencerne er tilgængelig på nettet. Det er en spændende diskussion, som virkelig deler vandene. Og så er vi måske lige vidt i vores jagt på svarene på de store spørgsmål: hvad er tal og hvor er de henne? Men måske har vi fået svaret på nogle af de små undervejs?