

Steen Bentzen

Matematik for Gymnasiet

**Trigonometriske funktioner
og matematiske modeller.**

Indholdsfortegnelse

Forord	s. 2
Kap. 1: Trigonometriske funktioner og grader.	s. 3
Grader som vinkelmål	s. 3
Sinus og Cosinus	s. 4
Tangens	s. 6
Retvinklede trekanter	s. 8
Vilkårlige trekanter	s. 10
Kap. 2: Trigonometriske funktioner og radianer	s. 18
Radianer som vinkelmål	s. 18
Sinus og Cosinus	s. 20
Harmoniske funktioner	s. 22
Tangens	s. 27
Trigonometriske grundligninger og uligheder	s. 28
Omskrivningsformler for sinus, cosinus og tangens	s. 34
Kap. 3: Trigonometriske funktioner og infinitesimal regning	s. 40
Kontinuitet og differentiability	s. 40
Integration af trigonometriske funktioner	s. 47
Kap. 4: Trigonometriske funktioner og modeller	s. 51
Harmoniske svingninger. Bølgebevægelse. – Uden differentialregning	s. 51
Paraboloide som reflektor	s. 59
Svingninger og differentialregning	s. 62
Optimering	s. 64
Regnbuer	s. 66
Appendices	s. 78
Appendix 1: Areal af en trekant	s. 78
Appendix 2: Parallelforskydning og ret affinitet af grafer for funktioner	s. 80
Appendix 3: Omvendte funktioner	s. 85
Appendix 4: Spejling i linien med ligningen: $y = x$	s. 89
Appendix 5: Afstanden mellem to punkter i et koordinatsystem	s. 90
Appendix 6: Additionsformel bevist v.hj.a. vektorer	s. 91
Opgavesamling	s. 92
Modelopgaver	s. 101
Stikordsregister	s. 111

Forord.

Formålet med denne bog er at

- give mulighed for at studere de trigonometriske funktioner på forskellige niveauer
- præsentere en sammenhængende velfunderet beskrivelse af de trigonometriske funktioner
- give en række eksempler på anvendelser og matematiske modeller hvori de trigonometriske funktioner indgår.

Bogens indhold og opbygning afspejler direkte dette formål – jfr. bl.a. indholdsfortegnelsen.

I kapitel 1 og 2 omtales de er trigonometriske funktioner i relation til vinkler målt i grader hhv. som funktioner af tal (der i denne sammenhæng benævnes radianer). Ingen af disse kapitler bygger på differentialregning mm. – og de kan derfor (samlet eller tidsmæssigt adskilt) placeres relativt tidligt i et længerevarende undervisningsforløb (f.eks. et 2-3 årigt gymnasieforløb).

I kapitel 3 omtales de trigonometriske funktioner i relation til infinitesimalregning, og det forudsættes derfor, at læseren har et solidt kendskab til begreberne kontinuitet og differentiabilitet. Der er også for fuldstændighedens skyld medtaget et kort afsnit om integralregning i relation til de trigonometriske funktioner. Dette kan man blot udelade, hvis det ønskes.

De trigonometriske funktioner anvendes i en lang række sammenhænge indenfor specielt fysik og teknik, bl.a. i relation til vej-, bro- og bygningsteknik, cirkelbevægelse, skråt kast, resonans og tvungne svingninger, faseforskydning af vekselstrøm, optiske gitre, ladede partiklers bevægelse i elektriske og magnetiske felter osv. osv.. Men for at begrænse bogens omfang og kompleksiteten i de beskrevne eksempler (herunder beskrivelsen af forudsætningerne inden vi ”kommer til selve matematikken”) udelades disse emner. Der henvises til litteraturen på området (herunder for nogle få af emnerne vedkommende til bogen: Differentialligninger og matematiske modeller. 2. udgave). Af samme årsag er et emne som kortprojektioner udeladt.

Det er mit håb, at læseren er tilfreds med det udvalg af modeller/anvendelser, der er medtaget.

I kapitel 4 omtales ”større” modeller, der (bortset fra første afsnit om harmoniske svingninger og bølgebevægelser) alle forudsætter kendskab til differentialregning, og i opgavesamlingen er en række ”mindre” modeller samlet i en særlig modelopgavesamling.

Der er 6 appendices til bogen, som på forskellig vis udgør dele af fundamentet for bogen. Disse læses naturligvis kun i det omfang, det skønnes relevant.

Bogen er beregnet til undervisning i matematik på gymnasialt niveau, men bogen kan også anvendes på første studieår på en række matematisk orienterede studier.

Bogens indhold og struktur gør den desuden oplagt at bruge i tværfagligt samarbejde og i projekter med specielt fysik og teknik.

Der anvendes markeringen ♥ til at angive afslutningen af en øvelse, et eksempel eller et bevis.

Herning, September 2009

Steen Bentzen