Kap. 1: Integralregning byggende på stamfunktioner.

1.1. Specielle egenskaber ved funktioner.

Definition 1.1.1.

En funktion f siges at være *begrænset* i et interval I, hvis f er defineret i intervallet, og hvis der findes to tal k og K, så der for alle $x \in I$ gælder, at: $k \le f(x) \le K$

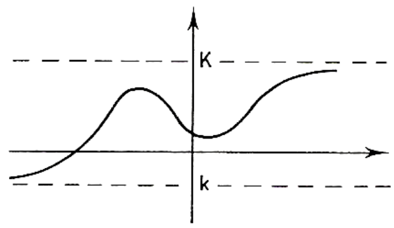


Fig. 1.1

Øvelse 1.1.2.

Afgør hvilke af følgende funktioner f der er begrænsede i intervallet I, når:

a) $f(x) = 500 \cdot \sin(2x)$, $I = R$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x+3}$, $I = \left]-10;-3\right[$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x+3}$, $I = \left]0;20\right[$

d) $f(x) = x^2$, $I = R_+$ ♥

Definition 1.1.3.

a) En funktion f siges at være *positiv* (eller mere korrekt: *ikke-negativ*) i et interval I, hvis f er defineret i I, og hvis $f(x) \ge 0$ for alle $x \in I$. (Se figur 1.2 a)

b) En funktion g siges at være *negativ* (eller mere korrekt: *ikke-positiv*) i et interval I, hvis g er defineret i I, og hvis $g(x) \le 0$ for alle $x \in I$. (Se figur 1.2 b)

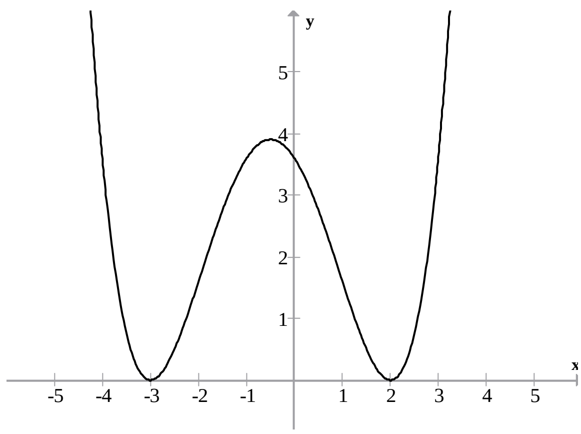


Fig. 1.2 a)

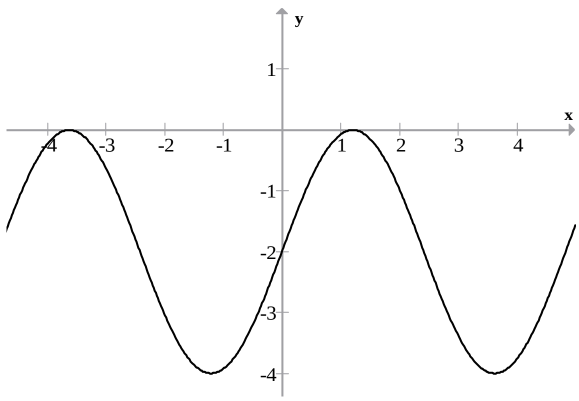


Fig. 1.2 b)

Pas på, at den sproglige fordel ved benævnelsen "positiv funktion " i stedet for "ikke-negativ funktion" ikke fører til en logisk ulempe, hvor man tror, at $f(x) > 0$. Funktionen kan stadigvæk godt antage funktionsværdien 0 (Se figur 1.2. a)). Og tilsvarende med benævnelsen "negativ funktion".
Det er altså p.gr.a. den sproglige fordel, at vi i denne bog tillader os at anvende benævnelserne positiv funktion hhv. negativ funktion, selvom de mere korrekte benævnelser er: ikke-negativ hhv. ikke-positiv funktion.

<u>Øvelse 1.1.4.</u>
Afgør, om følgende funktioner er positive funktioner, negative funktioner – eller ingen af delene:

a) $f(x) = 2x^2 - 3x + 7$ b) $f(x) = \dfrac{-3}{x+4}$, $x < -4$ c) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} \cdot (\cos(x) + 0{,}5)$ ♥

<u>Definition 1.1.5.</u>
En funktion f siges at være *stykkevis monoton*, hvis dens definitionsmængde kan opdeles i <u>endeligt mange</u> delintervaller indenfor hvilke f enten er voksende, aftagende eller konstant, evt. bortset fra intervalendepunkterne. (Se figur 1.3)

Vi anvender også benævnelsen: *stykkevis monoton i et interval I*. Den eneste forskel er, at definitionsmængden erstattes af intervallet I.

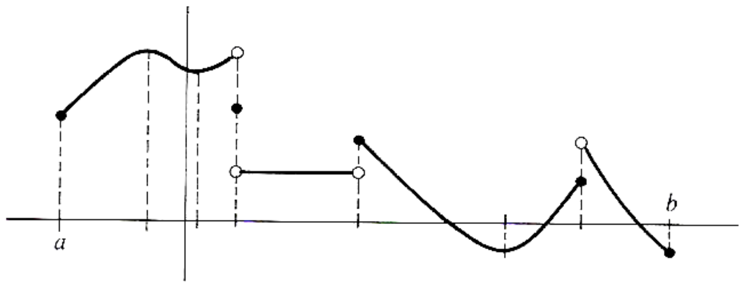


Fig. 1.3

<u>Øvelse 1.1.6.</u>
Opdel definitionsmængden for hver af følgende funktioner i intervaller som anført i definition 1.1.5.

a) $f(x) = \dfrac{3}{x-2}$ b) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 1$ c) $f(x) = \sqrt{x^2 - 16}$ ♥

<u>Øvelse 1.1.7.</u>

Funktionen $f(x) = \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $x \in \left]0;2\right]$ er kontinuert.

Argumentér for, at f ikke er stykkevis monoton. ♥

<u>Definition 1.1.8.</u>
En funktion f siges at være *stykkevis kontinuert*, hvis dens definitionsmængde kan opdeles i <u>endeligt mange</u> delintervaller indenfor hvilke f er kontinuert, evt. bortset fra intervalendepunkterne.

Vi anvender også benævnelsen: *stykkevis kontinuert i et interval I*. Den eneste forskel er, at definitionsmængden erstattes af intervallet I.

<u>Øvelse 1.1.9.</u>
Gør rede for, at funktionen på figur 1.3 er stykkevis kontinuert i $I = [a;b]$.
Beskriv de relevante delintervaller og om endepunkterne er med eller ej. ♥

1.2. Stamfunktioner.

Definition 1.2.1.
En funktion F siges at være *stamfunktion* til en funktion f i et interval I, hvis: $F'(x) = f(x)$
for alle $x \in I$ (altså hvis F differentieret giver f).
Hvis x er et intervalendepunkt for I, som er med i I, så er det underforstået, at der er tale om $F'_+(x)$ eller $F'_-(x)$

Eksempel 1.2.2.
a) Funktionen $F(x) = \sin x$ er stamfunktion til funktionen $f(x) = \cos x$ i hele R, idet der for alle x gælder, at $(\sin x)' = \cos x$

Men bemærk, at funktionerne: $\sin(x) - 3$, $\sin(x) - \frac{1}{2}$ og $\sin(x) + 1001$ ligeledes er stamfunktioner til $\cos x$, idet det konstante led forsvinder ved differentiationen.

b) Funktionen $\frac{1}{4}x^4$ er stamfunktion til funktionen x^3, idet $(\frac{1}{4}x^4)' = x^3$ ♥

Eksempel 1.2.3
Funktionen $\ln|x| + c$, hvor c er en vilkårlig konstant, er en stamfunktion til $\frac{1}{x}$ både i R_+ og i R_-.

For hvis x > 0, så er $(\ln|x| + c)' = (\ln|x|)' = (\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

Og hvis x < 0, så er $(\ln|x| + c)' = (\ln|x|)' = (\ln(-x))' = \dfrac{1}{-x} \cdot (-x)' = \dfrac{1}{-x} \cdot (-1) = \dfrac{1}{x}$

hvor vi i den sidste omskrivning har brugt dels, at $|x| = -x$ for negative x, dels regnereglen for differentiation af en sammensat funktion. ♥

Øvelse 1.2.4.
Bestem en stamfunktion til hver af funktionerne:

a) $f(x) = x^2$ b) $f(x) = 0$ c) $f(x) = \sin(2x)$
d) $f(x) = e^x$ e) $f(x) = 12$ f) $f(x) = x^{0,7}$
g) $f(x) = 2x - 1$ h) $f(x) = 1 + \tan^2(x)$ i) $f(x) = 3^x + x^3$ ♥

Øvelse 1.2.5.
Bestem en stamfunktion til:

a) $f(s) = \frac{1}{2}s^2$ b) $g(p) = -2p + 300$ c) $h(y) = 5y^8 - 3y^2$ ♥

På indersiden af denne bogs omslag er der anført en tabel over en række kendte funktioner, deres stamfunktioner og deres differentialkvotient. Stamfunktionernes rigtighed kan kontrolleres ved at differentiere dem og se, at det giver den tilsvarende funktion. Dette overlades som en øvelse til læseren. Men det skal fremhæves, at der i den følgende tekst gives argumenter for, hvordan vi har fundet (eller kan finde !) de anførte stamfunktioner. De er jo ikke bare "tryllet" frem.

I forlængelse af eksempel 1.2.2 og 1.2.3 bemærkes, at vi overalt i kolonnen over stamfunktioner kan lægge en vilkårlig (en såkaldt "arbitrær") konstant k til, idet en sådan konstant forsvinder ved differentiation.

Som nævnt gælder der, at hvis en funktion f har en stamfunktion F, så er alle funktioner af typen F + k , hvor k er en konstant, også stamfunktioner til f.
Omvendt ser vi, at hvis F og G er stamfunktioner til den samme funktion f i et interval I, så har vi: $F'(x) = f(x)$ og $G'(x) = f(x)$ for alle $x \in I$ – og dermed gælder der: $G'(x) - F'(x) = 0$ dvs. $(G(x) - F(x))' = 0$ for alle $x \in I$.
Hvis en funktions differentialkvotient er 0 i et interval, så er funktionen konstant. Der findes derfor en konstant k, så $G(x) - F(x) = k$, dvs. $G(x) = F(x) + k$.
I alt har vi dermed vist følgende sætning:

Sætning 1.2.6.
Hvis en funktion f har en stamfunktion F i et interval I, så har den uendeligt mange stamfunktioner. Og samtlige stamfunktioner til f i intervallet I er af formen: F + k, hvor k er en konstant.

Herudfra kan vi nu indse, at der gælder følgende sætning:

Sætning 1.2.7.
Lad f være en funktion, som i et interval I har en stamfunktion F, og lad (x_o, y_o) være et punkt i planen, hvor $x_o \in I$.
Da har f netop én stamfunktion i I, hvis graf går igennem punktet (x_o, y_o).

Bevis:

Da en vilkårlig stamfunktion til f i I har formen F + k, og da der skal gælde, at

$$F(x_o) + k = y_o$$

er der kun en mulighed for værdien af k, nemlig: $k = y_o - F(x_o)$.

For denne værdi af k er det ønskede imidlertid også opfyldt, hvormed sætningen er bevist. ♥

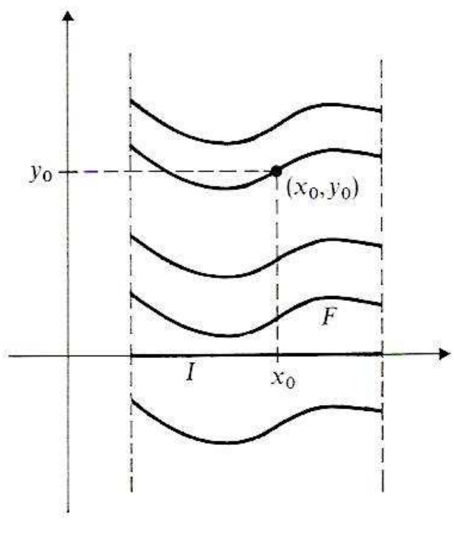


Fig. 1.4

Eksempel 1.2.8.
Vi vil finde en stamfunktion F til funktionen $f(x) = \sqrt{x}$ i intervallet $I = R_+$, så grafen for F går igennem punktet (4,7), dvs. som opfylder, at $F(4) = 7$.
Da funktionen $\frac{2}{3}x\sqrt{x}$ er en stamfunktion til f (kontrollér !) får vi ifølge sætning 1.2.6, at der findes en konstant k, så $F(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + k$. Da $F(4) = 7$ findes k således:

$$7 = \frac{2}{3}\cdot 4\cdot\sqrt{4} + k \iff k = \frac{5}{3}$$

Vi finder altså, at: $F(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + \frac{5}{3}$, $x \in R_+$ ♥

Øvelse 1.2.9.

Bestem den stamfunktion Q til funktionen: $q(x) = x + \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x > 0$, som opfylder, at $Q(4) = 10$ ♥

Øvelse 1.2.10.

Bestem en funktionsforskrift for funktionen h, idet det er givet, at: $h'(x) = e^{3x} - 1$ og $h(0) = 1$ ♥

1.3. Ubestemte integraler.

Definition 1.3.1.
Som betegnelse for en (vilkårlig) stamfunktion til en given funktion f anvendes ofte symbolet:

$$\int f(x)dx$$

$\int f(x)dx$ kaldes også for et *ubestemt integrale* af f ,
og når vi finder en stamfunktion til f så siger vi, at *integrerer* f.
I opskrivningen af integralet kaldes funktionen f ofte for *integranden.*

Fordelen ved betegnelsen $\int f(x)dx$ for en stamfunktion til f – frem for at kalde den F – er, at man i udtrykket $\int f(x)dx$ kan se, hvilken funktion f vi finder stamfunktionen til. Vi kan derfor f.eks. skrive:

$$\int \cos x\, dx = \sin x$$

i stedet for:

$$F(x) = \sin x \quad \text{er en stamfunktion til } \cos x$$

Det skal bemærkes, at man ofte skriver $\int dx$ i stedet for: $\int 1dx$. Vi har således, at $\int dx = x\ (+\ k)$

Indholdet i definition 1.3.1 kan også formuleres således:
Hvis F er en stamfunktion til f i et interval I, så skriver vi $F(x) = \int f(x)dx$ og vi siger, at *F fremkommer ved at integrere f.* $\int f(x)dx$ er altså en funktion (en stamfunktion til f).
Af definition 1.3.1 ser vi, at der gælder følgende:

$$(*) \quad \int f(x)dx = F(x) \Leftrightarrow F'(x) = f(x) \qquad \text{og} \qquad (**) \quad \left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$$

Reglerne (∗) og (∗∗) kaldes ofte *integrationsprøven*, idet man kan bruge disse til at kontrollere, om det er korrekt, at en given funktion har en anden given funktion som stamfunktion. Det var faktisk denne fremgangsmåde der blev omtalt s. 5 nederst i forbindelse med stamfunktionstabellen.
Bemærk, at hvis f er en differentiabel funktion, så er f en stamfunktion til f', dvs.

$$\int f'(x)dx = f(x)$$

Vi kan heraf se, hvorfor man ofte siger, at integration er den modsatte "regningsart" af differentiation.

Eksempel 1.3.2.

a) Funktionen $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ er stamfunktion til funktionen $f(x) = x^2$, idet der gælder:

$$F'(x) = (\tfrac{1}{3}x^3)' = x^2 = f(x)$$

Vi kan derfor skrive: $\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3$

Funktioner som: $\frac{1}{3}x^3 + 2$, $\frac{1}{3}x^3 - \sqrt{5}$, $\frac{1}{3}x^3 + 108{,}6$ – eller generelt: $\frac{1}{3}x^3 + k$ – er også stamfunktioner til x^2, idet det konstante led forsvinder ved differentiation (jfr. sætning 1.2.6).

Vi bør derfor skrive: $\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + k$, hvor k er en vilkårlig (”arbitrær”) konstant.

b) Der gælder: $\int (2+\sin(3x))\,dx = 2x - \frac{1}{3}\cos(3x) + k$, idet

$(2x - \frac{1}{3}\cos(3x) + k)' = 2 - \frac{1}{3}\cdot(-\sin(3x))\cdot 3 = 2 + \sin(3x)$ ♥

Øvelse 1.3.3:

Bestem følgende ubestemte integraler:

a) $\int x^8 dx$ b) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ c) $\int 5\,dx$ ♥

Øvelse 1.3.4.

Opskriv stamfunktionsformlerne 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 11, 12, 13, 14, 16, 17 fra stamfunktionstabellen på omslaget ved hjælp af integraltegnet – og argumenter for deres rigtighed. ♥

I forlængelse af øvelse 1.3.4, eksempel 1.3.2 og sætning 1.2.6 skal det fremhæves, at der til hver af stamfunktionerne kan lægges en vilkårlig konstant, idet denne forsvinder ved differentiation.
En stamfunktion til en given funktion er altså ikke helt entydig fastlagt.
Værdien af konstanten kan i en konkret situation fastlægges ud fra kendskab til en funktionsværdi for stamfunktionen (jfr. sætning 1.2.7, eksempel 1.2.8, øvelse 1.2.9 og 1.2.10, samt nedenstående eksempel 1.3.5 og øvelse 1.3.6).

Eksempel 1.3.5.

Vi vil finde den stamfunktion F til funktionen $f(x) = 12\cdot 1{,}8^x$, hvis graf går igennem punktet (2,200)

Vi har (kontrollér !), at: $F(x) = \int 12\cdot 1{,}8^x\,dx = 12\cdot\frac{1}{\ln 1{,}8}\cdot 1{,}8^x + c$, hvor konstanten (der her kaldes c) endnu er ukendt. Værdien af c fastlægges ud fra kravet om, at F(2) = 200, hvoraf vi får:

$$200 = 12\cdot\frac{1}{\ln 1{,}8}\cdot 1{,}8^2 + c \quad\Leftrightarrow\quad c = 133{,}85$$

Den søgte stamfunktion har altså forskriften:

$$F(x) = \frac{12}{\ln 1{,}8}\cdot 1{,}8^x + 133{,}85 = 20{,}416\cdot 1{,}8^x + 133{,}85 \quad ♥$$

Øvelse 1.3.6.

Bestem til hver af de følgende funktioner en stamfunktion, hvis graf går igennem punktet: (3,10)

a) $f(x) = x^2$ b) $f(x) = e^x$ c) $f(x) = 8\cdot x^{0,7}$ d) $f(x) = 1{,}6^x + x^{1,6}$ e) $f(x) = 3\cdot e^{0,9x}$ ♥

1.4. Regneregler for ubestemte integraler.

Til hjælp ved bestemmelse af stamfunktioner (ubestemte integraler) gælder en række regneregler, hvor vi i første omgang vil omtale de mere simple af dem:

Sætning 1.4.1.
Lad f og g være to funktioner, der har stamfunktionerne $F(x) = \int f(x)\,dx$ og $G(x) = \int g(x)\,dx$ og lad $k \in R$ være en konstant. Der gælder da følgende regler:

a) $\int k \cdot f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$

b) $\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

c) $\int (f(x) - g(x))\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx$

Bevis:
De tre regler følger af, at når F og G er stamfunktioner til f og g, så er kF, $F + G$ og $F - G$ stamfunktioner til hhv. kf, $f + g$ og $f - g$. Og dette gælder, idet :

$$\begin{aligned}(kF)'(x) &= k \cdot F'(x) = k \cdot f(x)\\ (F+G)'(x) &= F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x)\\ (F-G)'(x) &= F'(x) - G'(x) = f(x) - g(x)\end{aligned}$$ ♥

Eksempel 1.4.2.
Ved anvendelse af de tre regler i sætning 1.4.1 ser vi:

$$\begin{aligned}\int (\tfrac{1}{2}x^5 - 2x^4 + 9x^2 - 7)\,dx &= \int \tfrac{1}{2}x^5\,dx - \int 2x^4\,dx + \int 9x^2\,dx - \int 7\,dx\\ &= \tfrac{1}{2}\int x^5\,dx - 2\cdot\int x^4\,dx + 9\cdot\int x^2\,dx - 7x\\ &= \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{6}x^6 - 2\cdot\tfrac{1}{5}x^5 + 9\cdot\tfrac{1}{3}x^3 - 7x\\ &= \tfrac{1}{12}x^6 - \tfrac{2}{5}x^5 + 3x^3 - 7x\end{aligned}$$

hvor vi også har benyttet formlen: $\int x^r\,dx = \dfrac{1}{r+1}x^{r+1}$ og det faktum, at en stamfunktion til en konstant er konstanten gange den variable.
Det skal bemærkes, at med lidt øvelse kan man springe direkte fra første til sidste led i den ovenstående omskrivning. ♥

Øvelse 1.4.3:
Udregn følgende ubestemte integraler:

a) $\int (x^3 - 2x^2 + 5x + 1)\,dx$ b) $\int \dfrac{2x-1}{\sqrt{x}}\,dx$ c) $\int (5\sin x + 44e^{22x})\,dx$ ♥

Øvelse 1.4.4.
Bestem følgende stamfunktioner: a) $\int \log_2(x)\,dx$ b) $\int \log(x)\,dx$

Vejledning: Anvend sætning 1.4.1 a) og det faktum, at: $\log_c(x) = \dfrac{1}{\ln c}\cdot \ln x$ ♥

Delvis integration.

Sætning 1.4.5. (Delvis Integration)
Lad f og g være kontinuerte funktioner defineret i et interval I. Antag desuden, at g er differentiabel i I og at g' er kontinuert, samt at F er en stamfunktion til f i I.
Der gælder da, at

$$\int f(x)g(x)\,dx \;=\; F(x)\cdot g(x) - \int F(x)\cdot g'(x)\,dx$$

Denne metode kaldes delvis (eller partiel) integration, idet vi ikke får udregnet integralet helt, men får det udtrykt ved et nyt integrale (som så forhåbentlig er lettere at regne ud).

Bevis:
Ud fra reglen om differentiation af et produkt får vi:

$$(F(x)\cdot g(x))' \;=\; F'(x)\cdot g(x) + F(x)\cdot g'(x) \;=\; f(x)\cdot g(x) + F(x)\cdot g'(x)$$

og hermed:

$$\int (F(x)\cdot g(x))'dx \;=\; \int f(x)g(x)\,dx \;+\; \int F(x)\cdot g'(x)\,dx$$

Da $\int (F(x)\cdot g(x))'dx \;=\; F(x)\cdot g(x)$ indses reglen ved at flytte leddet $\int F(x)\cdot g'(x)\,dx$ over på den modsatte side af lighedstegnet. ♥

Eksempel 1.4.6.
Vi vil bestemme en stamfunktion til funktionen $x\cdot(3+x)^5$, dvs. vi vil bestemme: $\int x\cdot(3+x)^5 dx$
Vi sætter f(x) = $(3+x)^5$ og g(x) = x . Da F(x) = $\frac{1}{6}(3+x)^6$ er en stamfunktion til f, og da $g'(x) = 1$ får vi ifølge sætning 1.4.5, at

$$\begin{aligned}\int x\cdot(3+x)^5 dx \;&=\; \tfrac{1}{6}(3+x)^6\cdot x \;-\; \int \tfrac{1}{6}(3+x)^6\cdot 1dx \\ &=\; \tfrac{1}{6}(3+x)^6\cdot x \;-\; \tfrac{1}{6}\int (3+x)^6\,dx \\ &=\; \tfrac{1}{6}(3+x)^6\cdot x \;-\; \tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{1}{7}(3+x)^7\end{aligned}$$

Den søgte stamfunktion er altså: $\frac{1}{6}(3+x)^6\cdot x \;-\; \frac{1}{42}(3+x)^7$ (+ en arbitrær konstant).
(Læseren opfordres til at kontrollere dette ved anvendelse af integrationsprøven). ♥

Øvelse 1.4.7.
Udregn følgende ubestemte integraler: a) $\int 2x\cdot e^x dx$ b) $\int s^2\cdot e^s ds$ ♥

Øvelse 1.4.8.
Vis v.hj.a. delvis integration, at: $\int \ln(x)\,dx \;=\; x\ln(x) - x + k$ (nr. 15 i stamfunktionstabellen)
(*Vejledning:* Betragt 1·ln(x) i stedet for ln(x)). ♥

Øvelse 1.4.9.
Bestem $\int x\sqrt{x}\,dx$ ved delvis integration. Bestem derefter det samme integrale ud fra: $x\sqrt{x} = x^{\frac{3}{2}}$ ♥

Integration ved substitution.

Sætning 1.4.10. (Integration ved substitution).
Lad funktionen g være defineret og differentiabel i et interval I med kontinuert afledet funktion g', og lad f være en kontinuert funktion som opfylder, at $Vm(g) \subseteq Dm(f)$.
Der gælder da, at:

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = \int f(t)\,dt \quad , \quad \text{hvor } t = g(x) \text{ og } dt = g'(x)dx\,.$$

Denne metode kaldes integration ved substitution, idet vi har substitueret (indsat, erstattet) t i stedet for g(x), og dermed bliver $dt = g'(x)dx$ (i overensstemmelse med reglerne for differentialer).
Den variable, vi substituerer for g(x), kan naturligvis kaldes alt muligt andet end t, f.eks. s, p eller u – bare ikke x, idet x er ”optaget” som variabel i g(x).

Bevis:
Lad F være en stamfunktion til f. Ud fra forudsætningerne i sætningen kan vi danne og differentiere den sammensatte funktion F(g(x)), for $x \in I$. Og ud fra reglen om differentiation af en sammensat funktion får vi dermed, at:

$$(F(g(x)))' = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$$

og dermed:

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = \int (F(g(x)))'\,dx = F(g(x)) = F(t), \text{ hvor } t = g(x)$$

Da $F(t) = \int f(t)\,dt$ er sætningen hermed bevist. ♥

Eksempel 1.4.11.
Vi vil bestemme $\int \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$ ved anvendelse af integration ved substitution.

Vi skal derfor lede efter en sammensat funktion f(g(x)) i integranden $\frac{x}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \cdot x$

Vi ser at en mulighed er: $g(x) = 4 - x^2$ og $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. x’et i tælleren er ført ned ved siden af brøken, men det generer selvfølgelig, så vi må håbe på, at det forsvinder i substitutionsprocessen.
Vi sætter $t = g(x) = 4 - x^2$ hvormed vi får: $dt = -2xdx$. Der står desværre ikke $-2xdx$, men kun xdx i integralet. Dette problem afhjælpes ved enten at sige:

$$dt = -2xdx \Leftrightarrow -\tfrac{1}{2}dt = x\,dx \qquad \text{eller:} \qquad \int \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = -\tfrac{1}{2}\int \frac{-2x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$$

hvor vi i det sidste tilfælde både har ganget og divideret med –2 for at opnå det ønskede udtryk.
I begge tilfælde får vi:

$$\int \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = -\tfrac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = -\tfrac{1}{2} \cdot 2\sqrt{t} = -\sqrt{4-x^2}$$

hvor vi i sidste led har erstattet t med $g(x) = 4 - x^2$, idet vi naturligvis skal have stamfunktionen til $\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$ udtrykt ved den hér anvendte variable, dvs. x. Vi får altså: $\int \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = -\sqrt{4-x^2}$ ♥

Øvelse 1.4.12.
Bestem følgende ubestemte integraler v.hj.a. substitution:

a) $\int\sqrt{2x+8}\,dx$ b) $\int(v-3)^2\,dv$ c) $\int 4m\sqrt{2m^2+9}\,dm$ ♥

Øvelse 1.4.13.
Udregn følgende ubestemte integraler: a) $\int\frac{2x+5}{x^2+5x+11}dx$ b) $\int 25p\cdot e^{p^2}\,dp$ ♥

Øvelse 1.4.14.
Vis formlerne 7, 8, 10, 18, 19, 20 og 21 i stamfunktionstabellen v.hj.a. substitution. ♥

Specielle forhold ved og specielle udregninger af ubestemte integraler.
Vi ser, at der både i formlen for delvis integration og i formlen for integration ved substitution optræder et produkt af to funktioner. Og i begge tilfælde får vi et nyt integrale, som så forhåbentlig er nemmere at udregne end det oprindelige. Når man i en konkret situation skal bringe en af metoderne i anvendelse, kan man almindeligvis benytte det faktum, at der ved substitution skal forekomme en sammensat funktion. Men dette er ikke nok, for ”resten” af funktionen skal (på nær en konstant) passe med $g'(x)dx$, hvilket ikke altid er tilfældet.
Som tidligere omtalt er integration den modsatte regningsart af differentiation. Men medens differentiation kan gribes ret ”rutinemæssigt”/”værktøjsmæssigt” an, så bygger integration ofte på opgaveløserens intuition og erfaring, og så naturligvis på en kontant viden om regneregler og visse stamfunktioner.

En særlig ”udgave” af integration ved substitution har vi, hvor substitutionsprocessen ikke matcher fuldstændig med formlen, men hvor vi via substitutionen kan omskrive integranden til noget, der er nemmere at integrere.

Eksempel 1.4.15.
Vi vil udregne integralet $\int\frac{5x}{(x+2)^5}dx$. Vi sætter t = x + 2. Dermed får vi dels, at dt = dx , dels at x = t – 2. Vi kan derfor omskrive således:

$$\int\frac{5x}{(x+2)^5}dx \;=\; \int 5(t-2)\cdot\frac{1}{t^5}dt \;=\; 5\int(\frac{t}{t^5}-\frac{2}{t^5})dt \;=\; 5\int t^{-4}\,dt \;-\; 10\int t^{-5}\,dt \;=\; -\frac{5}{3}t^{-3} \;+\; \frac{10}{4}t^{-4}$$

Som i eksempel 1.4.11 vender vi nu tilbage til den oprindelige variable x, og får dermed:

$$\int\frac{5x}{(x+2)^5}dx \;=\; -\frac{5}{3}(x+2)^{-3} \;+\; \frac{5}{2}(x+2)^{-4}$$

(Læseren opfordres til at kontrollere resultatet ved anvendelse af integrationsprøven). ♥

Øvelse 1.4.16.
Beregn følgende ubestemte integraler:

a) $\int\frac{2x}{\sqrt{x-1}}dx$ b) $\int y^3\cos(y^2+17)\,dy$ ♥

<u>Eksempel 1.4.17.</u>

Vi vil bestemme følgende integraler: a) $\int \sin^2(x)\,dx$ b) $\int \cos^2(x)\,dx$ c) $\int \tan^2(x)\,dx$

<u>Ad a):</u> Da $\cos(2x) = 1-2\sin^2(x)$ ser vi, at $\sin^2(x) = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2x)$, hvoraf vi får, at:

$$\int \sin^2(x)\,dx = \int \tfrac{1}{2}dx - \tfrac{1}{2}\int \cos(2x)\,dx = \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\sin(2x) = \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4}\sin(2x)$$

<u>Ad b):</u> Da $\cos(2x) = 2\cos^2(x)-1$ ser vi, at $\cos^2(x) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2x)$, hvoraf vi får, at:

$$\int \cos^2(x)\,dx = \int \tfrac{1}{2}dx + \tfrac{1}{2}\int \cos(2x)\,dx = \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\sin(2x) = \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}\sin(2x)$$

<u>Ad c):</u> Da $\tan^2(x) = 1+\tan^2(x)-1$, ser vi, at

$$\int \tan^2(x)\,dx = \int (1+\tan^2(x))\,dx - \int 1dx = \tan x - x$$

Disse tre formler er anført i stamfunktionstabellen (nr. 22, 23 og 24) bagest i bogen. ♥

<u>Eksempel 1.4.18.</u>

En logistisk vækstfunktion er en funktion af formen: $\dfrac{M}{1+c\cdot e^{-kMx}}$, hvor M, c og k er konstanter ($k \neq 0$). Sådanne funktioner omtales i Appendix 1.

Vi vil bevise, at: $\displaystyle\int \frac{M}{1+c\cdot e^{-kMx}}dx = \frac{1}{k}\cdot\ln\left|e^{kMx}+c\right|$

Brøken inde i integraltegnet forlænges med e^{kMx}. Vi får: $\displaystyle\int \frac{M}{1+c\cdot e^{-kMx}}dx = \int \frac{M\cdot e^{kMx}}{e^{kMx}+c}dx$

I dette sidste integral anvender vi substitutionen: $t = e^{kMx}+c$ og $dt = kM\cdot e^{kMx}dx$, hvormed det kan omskrives således: $\displaystyle\int \frac{M\cdot e^{kMx}}{e^{kMx}+c}dx = \frac{1}{k}\int\frac{1}{t}dt = \frac{1}{k}\cdot\ln|t|$.

Hvis vi i dette udtryk indsætter, at $t = e^{kMx}+c$, så får vi den ønskede formel. (Nr. 25 i tabellen) ♥

Som det forhåbentlig er fremgået via teksten og de tilhørende øvelser og opgaver, så er der i princippet 3-4 fremgangsmåder ved integration:

Fremgangsmåder ved beregning af integraler/stamfunktioner:
1) Man kan direkte genkende funktionen og finde dens stamfunktion
2) Man kan omskrive/opdele integranden og regne på det herved fremkomne nye udtryk
3) Man kan anvende regnereglerne for integration – her tænkes specielt på delvis integration og integration ved substitution
4) Man kan blande de tre foregående principper på passende vis.

Man kan selvfølgelig også (om end det må betegnes som mindre "matematisk") finde integranden i en integraltabel som f.eks. stamfunktionstabellen bagest i denne bog.

1.5. Arealer og bestemte integraler.

Vi betragter en funktion f defineret i et interval $[a;b]$. Hvis f er positiv, kontinuert og stykkevis monoton (jfr. afsnit 1.1), så kan vi definere *areal-funktionen* A(x) som den funktion, der til ethvert $x \in [a;b]$ tilordner arealet A(x) af den punktmængde, som ligger imellem grafen og førsteaksen indenfor intervallet $[a;x]$ (se figur 1.5).

Bemærk, at A(a) = 0, og at A(b) er arealet under hele grafen, dvs. A(b) er arealet af punktmængden $M = \{(x,y) \mid a \le x \le b \wedge 0 \le y \le f(x)\}$

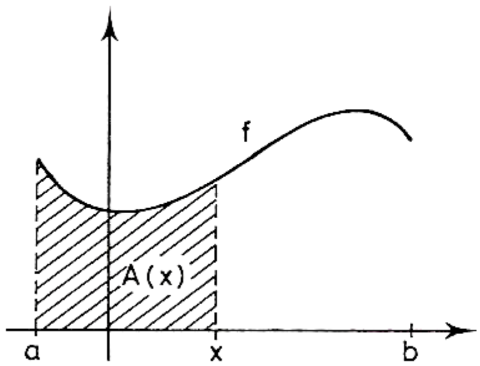


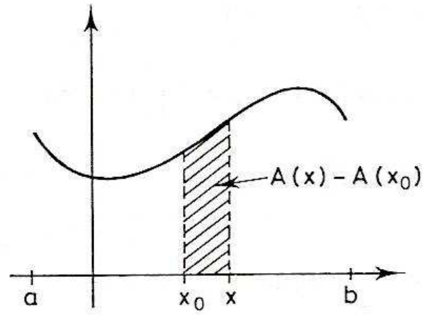
Fig. 1.5

Der gælder nu følgende sætning:

Sætning 1.5.1.
Lad f være en positiv, kontinuert og stykkevis monoton funktion defineret i intervallet $[a;b]$, og lad A(x) være den tilsvarende arealfunktion. Da gælder, at A er en stamfunktion til f, dvs. $A'(x) = f(x)$

Bevis:
Lad $x_o \in \,]a;b[$ være vilkårligt valgt. Vi vil vise, at der i dette punkt gælder, at $A'(x_o) = f(x_o)$.
Vi vil først undersøge, hvad der sker til højre for x_o.
Da f er stykkevis monoton, er f enten voksende, aftagende eller konstant i et område til højre for x_o.
Vi vil her antage, at f er voksende. (Hvis f er aftagende eller konstant, er beviset helt analogt).
For $x > x_o$ (hvor x er indeholdt i det omtalte område) får vi (jfr. figur 1.6), at

$$f(x_o)\cdot(x-x_o) < A(x) - A(x_o) < f(x)\cdot(x-x_o)$$



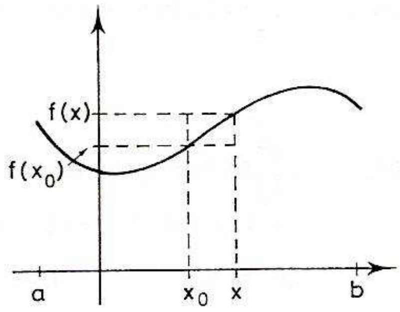


Fig. 1.6

Ved division med $x - x_o$, som er positiv, får vi: $f(x_o) < \dfrac{A(x)-A(x_o)}{x-x_o} < f(x)$.

Vi ser altså, at differenskvotienten for A er "klemt inde" imellem $f(x_o)$ og f(x). Da f er kontinuert har vi specielt, at $f(x) \to f(x_o)$ for $x \to x_o+$, hvoraf vi ser, at:

$$\frac{A(x)-A(x_o)}{x-x_o} \to f(x_o) \quad \text{for} \quad x \to x_o+$$

Vi vil nu se på, hvad der sker til venstre for x_o.
Da f er stykkevis monoton, er f enten voksende, aftagende eller konstant i et område til venstre for x_o.
Vi vil her antage, at f er aftagende. (Hvis f er voksende eller konstant, er beviset helt analogt).
På samme måde som ovenfor ser vi, at for $x < x_o$ (hvor x er indeholdt i det omtalte område) gælder:

$$f(x_o)\cdot(x_o - x) < A(x_o) - A(x) < f(x)\cdot(x_o - x)$$

(Læseren opfordres til at tegne en figur, der illustrerer situationen).

Ved division med $x_o - x$, som er positiv, får vi: $f(x_o) < \dfrac{A(x_o) - A(x)}{x_o - x} < f(x)$.

Og da der gælder: $\dfrac{A(x_o) - A(x)}{x_o - x} = \dfrac{A(x) - A(x_o)}{x - x_o}$ ser vi igen, at differenskvotienten for A er ”klemt inde” imellem $f(x_o)$ og $f(x)$. Da f er kontinuert har vi, at: $f(x) \to f(x_o)$ for $x \to x_o -$ hvoraf vi ser, at:

$$\frac{A(x) - A(x_o)}{x - x_o} \to f(x_o) \quad \text{for} \quad x \to x_o -$$

Da $f(x_o)$ således er grænseværdi for differenskvotienten for A både fra højre og fra venstre i x_o, ser vi hermed i alt, at:

$$\frac{A(x) - A(x_o)}{x - x_o} \to f(x_o) \quad \text{for} \quad x \to x_o$$

dvs. at A er differentiabel i x_o, og at $A'(x_o) = f(x_o)$.
Hvis x_o er et af endepunkterne a eller b, så får vi direkte af første hhv. anden del af beviset, at $A'_+(x_o) = f(x_o)$ eller $A'_-(x_o) = f(x_o)$. Hermed er sætningen bevist. ♥

I forlængelse af sætning 1.5.1 skal det bemærkes, at en tilstrækkelig betingelse for at en funktion har en stamfunktion faktisk kun er, at funktionen er kontinuert, idet der gælder følgende sætning:

<u>Sætning 1.5.2.</u>
Hvis f er en kontinuert funktion defineret i et interval I, så har f en stamfunktion F i I.

Sætning 1.5.2 vises ikke her (den bevises i kapitel 3). Bemærk, at sætning 1.5.2 <u>ikke</u> fortæller, hvordan vi finder stamfunktionen – kun at den eksisterer. Sætningen er altså en såkaldt ”eksistens-sætning” – og den omtales her dels for at sikre det teoretiske fundament for de følgende emner, dels for fuldstændighedens skyld.

Lad os vende tilbage til indholdet i sætning 1.5.1. Den siger altså, at hvis vi har en positiv, kontinuert og stykkevis monoton funktion f defineret i et interval $[a;b]$, så har den en stamfunktion i dette interval (og det er arealfunktionen).
Hvis F er en eller anden stamfunktion til f, så gælder der ifølge sætning 1.2.6, at der findes en konstant k, så $A(x) = F(x) + k$.

Da $A(a) = 0$ ser vi ved at indsætte $x = a$, at: $k = -F(a)$, hvormed vi får, at: $A(x) = F(x) - F(a)$.
Hvis vi specielt indsætter $x = b$ i dette udtryk, får vi: $A(b) = F(b) - F(a)$. Da $A(b)$ som nævnt er lig med arealet under grafen i intervallet $[a;b]$, ser vi, at dette areal kan udregnes som $F(b) - F(a)$.

Hvis G er en anden stamfunktion til f i intervallet, så findes der ifølge sætning 1.2.6 en konstant c, så G(x) = F(x) + c. Hermed får vi specielt, at G(b) – G(a) = (F(b) + c) – (F(a) + c) = F(b) – F(a). Der gælder altså, at uanset hvilken stamfunktion til f vi benytter, så er arealet af punktmængden $M = \{(x,y) \mid a \le x \le b \ \wedge \ 0 \le y \le f(x)\}$, dvs. arealet under grafen, lig med stamfunktionens værdi i b minus stamfunktionens værdi i a.

Af beregningstekniske årsager indfører vi symbolet: $[F(x)]_a^b$ for differensen F(b) – F(a)

Da $F(x) = \int f(x)\,dx$ kan vi derfor skrive: $[F(x)]_a^b = \left[\int f(x)\,dx\right]_a^b$. Vi giver i denne sammenhæng følgende definition:

Definition 1.5.3.

Lad f være en funktion, der er defineret og har en stamfunktion F i intervallet $[a;b]$.

Ved det *bestemte integrale* $\int_a^b f(x)\,dx$ forstås tallet F(b) – F(a).

Vi har altså: $\int_a^b f(x)\,dx = \left[\int f(x)\,dx\right]_a^b = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

$\int_a^b f(x)\,dx$ læses: ”Integralet fra a til b af f(x)” eller ”Det bestemte integrale af f fra a til b”.

Bemærk, at denne definition ikke bygger på noget med, at f skal være positiv, kontinuert eller stykkevis monoton (som det var tilfældet i indledningen til dette afsnit i forbindelse med arealfunktionen). Funktionen f skal ”bare” have en stamfunktion F.

Eksempel 1.5.4.

Hvis vi ser på funktionen f(x) = $x^2 - 4$, så har f stamfunktionen $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x$, hvormed vi f.eks. får, at: $\int_{-1}^{3}(x^2-4)\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - 4x\right]_{-1}^{3} = \frac{1}{3}\cdot 3^3 - 4\cdot 3 - (\frac{1}{3}(-1)^3 - 4(-1)) = -\frac{20}{3}$

Spørgsmålet er så, hvad dette tal betyder, eller: hvilken betydning det kan tillægges. Dette vil være en del af emnet i det følgende. ♥

Hvis vi kombinerer de ovenstående informationer i dette afsnit, så får vi følgende sætning:

Sætning 1.5.5.

Hvis f er en positiv, kontinuert og stykkevis monoton funktion defineret i et interval $[a;b]$, så er arealet af punktmængden M imellem grafen og førsteaksen givet ved:

$$\text{Areal}(M) = \int_a^b f(x)\,dx$$

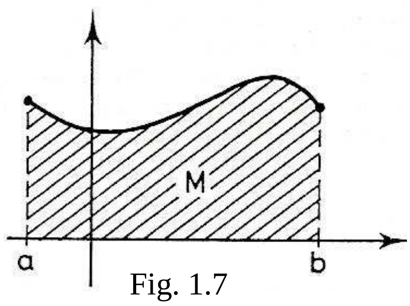


Fig. 1.7

Eksempel 1.5.6.

a) Hvis f(x) = k, hvor k er en positiv konstant, så er:

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; \int_a^b k\,dx \;=\; [kx]_a^b \;=\; kb - ka \;=\; k\cdot(b-a)$$

arealet af det skraverede område på nedenstående figur 1.8

b) Hvis f(x) = $\frac{1}{2}x$, så er: $\int_0^3 f(x)\,dx \;=\; \int_0^3 \frac{1}{2}x\,dx \;=\; \left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}x^2\right]_0^3 \;=\; \frac{9}{4} - 0 \;=\; \frac{9}{4}$

arealet af det skraverede område på nedenstående figur 1.9.

c) Hvis f(x) = $\frac{1}{x^2}$, så er: $\int_1^2 f(x)\,dx \;=\; \int_1^2 \frac{1}{x^2}dx \;=\; \left[-\frac{1}{x}\right]_1^2 \;=\; -\frac{1}{2} - (-\frac{1}{1}) \;=\; \frac{1}{2}$

arealet af det skraverede område på nedenstående figur 1.10.

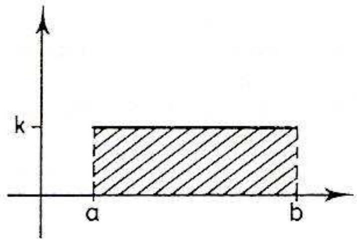


Fig. 1.8

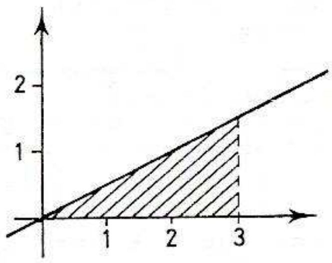


Fig. 1.9

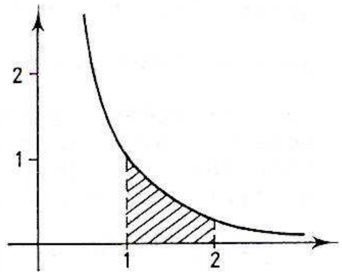


Fig. 1.10

Resultatet i punkt a) og b) kendte vi egentlig godt, idet der blot er tale om arealet af et rektangel hhv. arealet af en trekant. Integralregningens styrke i geometrisk sammenhæng ses bedst i punkt c), hvor vi ikke kendte resultatet på forhånd, idet vi ikke har andre måder at udregne det på. ♥

Eksempel 1.5.7.

Vi vil bestemme arealet A under grafen for funktionen $\log_2$ i intervallet fra 1 til 10. Vi har:

$$A = \int_1^{10} \log_2(x)\,dx \;=\; \int_1^{10} \tfrac{1}{\ln 2}\cdot \ln x\,dx \;=\; \tfrac{1}{\ln 2}\cdot\int_1^{10} \ln x\;dx \;=\; \tfrac{1}{\ln 2}\cdot[x\cdot\ln x - x + c]_1^{10}$$

$$= \tfrac{1}{\ln 2}((10\cdot\ln 10 - 10 + c - (1\cdot\ln 1 - 1 + c)) \;=\; \tfrac{1}{\ln 2}(10\cdot\ln 10 - 9) \;=\; 20{,}235$$

Det søgte areal er altså 20,235.

Bemærk, at værdien af konstanten c er uden betydning, idet c forsvinder i beregningen. Dette gælder i udregningen af ethvert bestemt integrale. ♥

Øvelse 1.5.8.

Udregn de to bestemte integraler: $\int_0^3 x^2\,dx$ og $\int_1^4 \sqrt{x}\,dx$

Lav to figurer, der viser graferne for funktionerne x^2 og $\sqrt{x}$, og skraver de relevante områder. ♥

Det skal bemærkes, at det i opskrivningen af det bestemte integrale er uden betydning, hvad vi kalder den variable. Vi har således:

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; \int_a^b f(y)\,dy \;=\; \int_a^b f(t)\,dt \;=\; \int_a^b f(r)\,dr$$

Det skal endvidere bemærkes, at med den indførte notation er den ovenfor omtalte arealfunktion A for en positiv, kontinuert, stykkevis monoton funktion f givet ved:

$$A(x) \;=\; \int_a^x f(t)\,dt$$

Da $A'(x) \;=\; f(x)$ ser vi, at $\int_a^x f(t)\,dt$ som funktion af x er en stamfunktion til f.

Integraltegnet $\int$ optræder hermed faktisk i tre forskellige betydninger:

1) $\int f(t)\,dt$ (ubestemt integrale) er en <u>vilkårlig stamfunktion</u> til f.

2) $\int_a^x f(t)\,dt$ er en bestemt <u>stamfunktion</u> til f (arealfunktionen).

3) $\int_a^b f(t)\,dt$ (bestemt integrale) er et <u>tal</u> (arealet under grafen for f).

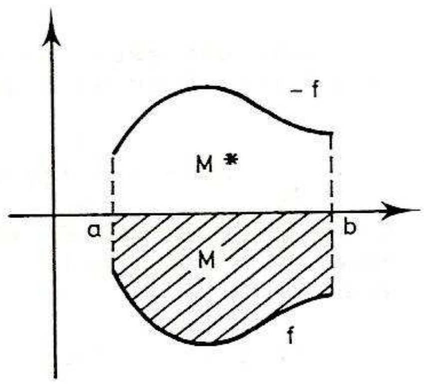


Fig. 1.11

Hvis vi nu betragter en <u>negativ</u>, kontinuert og stykkevis monoton funktion f defineret i et interval $[a;b]$, så er –f en tilsvarende positiv funktion. Og grafen for –f fremkommer ved at spejle grafen for f i førsteaksen (se figur 1.11).
Vi ser hermed, at punktmængderne M og M* på figur 1.11 har samme areal, dvs. Areal(M) = Areal(M*).
Hvis F er en stamfunktion til f, så er –F en stamfunktion til –f.

Vi ser hermed i alt, at

$$\text{Areal}(M) \;=\; \text{Areal}(M^*) \;=\; (-F)(b) - (-F)(a) \;=\; -\,(F(b) - F(a)) \;=\; -\int_a^b f(x)\,dx$$

hvor vi har brugt sætning 1.5.5 og definition 1.5.3.
Vi har hermed indset, at der gælder følgende sætning:

<u>Sætning 1.5.9.</u>
Hvis f er en negativ, kontinuert og stykkevis monoton funktion f defineret i et interval $[a;b]$, så er arealet af punktmængden M imellem grafen og førsteaksen givet ved:

$$\text{Areal}(M) = \;-\int_a^b f(x)\,dx$$

Hermed har vi også, at

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; -\,\text{Areal}(M)$$

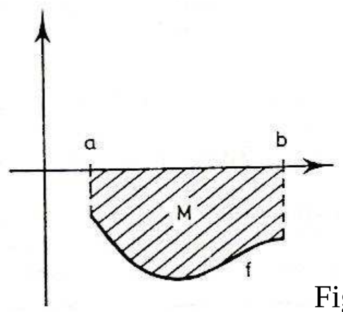


Fig. 1.12

<u>Øvelse 1.5.10.</u>
Bestem arealet af punktmængden mellem 1.aksen og grafen for f, idet $f(x) = x^2 - 4$, $x \in [-2 \,;\, 2\,]$ ♥

Endelig vil vi gerne se på en funktion, som både antager positive og negative værdier (se figur 1.13).
For at kunne håndtere dette, skal vi først se på følgende:
Vi betragter en funktion f, som er defineret og har en stamfunktion F i intervallet $[a;b]$.
Hvis c er et tal mellem a og b (dvs. a < c < b), så har vi: F(b) – F(a) = F(b) – F(c) + F(c) – F(a),
hvilket ifølge definition 1.5.3 kan skrives således:

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; \int_a^c f(x)\,dx \;+\; \int_c^b f(x)\,dx$$

Denne regel kaldes *<u>indskudssætningen</u>* for bestemte integraler.
Det er klart, at der kan indskydes flere end ét punkt c, hvilket vi vil bruge i det følgende.

Hvis f er en kontinuert, stykkevis monoton funktion, som antager både positive og negative funktionsværdier (f.eks. som vist på figur 1.13), så får vi ved anvendelse af indskudssætningen, at

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; \int_a^c f(x)\,dx \;+\; \int_c^d f(x)\,dx \;+\; \int_d^b f(x)\,dx$$

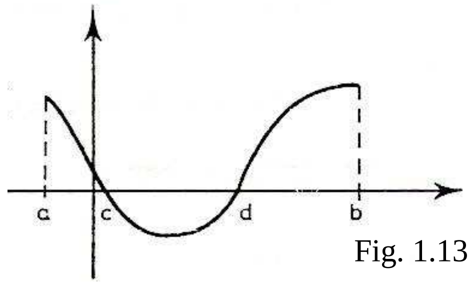


Fig. 1.13

Ifølge sætning 1.5.5 er $\int_a^c f(x)\,dx \;+\; \int_d^b f(x)\,dx$ lig med arealet af punktmængden <u>over</u> førsteaksen mellem grafen og aksen. Og ifølge sætning 1.5.9 er $\int_c^d f(x)\,dx$ lig med minus arealet af punktmængden <u>under</u> førsteaksen mellem grafen og aksen. Da det er klart, at denne beregning kan generaliseres til at dække en vilkårlig kontinuert, stykkevis monoton funktion, ser vi, at der gælder følgende sætning:

<u>Sætning 1.5.11.</u>

Lad f være en kontinuert, stykkevis monoton funktion defineret i et interval $[a;b]$.
Hvis f både antager positive og negative funktionsværdier i $[a;b]$, så gælder der, at:

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; \text{Areal}(M_o) - \text{Areal}(M_u)$$

hvor M_o og M_u er punktmængderne over hhv. under førsteaksen, imellem grafen og aksen.

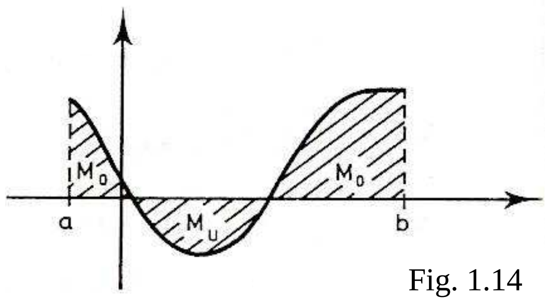


Fig. 1.14

<u>Øvelse 1.5.12.</u>
På figur 1.15 er givet arealerne af nogle punktmænger i forbindelse med 2 funktioner f og g.
Bestem følgende bestemte integraler v.hj.a. figuren:

a) $\int_2^7 f(x)\,dx$ b) $\int_2^{13} f(x)\,dx$

c) $\int_2^{13} g(x)\,dx$ d) $\int_2^7 g(x)\,dx - \int_2^7 f(x)\,dx$ ♥

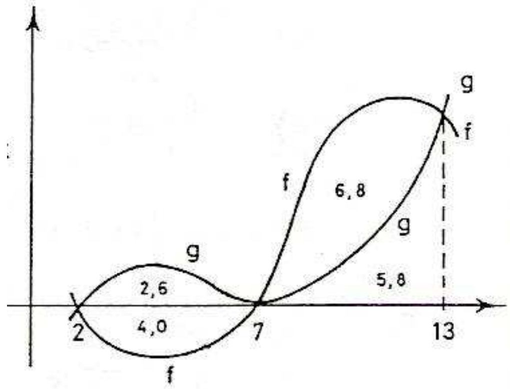


Fig. 1.15

Eksempel 1.5.13.
Funktionen $f(x) = x^3$ antager både positive og negative funktionsværdier. Og vi ser, at:

$$\int_{-2}^{2} x^3\,dx = \left[\tfrac{1}{4}x^4\right]_{-2}^{2} = \tfrac{1}{4}\cdot 2^4 - \tfrac{1}{4}\cdot(-2)^4 = 0$$

og

$$\int_{0}^{2} x^3\,dx = \left[\tfrac{1}{4}x^4\right]_{0}^{2} = \tfrac{1}{4}\cdot 2^4 - \tfrac{1}{4}\cdot 0^4 = 4$$

Læseren opfordres til at tegne en figur, der illustrerer situationerne. (Jfr. sætning 1.5.11). ♥

Øvelse 1.5.14.

a) Bestem en stamfunktion til funktionen $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 5$ (jfr. sætning 1.4.1).
Tegn grafen for f i intervallet $x \in [-3;7]$
Udregn $\int_{-2}^{6}(-\frac{1}{2}x^2 + 2x + 5)\,dx$ v.hj.a. den fundne stamfunktion – og illustrerer situationen.

b) Bestem en stamfunktion til funktionen $f(x) = x\cdot\cos(x)$ (jfr. sætning 1.4.5)
Tegn grafen for f i intervallet $x \in [-3;7]$.
Udregn $\int_{-2}^{6} x\cos(x)\,dx$ v.hj.a. den fundne stamfunktion – og illustrerer situationen. ♥

I det ovenstående har vi kun betragtet det bestemte integrale $\int_a^b f(x)\,dx$, hvor $a < b$. Vi vil nu udvide dette begreb til også at omfatte den situation, hvor de to integrationsgrænser er ens, eller hvor den nederste grænse er større end den øverste. Vi giver i denne sammenhæng følgende definition:

Definition 1.5.15.
Lad f være en funktion, der er defineret og har en stamfunktion F i et interval I.

a) Hvis $a \in$ I sætter vi pr. definition: $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

b) Hvis $a, b \in$ I, og hvis $a < b$, så sætter vi pr. definition: $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$

Vi har altså f.eks., at: $\int_{5}^{-2}(3x^2+1)\,dx = -\int_{-2}^{5}(3x^2+1)\,dx$.

Bemærk i øvrigt, at både punkt a) og b) i definition 1.5.15 stemmer overens med definition 1.5.3 (kontrollér dette !), samt at en arealbetragtning også direkte giver punkt a) i definitionen.

Stykkevis kontinuerte funktioner.
Indtil nu har vi afsnit 1.5 kun beskæftiget os med kontinuerte funktioner (defineret i et interval I, hvor der almindeligvis gælder, at $I = [a;b]$. Jfr. teksten.).
Vi vil nu se på, hvad der sker, hvis f ikke er kontinuert, men kun stykkevis kontinuert i $[a;b]$ (jfr. definition 1.1.8). Vi vil yderligere forudsætte, at f er begrænset og stykkevis monoton (jfr. definition 1.1.1 og 1.1.5)

Af hensyn til det følgende vil vi først bevise følgende sætning:

Sætning 1.5.16.
Hvis f er en stykkevis kontinuert funktion, der er begrænset og stykkevis monoton, og hvis p og q (p < q) er endepunkter for et af de intervaller, som definitionsmængden for f er inddelt i og hvori f er kontinuert, så har f(x) en grænseværdi både fra højre i p og fra venstre i q.

Bevis:
Lad I være intervallet fra p til q. Der er da fire muligheder:
1) Både p og q tilhører I, dvs. $p \in I \;\wedge\; q \in I$, svarende til at: I = [p ; q]
2) p tilhører I, men q gør ikke, dvs. $p \in I \;\wedge\; q \notin I$, svarende til at: I = [p ; q [
3) p tilhører ikke I, men q gør, dvs. $p \notin I \;\wedge\; q \in I$, svarende til at: I =] p ; q]
4) Hverken p eller q tilhører I, dvs. $p \notin I \;\wedge\; q \notin I$, svarende til at: I =] p ; q [

Ad 1): Her er f kontinuert i det lukkede begrænsede interval I = [p ; q], og sætningen følger direkte af definitionen på kontinuitet i et interval. De to grænseværdier er her f(p) og f(q).

Ad 2): Her er f kontinuert i I = [p ; q [, og pr. definition har vi, at f har en grænseværdi fra højre i p (som er lig med f(p)).
Vi vil derfor fokusere på, hvad der sker for x gående mod q fra venstre.
Da f er stykkevis monoton, findes der et interval J til venstre for q, hvor f enten er voksende eller aftagende. Lad os – som på figur 1.16 – antage, at f er voksende i J. (Hvis f er aftagende forløber argumentationen helt tilsvarende).
Vi har dermed, at f er voksende og kontinuert i intervallet $J \cap I$ (dvs. det mindste af de to intervaller).

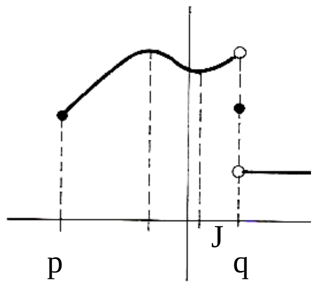


Fig. 1.16

Det ses heraf, at der kun er én af to muligheder:
a) Der findes et tal s, så $f(x) \to s$ for $x \to q-$, eller
b) $f(x) \to \infty$ for $x \to q-$
Da vi imidlertid har forudsat, at f er begrænset, er mulighed b) udelukket, hvormed mulighed a) gælder, og det ønskede er bevist.

Ad 3) og Ad 4) klares på samme måde som i ad 2). Detaljerne overlades til læseren.
Hermed er sætningen bevist. ♥

Eksempel 1.5.17.
Forudsætningerne i 1.5.16 om stykkevis monoton hhv. begrænset funktion kan ikke undværes:
a) Funktionen $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$ er kontinuert for x > 0, men f har ingen grænseværdi for $x \to 0+$ (f(x) ”nærmer sig” alle tal i intervallet [–1 ; 1]). Men f er heller ikke stykkevis monoton.
b) Funktionen $g(x) = \frac{1}{x}$, $x \in \,]0;2]$ er både kontinuert og monoton, men den har ingen grænseværdi for $x \to 0+$ (Der gælder, at: $g(x) \to \infty$ for $x \to 0+$). Men g er heller ikke begrænset. ♥

I forlængelse af og på baggrund af sætning 1.5.16 giver vi følgende definition:

Definition 1.5.18.
Lad f være en begrænset, stykkevis monoton og stykkevis kontinuert funktion, og lad p og q (p < q) være endepunkterne for et af de intervaller, som definitionsmængden for f er inddelt i og hvori f er kontinuert.
Funktionen LP_f defineret ved:

$$LP_f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to p+} f(x) & , \; x = p \\ f(x) & , \; x \in \left]p;q\right[\\ \lim\limits_{x \to q-} f(x) & , \; x = q \end{cases}$$

kaldes den *lokalt plomberede funktion af f i intervallet* $[p;q]$

Øvelse 1.5.19.
Betragt funktionen f hvis graf ses på figur 1.3. Inddel intervallet fra a til b i fire delintervaller, og tegn grafen for hver af de lokalt plomberede funktioner af f i disse intervaller. ♥

Det overlades som en øvelse til læseren at argumentere for, at der gælder følgende sætning:

Sætning 1.5.20.
Lad f være en begrænset, stykkevis monoton og stykkevis kontinuert funktion, og lad p og q (p < q) være endepunkterne for et af de intervaller, som definitionsmængden for f er inddelt i og hvori f er kontinuert. Om den lokalt plomberede funktion LP_f af f i intervallet $[p;q]$ gælder:

1) LP_f er kontinuert i intervallet $[p;q]$.
2) Hvis LP_f er positiv, så er f positiv (evt. bortset fra i punkterne p og q), og arealet under grafen for f i intervallet $\left]p;q\right[$ er lig med arealet under grafen for LP_f i intervallet $[p;q]$.
3) Hvis LP_f er positiv, så er arealfunktionen for LP_f i intervallet $[p;q]$ en stamfunktion til f i intervallet $\left]p;q\right[$

Med motivation i definition 1.5.18, sætning 1.5.20, sætning 1.5.5 og indskudssætningen giver vi følgende definition:

Definition 1.5.21.
Lad f være en begrænset, stykkevis monoton og stykkevis kontinuert funktion defineret i intervallet $[a;b]$, og lad p og q (p < q) være endepunkterne for et af de intervaller, som $[a;b]$ er inddelt i og hvori f er kontinuert.

Vi sætter pr. definition: $\int_p^q f(x)\,dx = \int_p^q LP_f(x)\,dx$

Hvis a, c, d og b, hvor a < c < d < b, er endepunkterne for de intervaller, som intervallet $[a;b]$ er inddelt i i relation til f's stykkevise kontinuitet, så sætter vi pr. definition:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^d f(x)\,dx + \int_d^b f(x)\,dx$$

Og tilsvarende hvis der er flere eller færre intervaldelepunkter.

Det overlades til læseren at argumentere for, at

- hvis vi i sætning 1.5.5, sætning 1.5.9 og sætning 1.5.11 erstatter ordet ”kontinuert” med ordene ”begrænset, stykkevis kontinuert”, så gælder disse sætninger stadigvæk
- hvis vi forudsætter, at f er en begrænset, stykkevis monoton og stykkevis kontinuert funktion defineret i intervallet $[a;b]$, så gælder indskudssætningen og definition 1.5.15 også for f.

Eksempel 1.5.22.

På figur 1.17 ses grafen for en positiv, begrænset, stykkevis kontinuert og stykkevis monoton funktion f.
Arealet af den skraverede punktmængde M under grafen for f beregnes som:

$$\text{Areal(M)} = \int_a^b f(x)\,dx \;=\; \int_a^c f(x)\,dx \;+\; \int_c^b f(x)\,dx \qquad ♥$$

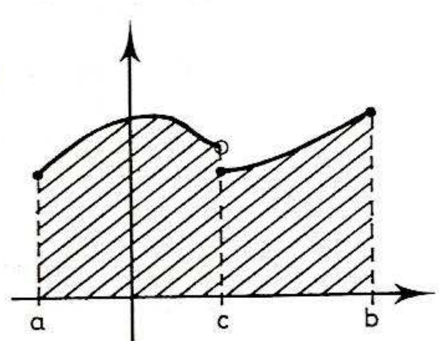


Fig. 1.17

Det ses, at vi hermed har været i stand til at udvide teorien for bestemte integraler fra kontinuerte funktioner til begrænsede, stykkevis kontinuerte funktioner, idet der i begge tilfælde forudsættes, at funktionerne er stykkevis monotone. Det er dermed i praksis vanskeligt – om end ikke umuligt – at finde funktioner, som ikke er dækket ind af teorien.
Vi slutter dette ”udvidelsesafsnit” med eksempler på, hvad vi ikke har fået med og hvad restriktionen til ”begrænsede funktioner” betyder.

Eksempel 1.5.23.

Betragt funktionerne $f(x) = \begin{cases} 0 \;, & x = 0 \\ \frac{1}{x} \;, & x \in \,]0;1] \end{cases}$ og $g(x) = \begin{cases} 0 \;, & x = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{x}} \;, & x \in \,]0;1] \end{cases}$

Begge funktioner er stykkevis kontinuerte og stykkevis monotone i intervallet $[0;1]$, og ingen af dem er begrænsede. (Læseren opfordres til at tegne en skitse af graferne).
Hvis vi nu ser på $\int_t^1 f(x)\,dx$ og $\int_t^1 g(x)\,dx$, hvor $0 < t < 1$, så får vi:

$$\int_t^1 f(x)\,dx \;=\; \big[\ln|x|\,\big]_t^1 \;=\; \ln 1 - \ln t \;=\; -\ln t \text{ og dermed: } \int_t^1 f(x)\,dx \to \infty \text{ for } t \to 0+.$$

$$\int_t^1 g(x)\,dx \;=\; \big[2\sqrt{x}\,\big]_t^1 \;=\; 2 - 2\sqrt{t} \quad \text{og dermed: } \int_t^1 g(x)\,dx \to 2 \text{ for } t \to 0+$$

Vi ser dermed, at det vil være muligt at tilskrive det bestemte integrale $\int_0^1 g(x)\,dx$ en værdi, nemlig tallet 2, selvom g er ubegrænset (!), hvorimod noget sådant ikke er muligt for f.
Vi kan derfor tillade os at skrive: $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \;=\; 2$, hvorimod integralet fra 0 til 1 af f(x) <u>ikke</u> er defineret ♥

1.6. Regneregler for bestemte integraler.

I lighed med ubestemte integraler findes en række regneregler for bestemte integraler, og også her starter vi med de mest simple af dem:

Sætning 1.6.1.
Lad f og g være to funktioner, der er defineret og har stamfunktionerne F og G i intervallet $[a;b]$ og lad $k \in R$ være en konstant. Der gælder da følgende regler:

a) $\int_a^b k \cdot f(x)\,dx \;=\; k \cdot \int_a^b f(x)\,dx$

b) $\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx \;=\; \int_a^b f(x)\,dx \;+\; \int_a^b g(x)\,dx$

c) $\int_a^b (f(x)-g(x))\,dx \;=\; \int_a^b f(x)\,dx \;-\; \int_a^b g(x)\,dx$

Bevis:
Ifølge sætning 1.4.1 og definition 1.5.3 har vi følgende:

Ad a): $\int_a^b k \cdot f(x)\,dx \;=\; [kF(x)]_a^b \;=\; kF(b) - kF(a) \;=\; k(F(b) - F(a)) \;=\; k \cdot \int_a^b f(x)\,dx$

Ad b): $\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx \;=\; [F(x)+G(x)]_a^b \;=\; F(b) + G(b) - (F(a) + G(a))$

$= F(b) - F(a) \;+\; G(b) - G(a) \;=\; \int_a^b f(x)\,dx \;+\; \int_a^b g(x)\,dx$

Ad c): Analogt til b).
Hermed er sætningen bevist. ♥

Eksempel 1.6.2.
Ifølge sætning 1.6.1. pkt. a), b) og c), samt definition 1.5.3. har vi, at :

$$\int_1^2 (2x^2 - 3x + 1)\,dx \;=\; \left[2 \cdot \tfrac{1}{3}x^3 - 3 \cdot \tfrac{1}{2}x^2 + x\right]_1^2 \;=\; \tfrac{2}{3} \cdot 8 - \tfrac{3}{2} \cdot 4 + 2 - (\tfrac{2}{3} \cdot 1 - \tfrac{3}{2} \cdot 1 + 1) \;=\; \tfrac{7}{6}$$ ♥

Øvelse 1.6.3.
Udregn følgende bestemte integraler:

a) $\int_0^2 53 \cdot x^5\,dx$ b) $\int_2^4 (x^{-3} + x^{-2})\,dx$ c) $\int_2^5 \frac{1}{4\sqrt{x}}\,dx$ d) $\int_{-3}^8 (-2x + 4)\,dx$ ♥

Øvelse 1.6.4.

Bestem med mindst 2 decimalers nøjagtighed løsningerne til ligningen: $\int_5^x (3t-1)\,dt \;=\; 0$ ♥

Forudsætningerne om f og g i sætning 1.6.1 er, at de begge har en stamfunktion i $[a;b]$. Ifølge sætning 1.5.2 er dette bl.a. opfyldt, hvis f og g begge er kontinuerte i $[a;b]$. Men som vi senere skal se, (se s. 32) gælder sætning 1.6.1 også for stykkevis kontinuerte funktioner, hvis de er begrænsede og stykkevis monotone.

Ved anvendelse af sætning 1.6.1 c) og sætning 1.5.5 fremkommer følgende sætning:

Sætning 1.6.5.

Lad f og g være to kontinuerte, stykkevis monotone funktioner defineret i intervallet $[a;b]$. Hvis $f(x) \le g(x)$ for alle $x \in [a;b]$, så er arealet af punktmængden M imellem de to funktioners grafer givet ved:

$$\text{Areal}(M) = \int_a^b (g(x) - f(x))\,dx$$

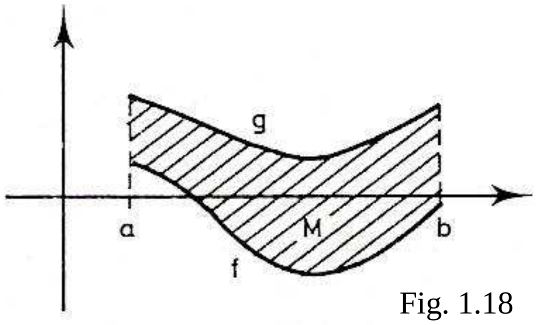


Fig. 1.18

Bevis:
Lad $-k$ være et tal, som er mindre end alle funktionsværdier for f i $[a;b]$ (se figur 1.19). Tallet findes, idet f er kontinuert i et lukket, begrænset interval, hvormed minimum af f(x) eksisterer. Hvis vi parallelforskyder graferne for f og g stykket k opad 2.aksen, så får vi graferne for funktionerne $f(x) + k$ og $g(x) + k$ (se figur 1.20)

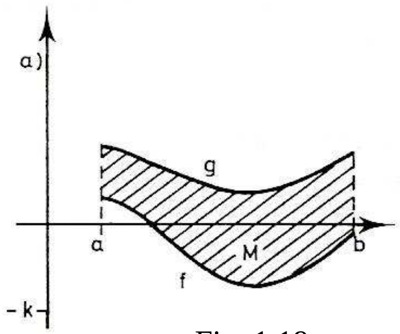


Fig. 1.19

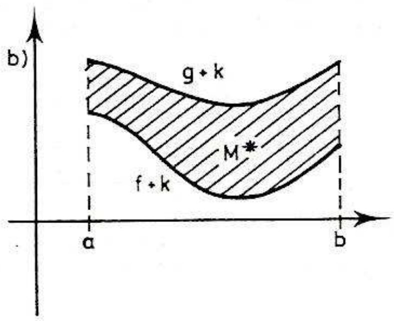


Fig. 1.20

Området M* imellem disse to grafer har samme areal som M, og da både $f(x) + k$ og $g(x) + k$ er positive funktioner, har vi:

$$\text{Areal}(M) = \text{Areal}(M^*) = \int_a^b (g(x)+k)\,dx - \int_a^b (f(x)+k)\,dx$$

$$= \int_a^b ((g(x)+k)-(f(x)+k))\,dx = \int_a^b (g(x)-f(x))\,dx$$

Bemærk, at hvis f (og dermed g) er en positiv funktion, så kan vi vælge k = 0, hvormed M* = M. Hermed er sætningen bevist. ♥

Eksempel 1.6.6.

Vi vil bestemme arealet af området imellem graferne for funktionerne: $p(x) = x^2 - 5x + 4$ og $\ell(x) = x - 1$. Først bestemmes skæringspunkterne mellem graferne (for at få integrationsgrænserne):

$$p(x) = \ell(x) \iff x^2 - 5x + 4 = x - 1 \iff x^2 - 6x + 5 = 0$$
$$\iff x = 1 \lor x = 5$$

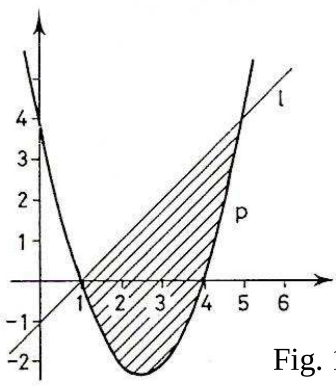


Fig. 1.21

Ifølge sætning 1.6.5 er det søgte areal givet ved (kontrollér udregningen):

$$\int_1^5 (\ell(x) - p(x))\,dx \;=\; \int_1^5 (x - 1 - (x^2 - 5x + 4))\,dx \;=\; \int_1^5 (-x^2 + 6x - 5)\,dx \;=\; \frac{32}{3} \quad ♥$$

Øvelse 1.6.7.
Bestem arealet af punktmængden imellem graferne for f og g givet ved:

$$f(x) = -\tfrac{1}{2}x + 7 \quad , \quad x \in [-1;5] \qquad \text{og} \qquad g(x) = \tfrac{1}{2}x - 2 \;,\; x \in [-1;5]$$

idet der først gøres rede for, at $g(x) \le f(x)$ for alle $x \in [-1;5]$.
Skitsér den betragtede punktmængde. ♥

Øvelse 1.6.8.
Bestem arealet af den punktmængde, der afgrænses af graferne for funktionerne f og g, hvor
$f(x) = x^2 - 4$ og $g(x) = 6$ ♥

Øvelse 1.6.9.
Tegn punktmængden M og bestem arealet af M, idet $M = \left\{(x,y) \,\middle|\, 9 - x^2 \ge y \ge \tfrac{1}{2}x^2 - 2\right\}$ ♥

Som vi senere skal se (side 32), gælder sætning 1.6.5 også, hvis ordet ”kontinuerte” i forudsætningerne for funktionerne f og g ændres til: ”begrænsede, stykkevis kontinuerte”.

Delvis integration for bestemte integraler.

Sætning 1.6.10. (Delvis Integration)
Lad f og g være kontinuerte funktioner defineret i et interval $I = [a;b]$.
Antag desuden, at g er differentiabel i I og at g' er kontinuert, samt at F er en stamfunktion til f i I.
Der gælder da, at

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = [F(x)g(x)]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)\,dx$$

Bevis:
Ifølge beviset for sætning 1.4.5 har vi: $f(x)\cdot g(x) = (F(x)\cdot g(x))' - F(x)\cdot g'(x)$

Heraf får vi ifølge sætning 1.6.1 c) , at: $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \int_a^b (F(x)\cdot g(x))'\,dx - \int_a^b F(x)g'(x)\,dx$

Og da $\int_a^b (F(x)\cdot g(x))'\,dx = [F(x)\cdot g(x)]_a^b$ er sætningen bevist. ♥

Eksempel 1.6.11.
Ved udregning af $\int_1^2 x^2 \cdot \ln(x)\,dx$ ved delvis integration vælges $f(x) = x^2$ og $g(x) = \ln(x)$.

Vi ser, at: $\int_1^2 x^2 \cdot \ln(x)\,dx = \left[\tfrac{1}{3}x^3 \cdot \ln x\right]_1^2 - \int_1^2 \tfrac{1}{3}x^3 \cdot \tfrac{1}{x}\,dx = \tfrac{8}{3}\ln 2 - 0 - \int_1^2 \tfrac{1}{3}x^2\,dx$

$= \tfrac{8}{3}\ln 2 - \left[\tfrac{1}{9}x^3\right]_1^2 = \tfrac{8}{3}\ln 2 - \tfrac{7}{9} = 1{,}07061$ ♥

Øvelse 1.6.12.

Udregn $\int_2^5 2x\cdot(1+x)^4\,dx$ ved delvis integration. ♥

Øvelse 1.6.13.

Udregn følgende integraler: a) $\int 5x\cdot e^x dx$ b) $\int_2^5 5x\cdot e^x dx$ ♥

Eksempel 1.6.14.

Vi vil beregne $\int_0^{\pi/2} e^x \sin x\,dx$ ved delvis integration. Både e^x og sinx har den egenskab, at de (stort set) giver samme resultat om man differentierer dem eller integrerer dem. Der er derfor "frit valg" – og vi vælger at sætte f(x) = e^x og g(x) = sin x i sætning 1.6.10. Da e^x har stamfunktion e^x og da $(\sin x)' = \cos x$ får vi:

$$\int_0^{\pi/2} e^x \sin x\,dx \;=\; \left[e^x \sin x\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} e^x \cos x\,dx$$

Det sidste integral kan vi imidlertid ikke umiddelbart bestemme. Men ved at anvende delvis integration på dette får vi:

$$\int_0^{\pi/2} e^x \cos x\,dx \;=\; \left[e^x \cos x\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} e^x(-\sin x)\,dx \;=\; \left[e^x \cos x\right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} e^x \sin x\,dx$$

Indsættes dette resultat i det ovenstående, får vi:

$$\int_0^{\pi/2} e^x \sin x\,dx \;=\; \left[e^x \sin x\right]_0^{\pi/2} \;-\; \left[e^x \cos x\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} e^x \sin x\,dx$$

og hermed:

$$2\int_0^{\pi/2} e^x \sin x\,dx \;=\; \left[e^x \sin x\right]_0^{\pi/2} \;-\; \left[e^x \cos x\right]_0^{\pi/2}$$

$$=\; (e^{\pi/2}\sin\tfrac{\pi}{2} - e^0 \sin 0) - (e^{\pi/2}\cos\tfrac{\pi}{2} - e^0\cos 0) \;=\; e^{\pi/2}+1$$

hvorefter vi ved division med 2 finder, at

$$\int_0^{\pi/2} e^x \sin x\,dx \;=\; \frac{e^{\pi/2}+1}{2} \quad (= 2{,}905)$$ ♥

Integration ved substitution for bestemte integraler.

Sætning 1.6.15. (Integration ved substitution).

Lad funktionen g være defineret og differentiabel i et interval I = $[a;b]$ med kontinuert afledet funktion g', og lad f være en kontinuert funktion som opfylder, at Vm(g) $\subseteq$ Dm(f).

Der gælder da, at:

$$\int_a^b f(g(x))\cdot g'(x)\,dx \;=\; F(g(b)) - F(g(a))$$

hvor F er en stamfunktion til f, eller anderledes udtrykt, at:

$$\int_a^b f(g(x))\cdot g'(x)\,dx \;=\; \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,dt \quad ,\qquad \text{hvor } t = g(x) \text{ og } dt = g'(x)dx$$

Det ses, at når x går fra a til b, så går t fra g(a) til g(b).

Bevis:
Ifølge beviset for sætning 1.4.10 har vi, at: $\int f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = F(g(x))$, hvoraf vi ser, at:

$$\int_a^b f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = \left[F(g(x))\right]_a^b = F(g(b)) - F(g(a)) = \left[F(t)\right]_{g(a)}^{g(b)} = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,dt$$

Hermed er sætningen bevist. ♥

<u>Eksempel 1.6.16.</u>
Vi vil beregne $\int_1^3 \frac{x}{1+x^2}\,dx$ ved substitution. Vi skal derfor lede efter en sammensat funktion $f(g(x))$ i integranden $\frac{x}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2}\cdot x$. Vi ser at en mulighed er: $g(x) = 1 + x^2$ og $f(x) = \frac{1}{x}$.
x'et i tælleren er ført ned ved siden af brøken, men det generer selvfølgelig, så vi må håbe på, at det forsvinder i substitutionsprocessen. Ved substitutionen: $t = g(x) = 1 + x^2$ og $dt = g'(x)dx = 2x\,dx$ (og dermed: $x = 1 \Rightarrow t = g(1) \Leftrightarrow t = 2$ og: $x = 3 \Rightarrow t = g(3) \Leftrightarrow t = 10$), ser vi, at:

$$\int_1^3 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\int_2^{10} \tfrac{1}{t}\,dt = \tfrac{1}{2}\left[\ln|t|\right]_2^{10} = \tfrac{1}{2}(\ln 10 - \ln 2) = \frac{\ln 5}{2} = 0{,}80472 \quad ♥$$

<u>Eksempel 1.6.17.</u>
Integralet $\int_0^{\pi/4} \sin^5(x)\cdot\cos x\,dx$ kan beregnes ved substitutionen: $u = \sin(x)$, $du = \cos(x)dx$.

Vi får da: $\int_0^{\pi/4} \sin^5(x)\cdot\cos x\,dx = \int_{\sin(0)}^{\sin(\pi/4)} u^5\,du = \left[\tfrac{1}{6}u^6\right]_0^{\sqrt{2}/2} = \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^6 = \frac{1}{48}$ ♥

<u>Øvelse 1.6.18.</u>
Udregn følgende bestemte integraler:

a) $\int_0^2 x^2\sqrt{3x^3+4}\,dx$ b) $\int_{-1}^1 (2x-3)^9\,dx$ c) $\int_{\pi/3}^{\pi/2} e^{\sin x}\cdot\cos x\,dx$ ♥

<u>Øvelse 1.6.19.</u>
Udregn følgende integraler: a) $\int x\cdot\ln(2x^2+3)\,dx$ b) $\int_2^3 x\cdot\ln(2x^2+3)\,dx$ ♥

<u>Eksempel 1.6.20.</u>
Betragt funktionen f givet ved:

$$f(x) = \frac{3x}{1+x^2}$$

Grafen for f ser ud som vist på figur 1.22. Grafen for f, førsteaksen og linien med ligningen x = 3 afgrænser en punktmængde T. Bemærk, at da T *afgrænses* (af grafen, førsteaksen og linien x = 3), må T være det skraverede område.

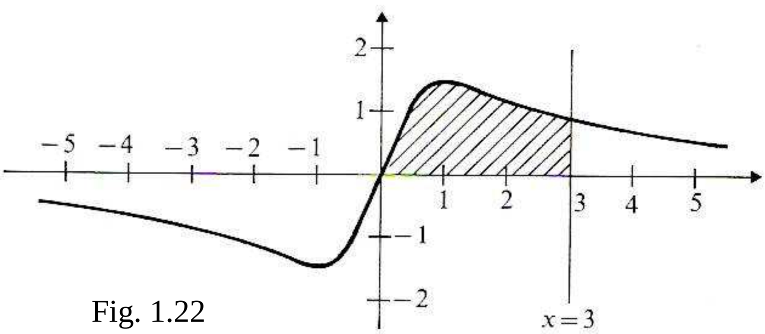


Fig. 1.22

Vi vil finde arealet af T. Ifølge sætning 1.5.5 ser vi, at

$$\text{Areal(T)} = \int_0^3 \frac{3x}{1+x^2}dx$$

Ved anvendelse af substitutionen: u = g(x) = 1 + x^2 og du = $2x\,dx$ (og dermed: $x = 0 \Rightarrow u = 1$ og $x = 3 \Rightarrow u = 10$, jfr. eksempel 1.6.16), ser vi, at

$$\text{Areal(T)} = \int_0^3 \frac{3x}{1+x^2}dx = \frac{3}{2}\int_1^{10}\frac{1}{u}du = \frac{3}{2}\cdot\left[\ln|u|\right]_1^{10} = \frac{3}{2}(\ln 10 - \ln 1) = \frac{3}{2}\ln 10 = 3{,}454$$

Det søgte areal har altså den eksakte værdi $\frac{3}{2}\ln 10$ og den tilnærmede værdi 3,454. ♥

Eksempel 1.6.21.

Vi vil beregne $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}dx$. Der er tale om et bestemt integrale, og der er lagt op til substitution.

Vi vil imidlertid i første omgang interessere os for det tilsvarende ubestemte integrale $\int \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}dx$ dvs. en stamfunktion til integranden. Denne kan findes ved substitution for ubestemte integraler, og i eksempel 1.4.11 fik vi: $\int \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}dx = -\sqrt{4-x^2}$. Ud fra definition 1.5.3 får vi herefter, at:

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}dx = \left[-\sqrt{4-x^2}\right]_0^1 = -\sqrt{3}-(-\sqrt{4}) = 2-\sqrt{3}.$$

Vi kan altså beregne et bestemt integrale ved først ud fra regnereglerne for ubestemte integraler at finde en stamfunktion til integranden, og derefter indsætte integrationsgrænserne som fastlagt i definition 1.5.3. Denne fremgangsmåde er også antydet anvendt i øvelse 1.6.13 og 1.6.19. ♥

Integration ved omvendt substitution for bestemte integraler

Hvis formlen for integration ved substitution: $\int_a^b f(g(x))\cdot g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt$ (sætning 1.6.15) læses fra højre mod venstre, så får vi:

(∗) $\int_p^q f(t)dt = \int_a^b f(g(x))\cdot g'(x)dx$, hvor p = g(a) og q = g(b).

Hvis vi derfor står overfor en situation, hvor vi skal udregne et integrale: $\int_p^q f(t)dt$, som ikke kan beregnes på andre måder, så kan vi forsøge at lede efter en ”smart” funktion g(x), som kan substitueres i stedet for t – altså: t = g(x) og dt = g′(x)dx – hvormed integralet $\int_p^q f(t)dt$ kan omskrives til: $\int_a^b f(g(x))\cdot g'(x)dx$, hvor a og b opfylder, at g(a) = p og g(b) = q. Og dette skal selvfølgelig være på en sådan måde, at det nye integrale bliver nemmere at beregne end det oprindelige.
Forudsætningen for at dette kan gøres er, at funktionen g har nogle egenskaber: g skal være differentiabel, g′ skal være kontinuert, der skal findes to tal a og b, så g(a) = p og g(b) = q , og således at funktionen f(g(x)) er defineret i [a; b] eller [b; a] (afhængig af om a < b eller a > b)

I formlen (∗) kan de variable kaldes, hvad vi har lyst til f.eks.:

$$\int_p^q f(y)dy = \int_a^b f(g(s)) \cdot g'(s)ds, \quad \text{hvor } y = g(s) \text{ og } dy = g'(s)ds$$

eller $\int_p^q f(\alpha)d\alpha = \int_a^b f(g(\psi)) \cdot g'(\psi)d\psi$, hvor $\alpha = g(\psi)$ og $d\alpha = g'(\psi)d\psi$

Specielt kan vi benytte benævnelserne: $\int_p^q f(x)dx = \int_a^b f(g(t)) \cdot g'(t)dt$, hvor $x = g(t)$ og $dx = g'(t)dt$

Vi kan her samle informationerne i følgende sætning:

Sætning 1.6.22. (Integration ved omvendt substitution)
Lad f være en kontinuert funktion defineret i intervallet [p; q].
For at udregne $\int_p^q f(x)dx$ kan vi lede efter en funktion g, som opfylder, at:

- der findes to tal a og b, så g(a) = p og g(b) = q , og således at såvel g som funktionen $f \circ g$ er defineret i intervallet [a; b] eller [b; a] (afhængig af om a < b eller a > b)
- g er differentiabel og g′ er kontinuert.

Der gælder da, at: $\int_p^q f(x)dx = \int_a^b f(g(t)) \cdot g'(t)dt$, hvor $x = g(t)$ og $dx = g'(t)dt$

Den store udfordring ved at anvende omvendt substitution er at gætte en funktion g med de ønskede egenskaber, herunder specielt at det nye integrale bliver nemmere at regne ud end det oprindelige.

Eksempel 1.6.23.
Vi vil beregne integralet $\int_{-1}^{6} \frac{1}{(1+x^2)^2}dx$, og ved at analysere på situationen indser vi, at ingen af de hidtil anførte beregningsprincipper kan bruges.
Ved at analysere muligheden for omvendt substitution giver leddet $1 + x^2$ måske tanken om, at $1+\tan^2(t)$ dels kan omskrives til noget med cos(t), dels at differentialkvotienten af tan(t) netop er $1+\tan^2(t)$, hvorfor vi prøver, om substitutionen x = tan(t) kan bringes til at fungere.

Da g(t) = tan(t) er differentiabel, og da $g'(t) = 1+\tan^2(t)$ er kontinuert, er den sidste af betingelserne til g i sætning 1.6.22 opfyldt.
Vi skal derfor løse ligningerne: g(a) = –1 og g(b) = 6 på en sådan måde, at den første betingelse til g i sætning 1.6.22 også bliver opfyldt. Vi skal bl.a. sikre, at g(t) er defineret i intervallet mellem a og b. Da: $\tan(a) = -1 \Leftrightarrow a = -0{,}7854 + n \cdot \pi$, hvor n er et vilkårligt helt tal, og tilsvarende: $\tan(b) = 6 \Leftrightarrow b = 1{,}4056 + n \cdot \pi$, ser vi, at en mulighed er: a = –0,7854 og b = 1,4056.

I dette interval er såvel g som $(f \circ g)(t) = f(g(t)) = \frac{1}{(1+g(t)^2)^2}$ defineret, hvormed den første forudsætning/betingelse til g er opfyldt. Vi kan derfor anvende formlen for omvendt substitution:

Da x = tan(t) giver: $dx = (1+\tan^2(t))dt$, får vi i alt:

$$\int_{-1}^{6} \frac{1}{(1+x^2)^2}dx = \int_{-0{,}7854}^{1{,}4056} \frac{(1+\tan^2(t))}{(1+\tan^2(t))^2}dt = \int_{-0{,}7854}^{1{,}4056} \frac{1}{1+\tan^2(t)}dt = \int_{-0{,}7854}^{1{,}4056} \cos^2 t\,dt$$

hvor vi i den sidste omskrivning har brugt, at $1+\tan^2(t) = \dfrac{1}{\cos^2(t)}$. V.hj.a. eksempel 1.4.17 b)

får vi (kontrollér), at: $\int_{-0,7854}^{1,4056} \cos^2 t\,dt = \left[\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin(2t)\right]_{-0,7854}^{1,4056} = 1,4266$

Det søgte resultat er altså: $\int_{-1}^{6} \dfrac{1}{(1+x^2)^2}dx = 1,4266$ ♥

Øvelse 1.6.24.

Beregn integralerne: a) $\int_{0}^{10} \dfrac{1}{1+x^2}dx$ b) $\int_{-4}^{12} \dfrac{11}{6+x^2}dx$

Vejledning: a) Anvend omvendt substitution med $x = \tan t$. b) Noget tilsvarende. ♥

Eksempel 1.6.25. (Areal af cirkel)

Vi vil v.hj.a. integralregning bevise, at arealet af en cirkel med radius r er lig med πr^2.
Dette vil vi gøre ved at vise, at den på figur 1.23 viste halvcirkel har arealet $\frac{1}{2}\pi r^2$.

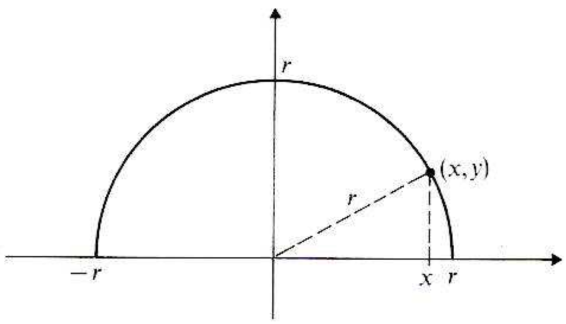


Fig.1.23

Hvis (x,y) er et punkt på halvcirklen, så har vi ifølge Pythagoras eller cirklens ligning, at $x^2 + y^2 = r^2$ og dermed (idet y > 0), at: $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, $-r \le x \le r$.
Den kurve, der angiver den halve cirkelperiferi er således grafen for funktionen:

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}, \quad -r \le x \le r$$

Halvcirklens areal A er derfor givet ved:

$$A = \int_{-r}^{r} f(x)dx = \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}dx$$

Vi vil anvende sætning 1.6.22 (omvendt substitution) til at udregne dette bestemte integrale.
Vi vælger substitutionen: $x = g(t) = r\cdot\cos(t)$ og dermed: $dx = -r\cdot\sin(t)dt$. Da g(t) er differentiabel i R og da $g'(t) = -r\cdot\sin(t)$ er kontinuert i R, er substitutionen mulig, hvis vi kan finde to tal a og b, som opfylder at: $g(a) = -r$ og $g(b) = r$, samt at: $f(g(t)) = \sqrt{r^2 - (r\cdot\cos(t))^2}$ er defineret i [a; b] eller [b; a] (afhængig af om a < b eller a > b).
Da $(r\cdot\cos(t))^2 \le r^2$ for alle tal t, er f(g(t)) defineret for alle $t \in R$. Vi skal derfor blot have fundet a og b som opfylder, at: $r\cdot\cos(a) = -r$ og $r\cdot\cos(b) = r$. Vi ser, at vi kan vælge $a = \pi$ og $b = 0$.

Alt i alt får vi dermed:

$$A \;=\; \int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx \;=\; \int_{\pi}^{0}\sqrt{r^2-r^2\cos^2 t}\cdot(-r\sin t)dt \;=\; \int_0^{\pi} r^2\sqrt{1-\cos^2 t}\cdot\sin t\,dt$$

Da $\sqrt{1-\cos^2 t} \;=\; \sqrt{\sin^2 t} \;=\; |\sin t| \;=\; \sin t$, hvor numerisktegnet kan fjernes idet $\sin t \geq 0$ i intervallet $[0;\pi]$, ser vi, at

$$A \;=\; \int_0^{\pi} r^2\sin t\cdot\sin t\,dt \;=\; r^2\cdot\int_0^{\pi}\sin^2 t\,dt \;=\; r^2\cdot\left[\tfrac{1}{2}t-\tfrac{1}{4}\sin(2t)\right]_0^{\pi}$$

hvor vi i sidste omskrivning har benyttet eksempel 1.4.17 a). Ved at indsætte grænserne får vi:

$$A \;=\; r^2\cdot(\tfrac{1}{2}\pi-\tfrac{1}{4}\sin(2\pi)-\tfrac{1}{2}\cdot 0+\tfrac{1}{4}\sin(2\cdot 0)) \;=\; r^2\cdot\tfrac{1}{2}\pi \;=\; \tfrac{1}{2}\pi r^2$$

hvormed det ønskede er bevist. ♥

Stykkevis kontinuerte funktioner og regneregler for integraler

Regnereglerne i sætning 1.6.1., dvs.

a) $\int_a^b k\cdot f(x)\,dx \;=\; k\cdot\int_a^b f(x)\,dx$

b) $\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx \;=\; \int_a^b f(x)\,dx \;+\; \int_a^b g(x)\,dx$

c) $\int_a^b (f(x)-g(x))\,dx \;=\; \int_a^b f(x)\,dx \;-\; \int_a^b g(x)\,dx$

gælder, når forudsætningerne for f og g, dvs. at f og g er defineret og har en stamfunktion i $[a;b]$, er opfyldt. Og dette er bl.a. tilfældet, hvis f og g er kontinuerte i $[a;b]$ (jfr. sætning 1.5.2).
Disse regler gælder imidlertid også, hvis f og g er begrænsede, stykkevis kontinuerte og stykkevis monotone i $[a;b]$. Dette indses således (vi ser på regel b) – de andre forløber tilsvarene):
Da f er stykkevis kontinuert, kan intervallet $[a;b]$ inddeles i endeligt mange intervaller indenfor hvilke f er kontinuert (evt. bortset fra endepunkterne). Det samme gælder for g. Hvis vi benytter intervaldelepunkterne for både f og g, får vi i alt inddelt $[a;b]$ i endeligt mange delintervaller indenfor hvilke både f og g er kontinuerte (evt. bortset fra endepunkterne). I hvert af disse delintervaller er f + g kontinuert, ligesom f + g er begrænset og stykkevis monoton, idet både f og g er det. Hvis vi ser på et vilkårligt delinterval $[p;q]$, så gælder der, at $LP_{f+g}(x) = LP_f(x) + LP_g(x)$ (Overvej! Jfr. definition 1.5.18).
Ifølge ovenstående regel b), sætning 1.5.20 a) og definition 1.5.21 får vi nu, at:

$$\int_p^q (f(x)+g(x))\,dx \;=\; \int_p^q LP_{f+g}(x)\,dx \;=\; \int_p^q LP_f(x)\,dx+\int_p^q LP_g(x)\,dx \;=\; \int_p^q f(x)\,dx \;+\; \int_p^q g(x)\,dx$$

Hvis vi herefter anvender indskudssætningen (definition 1.5.21 sidste del), så ser vi, at regel b) gælder for f +g i hele intervallet $[a;b]$.

På præcis samme måde – dvs. ved inddeling af $[a;b]$ i passende delintervaller og ved anvendelse af indskudssætningen – indses, at sætning 1.6.5 (areal mellem to funktioners grafer) også gælder, hvis f og g er begrænsede, stykkevis kontinuerte og stykkevis monotone, idet sætning 1.5.20 inddrages i argumentationen.

1.7 Uegentlige integraler

I forbindelse med bestemte integraler har vi indtil nu kun beskæftiget os med funktioner defineret i et lukket, begrænset interval af typen $[a;b]$. Men mange (nok de fleste) af de funktioner vi har set på i eksempler, øvelser og opgaver kan defineres i "større" intervaller (f.eks. er funktionerne $\cos x$, $\ln x$ og x^{-2} alle defineret i intervallet R_+). Nogle af disse funktioner har følgende egenskab:

Definition 1.7.1.

a) Lad f være en funktion, som er defineret og har en stamfunktion i et interval af typen $[a;\infty[$.
Hvis $\int_a^K f(x)dx$ har en grænseværdi for $K \to \infty$, så siger vi, at f er (*uegentlig) integrabel* i intervallet $[a;\infty[$, og vi betegner grænseværdien med: $\int_a^\infty f(x)dx$. Vi har altså:

$$\int_a^\infty f(x)dx \;=\; \lim_{K\to\infty} \left(\int_a^K f(x)dx\right)$$

b) På samme måde defineres $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ for en funktion f, der er defineret og har en stamfunktion i et interval af typen $]-\infty;a]$, ved:

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx \;=\; \lim_{k\to-\infty} \left(\int_k^a f(x)dx\right)$$

hvis grænseværdien på højre side af lighedstegnet eksisterer.

c) En funktion, som er defineret og har en stamfunktion i hele R siges at være (*uegentlig) integrabel* i R, hvis det for alle $a \in R$ gælder, at f er uegentlig integrabel i $]-\infty;a]$ og i $[a;\infty[$.
I bekræftende fald sættes

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx \;=\; \int_{-\infty}^a f(x)dx \;+\; \int_a^\infty f(x)dx$$

Integraler af typen $\int_a^\infty f(x)dx$, $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ og $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$ kaldes *uegentlige integraler.*

Ofte anvendes sprogbrugen, at $\int_a^\infty f(x)dx$ er <u>konvergent</u>, når den omtalte grænseværdi eksisterer. I modsat fald siger vi, at det er <u>divergent</u>. Og tilsvarende for de øvrige typer af uegentlige integraler.

Eksempel 1.7.2.

Funktionen $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ er integrabel i [1 ; ∞ [, idet

$\int_1^K \dfrac{1}{x^2}dx \;=\; \left[-\dfrac{1}{x}\right]_1^K \;=\; -\frac{1}{K}+1$, hvoraf vi ser, at:

$\int_1^K \dfrac{1}{x^2}dx \;\to 1$ for $K \to \infty$, dvs: $\int_1^\infty \dfrac{1}{x^2}dx \;=1.$

Vi kan hermed tillade os at sige, at det "uendelige område" under grafen for f svarende til [1 ; ∞ [kan tilskrives det <u>endelige</u> areal 1. (Se figur 1.24) ♥

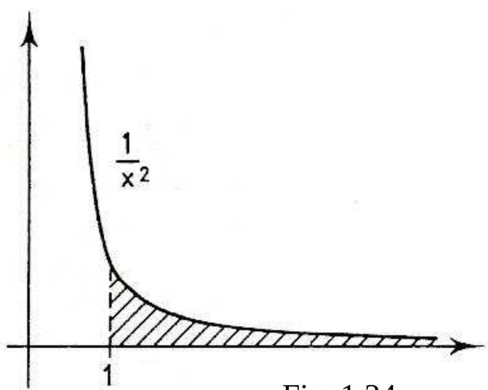


Fig. 1.24

Øvelse 1.7.3.

Argumentér for, at funktionen $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ ikke er integrabel i [1 ; ∞ [, dvs. $\int_1^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ er divergent.

Tegn en skitse af grafen for g, skravér det relevante område, og kommentér resultatet. ♥

Øvelse 1.7.4.

Argumentér for, at funktionen $f(x) = \dfrac{1}{x}$ ikke er uegentlig integrabel i intervallet [1 ; ∞ [. ♥

Øvelse 1.7.5.

Beregn $\lim\limits_{K \to \infty} \int_2^K \dfrac{1}{(x+1)^2}\,dx$.

Skitsér grafen for funktionen $\dfrac{1}{(x+1)^2}$ og overvej, hvad grænseværdien står for. ♥

Øvelse 1.7.6.

Udregn værdien af hvert af følgende uegentlige integraler:

a) $\int_5^{\infty} 20 \cdot e^{-0,4x}\,dx$ b) $\int_2^{\infty} 8 \cdot x^{-1,4}\,dx$ ♥

Uden bevis omtales følgende regler. (Læsere der er interesseret i et bevis henvises til bogen ”Logaritme-, eksponential- og potensfunktioner – og matematiske modeller”, Kapitel 5).

1) For alle a > 1 og alle r > 0 gælder: $\dfrac{x^r}{a^x} \to 0$ for $x \to \infty$

2) For alle r > 0 og alle c > 1 gælder: $\dfrac{\log_c x}{x^r} \to 0$ for $x \to \infty$

Disse regler kan bruges ved udregning af visse uegentlige integraler.

Øvelse 1.7.7.

Udregn følgende: a) $\int_5^{\infty} \dfrac{25x}{2^x}\,dx$ b) $\int_6^{\infty} \dfrac{\ln x}{x^{2,3}}\,dx$ c) $\int_7^{\infty} \dfrac{x^2}{5^x}\,dx$ d) $\int_1^{\infty} \dfrac{\log_2 x}{x^{3,2}}\,dx$

(*Vejledning:* Anvend delvis integration) ♥

Ifølge det foregående ser det ud til, at vi må forvente om en funktion f, at f(x) → 0 for x → ∞, hvis det uegenlige integrale skal være konvergent. Men som øvelse 1.7.3 og 1.7.4 viser, er dette ikke tilstrækkeligt til at sikre konvergensen.

Kap. 2: Modeller og specielle anvendelser af integralregning.

2.1. Middelsummer.

Arealers betydning.

Vi vil i de næste par eksempler vise, hvordan arealer kan tillægges betydning i konkrete situationer:

Eksempel 2.1.1.

Ved et kommunalt vandværk er der installeret en hastighedstæller, som løbende udskriver en kurve over udstrømningshastigheden fra vandværket. Vi får på denne måde registreret, hvor mange liter vand, der pr. minut strømmer ud ved forskellige tidspunkter. Nedenstående figur 2.1 viser sådan en kurve over udstrømningshastigheden u(t) som funktion af tiden t i et givet døgn:

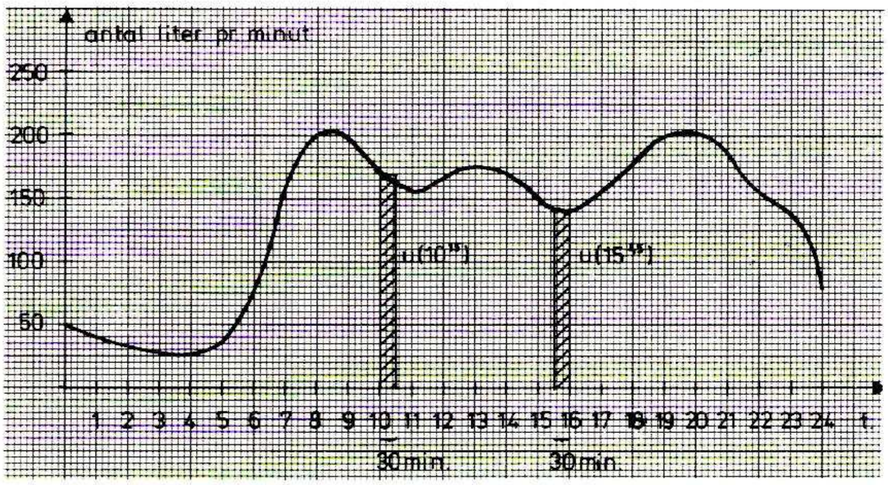


Fig. 2. 1

Vi vil finde den samlede mængde vand, som i løbet af det pågældende døgn er strømmet ud.

Hvis vandets udstrømningshastighed var konstant lig med 100 liter pr. minut, så kunne vi nemt finde det samlede antal liter vand. Vi skulle da blot gange 100 liter/minut med antallet af minutter i et døgn, dvs. med 1440 minutter, hvormed vi ville få det samlede vandforbrug: 144.000 liter.
Nu er u(t) imidlertid ikke konstant. Men hvis vi indskrænker os til et øjeblik at betragte tidsintervallet 10^{00} til 10^{30}, så ser vi, at her indenfor er u(t) praktisk talt konstant. Hvis vi derfor antager, at u(t) er konstant lig med $u(10^{15})$ i dette tidsinterval, så er vandforbruget i det pågældende tidsinterval lig med:

$$u(10^{15}) \text{ liter/minut} \cdot 30 \text{ minutter} = \; 165 \text{ liter/min.} \cdot 30 \text{ min.} = \; 4950 \text{ liter}$$

Hvis vi betragter figur 2.1, så ser vi, at størrelsen $u(10^{15}) \cdot 30$ er lig med arealet af rektanglet med højden $u(10^{15})$ og bredden 30. Tilsvarende kan vi – hvis vi antager at u(t) er konstant i tidsintervallet fra 15^{30} til 16^{00} – finde vandforbruget i dette tidsrum som arealet af rektanglet med højden $u(15^{45})$ og bredden 30, dvs. som størrelsen $u(15^{45}) \cdot 30$.

Ved gentagen anvendelse af denne tankegang ser vi, at det totale areal under kurven (dvs. mellem kurven og 1.aksen) svarer til det samlede vandforbrug i det pågældende døgn. Vi kan derfor skrive:

$$\text{Samlede vandforbrug} = \int_0^{1440} u(t)\,dt$$

Vi ser også, at dette areal, dvs. vandforbruget, tilnærmelsesvist er givet ved summen:

$$u(0^{15})\cdot 30 + u(0^{45})\cdot 30 + \ldots\ldots + u(23^{15})\cdot 30 + u(23^{45})\cdot 30.$$

Ved at udregne denne sum kan vi altså bestemme (en tilnærmet værdi) for vandforbruget.
Dette resultat bliver naturligvis mere nøjagtigt, hvis vi vælger kortere tidsintervaller, idet antagelsen om, at u(t) er konstant i disse intervaller, bliver bedre. ♥

Eksempel 2.1.2.
En gartneriejer, som på sin mark har en vindmølle, har en aftale med det lokale elværk om, at når vindmøllen har overskudsproduktion af strøm, så sælges denne til elværket, medens gartneriet automatisk får tilført strøm fra elværket, hvis vindmøllen ikke producerer nok. Gartneriejeren skal give elektricitetsværket 20 øre pr. kWh (kiloWatt-time: energienhed for elektrisk strøm), medens han selv får 15 øre pr. kWh.

For bl.a. at undersøge ordningens økonomiske aspekter har gartneriejeren over en 5-døgns periode fået foretaget målinger over strømforsyningen, og på den baggrund har han kunnet tegne nedenstående kurve over sin indtægt pr. time fra vindmøllen.

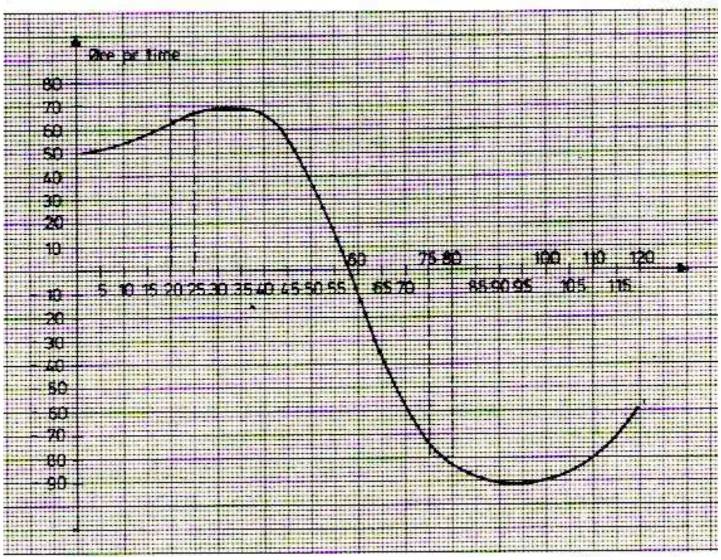


Fig. 2.2

At den herved beskrevne funktion h(t) antager negative værdier skyldes, at vindmøllen til de pågældende tidspunkter ikke producerer strøm nok, hvorfor gartneriejeren her har en udgift, dvs. en negativ indtægt.
Vi vil finde gartneriejerens samlede indtægt i løbet af de 5 døgn. (Bemærk, at vi har inddelt 1.aksen i timer, således at de 5 døgn i alt udgør 120 timer).
Hvis vi f.eks. betragter tidsintervallet fra time 20 til time 25, så ser vi, at h(t) her stort set er lig med 64 øre pr. time. Gartneriejeren har derfor tjent ca. $64\cdot 5 = 320$ øre i det pågældende tidsinterval. Dette tal er netop arealet af den tilsvarende "søjle" på figur 2.2.

Hvis vi på samme måde betragter tidsintervallet fra time 75 til time 80, så er h(t) her ca. lig med –80 øre pr. time. Indtægten i dette tidsinterval er derfor ca. –80·5 = – 400 øre. Bemærk, at dette tal er lig med minus arealet af den tilsvarende søjle på figur 2.2.
Vi får derfor den samlede nettoindtægt i hele perioden ved at beregne arealet over 1.aksen og under kurven minus arealet under 1.aksen og over kurven. Og dette er (ifølge sætning 1.5.11) netop det bestemt integrale af h(t). Vi har altså:

$$\text{Samlede nettoindtægt} = \int_0^{120} h(t)\,dt\,,$$

Og vi ser, at dette integrale tilnærmelsesvist kan beregnes som summen af en række led af typen $h(t)\cdot\Delta t$, hvor Δt er længden af et lille tidsinterval og t er et tal indenfor dette tidsinterval.
Bemærk i øvrigt, at $\int_0^{58} h(t)\,dt$ og $\int_{58}^{120} h(t)\,dt$ angiver hhv. gartneriejerens samlede positive indtægt og hans samlede negative indtægt (dvs. hans udgift). Indskudssætningen anvendt på dette, dvs.

$$\int_0^{120} h(t)\,dt = \int_0^{58} h(t)\,dt + \int_{58}^{120} h(t)\,dt$$

siger således, at gartneriejerens samlede nettoindtægt er lig med hans egentlige indtægt plus hans negative indtægt (dvs. minus hans udgifter), hvilket næppe virker overraskende på nogen. ♥

Ud over at vise, hvordan arealerne kan tillægges betydning, omtaler de ovenstående eksempler også, at et bestemt integrale kan beregnes tilnærmelsesvist som en sum af nogle led. Denne tankegang kan vi generalisere som omtalt i det følgende delafsnit.

Middelsum

Lad f være en kontinuert og stykkevis monoton funktion defineret i et interval [a ; b]. Dette interval inddeles i en række små delintervaller ved delepunkterne: $x_1, x_2, x_3, x_4, ..., x_{n+1}$, hvor $a = x_1$ og $b = x_{n+1}$ (se figur 2.3, hvor n = 9, altså hvor der er 9 delintervaller).

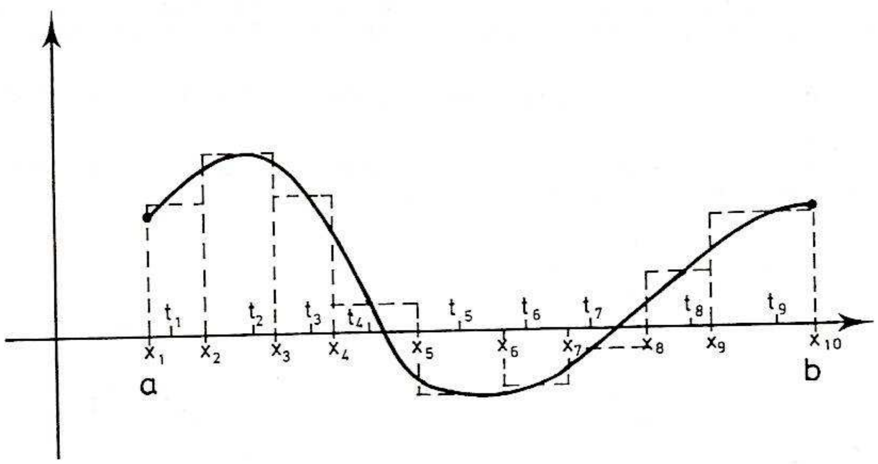


Fig. 2.3

Indenfor hvert delinterval vælges et tal: $t_1 \in [x_1 ; x_2]$, $t_2 \in [x_2 ; x_3]$, ... , $t_n \in [x_n ; x_{n+1}]$.
V.hj.a. af disse tal og delepunkter dannes summen (se Appendix 3 om summationstegn):

$$\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\cdot(x_{i+1}-x_i) = f(t_1)\cdot(x_2-x_1) + f(t_2)\cdot(x_3-x_2) + ... + f(t_n)\cdot(x_{n+1}-x_n)$$

Hvis intervalbredden $x_{i+1}-x_i$ betegnes Δx_i, kan summen skrives således: $\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\cdot\Delta x_i$

Ud fra disse betragtninger ser det ud til, at

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\cdot\Delta x_i$$

når blot alle delintervaller er tilstrækkeligt små. Og approximationen bliver bedre, jo "finere" vi inddeler intervallet [a;b].

For enhver inddeling af intervallet [a;b] og for ethvert valg af talmængden $\{t_1, t_2, t_3, ..., t_n\}$ (disse tal kan vælges på uendelig mange måder) svarende til denne inddeling kaldes summen:

$$m_s = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\cdot\Delta x_i$$

for en ***middelsum*** for f svarende til den givne inddeling.
Det ovenstående resultat kan dermed udtrykkes således:
Det bestemte integrale kan approximeres af en middelsum for f, og approximationen bliver bedre, jo finere vi inddeler intervallet [a;b]. Vi opsamler informationen i følgende sætning:

Sætning 2.1.3.
Hvis f er en kontinuert og stykkevis monoton funktion defineret i intervallet [a ; b], så kan det bestemte integrale $\int_a^b f(x)\,dx$ approximeres vilkårligt godt af en middelsum m_s for f i [a ; b] , blot inddelingen er fin nok, hvilket mere præcist kan formuleres således:

For ethvert positivt tal ε findes der en middelsum m_s for f i intervallet [a ; b], så $\left|m_s - \int_a^b f(x)\,dx\right| < \varepsilon$

Undertiden tillader man sig også at skrive:

$$\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\cdot\Delta x_i \to \int_a^b f(x)\,dx \quad \text{for} \quad IF \to 0$$

hvor IF står for ***inddelingens finhed***, dvs. længden af det længste delinterval.

Sætningen er sandsynliggjort ovenfor. Et mere formelt bevis gives i kapitel 3.

Numerisk integration.

Den metode til at bestemme en tilnærmet værdi af et bestemt integrale, som er omtalt i sætning 2.1.3 og på figur 2.3, kaldes ***numerisk integration***. Den kan anvendes, når integration skal udføres på en computer, når man ikke kender funktionsforskriften for funktionen, men kun har en graf, eller når man ikke kan bestemme en stamfunktion til den betragtede funktion.

Som det fremgår af det følgende, findes der andre numeriske metoder end (generelle) middelsummer til beregning af bestemte integraler:

Ved numerisk integration vælger vi ofte for nemheds skyld at lade alle delintervaller være lige lange – blot de holdes tilstrækkeligt små. Hvis der er n delintervaller, så er intervalbredden Δx altså givet ved: $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$, og den approximerende (middel)sum kan skrives som: $\left(\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\right)\cdot\Delta x$

For nemheds skyld vælger vi undertiden at lade punkterne $t_1, t_2, t_3, t_4, ..., t_n$ være de venstre endepunkter af intervallerne, og vi taler da om en ***venstresum*** (se figur 2.4.a):

$$V_n = \Delta x\cdot\left(\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\right)$$

Eller vi vælger at lade punkterne $t_1, t_2, t_3, t_4, ..., t_n$ være de højre endepunkter af intervallerne, og vi taler da om en ***højresum*** (se figur 2.4.b):

$$H_n = \Delta x\cdot\left(\sum_{i=2}^{n+1} f(x_i)\right)$$

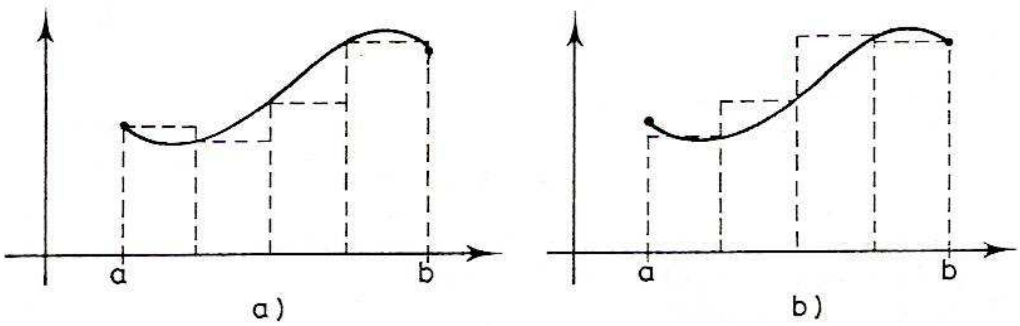


Fig. 2.4

Vi kan imidlertid få en bedre approximation ved at benytte en såkaldt ***trapezsum***, der fremkommer som antydet på figur 2.5.
Vi ser, at trapezsummen T_n netop er gennemsnitsværdien af V_n og H_n, dvs. $T_n = \frac{1}{2}(V_n + H_n)$, altså

$$T_n = \tfrac{1}{2}\left(\Delta x\cdot\left(\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\right) + \Delta x\cdot\left(\sum_{i=2}^{n+1} f(x_i)\right)\right)$$

hvilket kan omskrives til (kontrollér !!):

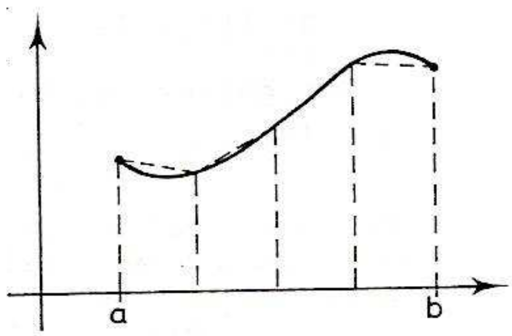


Fig. 2.5

$$\boxed{T_n = \tfrac{1}{2}\cdot\Delta x\cdot\left(f(x_1) + 2\cdot\left(\sum_{i=2}^{n} f(x_i)\right) + f(x_{n+1})\right)}$$

Vi vil nu give et eksempel på anvendelse af denne trapezsumsformel.

Eksempel 2.1.4.

Vi vil bestemme en tilnærmet værdi af det bestemte integrale: $\int_0^5 (-\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 5x + 4)\,dx$ ved at inddele intervallet [0 ; 5] i 5 lige lange delintervaller. (Bemærk, at dette næppe kan kaldes en særlig "fin" inddeling).

Først bestemmer vi de relevante funktionsværdier for f(x) = $-\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 5x + 4$:

x	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x	0	1	2	3	4	5
f(x)	4	$\frac{5}{3}$	$\frac{10}{3}$	7	$\frac{32}{3}$	$\frac{37}{3}$

Da $\Delta x = 1$ får vi af trapezsumsformlen, at:

$$T_5 = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\left(f(x_1) + 2\cdot\left(\sum_{i=2}^{5} f(x_i)\right) + f(x_6)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\left(4 + 2\cdot\left(\frac{5}{3}+\frac{10}{3}+7+\frac{32}{3}\right)+\frac{37}{3}\right) = 30{,}83$$

hvormed vi ser, at $\int_0^5 (-\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 5x + 4)\,dx \approx 30{,}83$.

(Læseren opfordres til at tegne en figur, der illustrerer udregningen).
Det skal bemærkes, at det hér betragtede integrale kan beregnes v.hj.a. de tidligere omtalte regler. Foretages denne beregning (for sammenligningens skyld !), så finder vi:

$$\int_0^5 (-\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 5x + 4)\,dx = \left[-\frac{1}{12}x^4 + x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 4x\right]_0^5 = 30{,}4167$$

Det ses altså, at selvom den anvendte inddeling som omtalt ikke er særlig "fin", så får vi faktisk et godt resultat ved approximationen med trapezsumsformlen (hér: en afvigelse på 1,37 %). ♥

Øvelse 2.1.5.

Udregn værdien af integralet: $\int_1^4 e^{\sqrt{x}}\,dx$ ved anvendelse af numerisk integration.

(Inddel intervallet [1 ; 4] i 6 lige store delintervaller, og find dels den tilsvarende trapez-sum, dels den tilsvarende middelsum, hvor delintervallernes midtpunkter anvendes). ♥

Middelværdi af funktion.

Vi indleder omtalen af middelværdi for en funktion i et interval ved at se på et eksempel:

Eksempel 2.1.6.

På figur 2.6 (se næste side) ses temperaturen f(t) ved Meteorologisk Institut som funktion af tiden en given dag. Vi vil undersøge, hvordan middeltemperaturen inden for det givne døgn bestemmes.
Hvis vi et øjeblik forestiller os den (urealistiske) situation, at temperaturen var –2 ^oC i tidsrummet [0 ; 4], 5 ^oC i tidsrummet [4 ; 12] og 10 ^oC i tidsrummet [12 ; 24] , så må vi for at udregne middeltemperaturen tage højde for, at der var 5 ^oC i dobbelt så lang tid som –2 ^oC, og at der var 10 ^oC i tre gange så lang tid som de –2 ^oC.
Vi kan sige, at i de 24 tidsenheder (timer), som vi betragter, var der –2 ^oC i de $\frac{4}{24}$ af dem, 5 ^oC i de $\frac{8}{24}$ af dem og 10 ^oC i de $\frac{12}{24}$ af dem. Og vi finder derfor middeltemperaturen m ved at sige:

$$m \; = \; -2 \cdot \tfrac{4}{24} + 5 \cdot \tfrac{8}{24} + 10 \cdot \tfrac{12}{24} \; = \; \frac{-2 \cdot 4 + 5 \cdot 8 + 10 \cdot 12}{24} \; = \; 6{,}33$$

dvs. m = 6,33 ^{o}C.
De forskellige temperaturer er altså vægtet med den brøkdel af hele tidsintervallet, som de forekommer i.

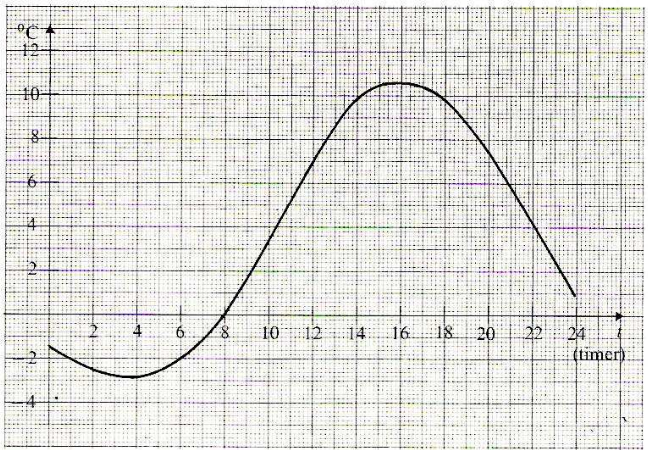


Fig. 2.6

Hvis vi nu vender tilbage til figur 2.6 og foretager en inddeling af [0 ; 24] i delintervaller, indenfor hvilke vi med tilnærmelse kan sige, at temperaturen er konstant, så ser vi, at middeltemperaturen m cirka er lig med:

$$m \; \approx \; f(t_1) \cdot \frac{\Delta x_1}{24} + f(t_2) \cdot \frac{\Delta x_2}{24} + \ldots\ldots \; + f(t_n) \cdot \frac{\Delta x_n}{24}$$

idet temperaturen er ca. lig med $f(t_i)$ i så stor en brøkdel af de 24 timer, som Δx_i udgør, dvs. $\frac{\Delta x_i}{24}$

Ved at omskrive på denne sum får vi:

$$m \; \approx \; \frac{1}{24} \cdot (f(t_1) \cdot \Delta x_1 + f(t_2) \cdot \Delta x_2 + \ldots\ldots \; + f(t_n) \cdot \Delta x_n) \; = \; \frac{1}{24} \sum_{i=1}^{n} f(t_i) \cdot \Delta x_i$$

hvoraf vi ser, at m er cirka lig med $\frac{1}{24}$ gange en middelsum for f i intervallet [0 ; 24].

Ved at gøre inddelingens finhed mindre og mindre ser vi, at vi kan sætte: $m \; = \; \frac{1}{24} \int_0^{24} f(t)\,dt$ ♥

Inspireret af eksempel 2.1.6 giver vi følgende definition:

<u>Definition 2.1.7.</u>
For en kontinuert, stykkevis monoton funktion f defineret i et interval [a ; b] kaldes tallet

$$m \; = \; \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\,dx$$

for *middelværdien* (*gennemsnitsværdien*) af funktionen i intervallet [a ; b].

Bemærk, at hvis m er gennemsnitsværdien for f i [a ; b], så er $m \cdot (b-a) \; = \; \int_a^b f(x)\,dx$.

Hvis f specielt er en positiv funktion, så er m altså højden og b – a bredden i et rektangel med samme areal som arealet under grafen for f.

Eksempel 2.1.8.

Betragt funktionen $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 7$. Grafen for f er tegnet på figur 2.7.
Vi vil bestemme gennemsnitsværdien m af f i [2 ; 5].
Vi finder (kontrollér !), at:

$$m = \frac{1}{5-2}\int_2^5 f(x)\,dx = \frac{1}{3}\int_2^5 (\tfrac{1}{2}x^2 - 3x + 7)\,dx = 3$$

(Jfr. figur 2.7). ♥

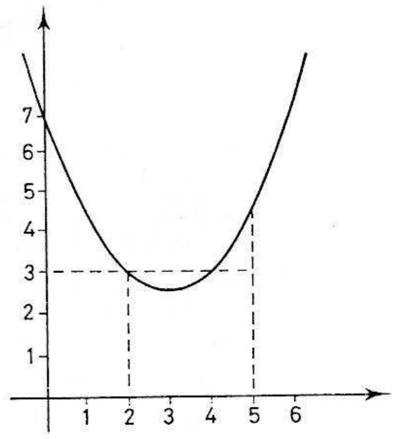


Fig. 2.7

Øvelse 2.1.9.
Bestem middelværdien af:
a) $f(x) = \sin x$ i [0 ; π]
b) $g(x) = e^x + e^{-x}$ i [–3 ; 3]
Tegn skitser, der illustrerer situationerne. ♥

Eksempel 2.1.10.
Den vekselstrøm, som vi henter ud af en stikkontakt i væggen (dvs. som vi får fra elektricitetsværket), varierer sinusformet med tiden, og den kan beskrives ved en funktion I(t) givet ved:
$I(t) = I_{max} \cdot \sin(bt)$, hvor I(t) er strømstyrken til tiden t, I_{max} er den maksimalt forekommende strømstyrke og b er en konstant. Da strømmen svinger med frekvensen 50 Hz (dvs. udfører 50 hele svingninger pr. sekund), er svingningstiden T givet ved: $T = \frac{1}{50}$ sek. Da $I(t+T) = I(t)$ (overvej!) ser vi, at $\sin(b(t+T)) = \sin(bt)$, hvoraf vi får, at: $b(t+T) = bt + 2\pi$ og dermed: $bT = 2\pi$.
Alt i alt får vi, at $b = 50{\cdot}2\pi$, hvormed I(t) kan angives ved: $I(t) = I_{max} \cdot \sin(100\pi \cdot t)$.
Når en elektrisk pærer lyser, så "blinker" den i virkeligheden 100 gange i løbet af et sekund, idet strømstyrken I(t) er nul 100 gange i løbet af ét sekund. Dette registreres ikke af øjet, som i stedet for opfatter pærens *middellysstyrke.*

En elektrisk pæres lysstyrke afhænger af den effekt (dvs. den energi pr. tidsenhed, f.eks. 60W-pære eller 75W-pære), som omsættes i pærens glødetråd. Hvis denne glødetråds modstand er R, så viser man i fysik, at effekten P er givet ved: $P = R \cdot I^2$, dvs. $P(t) = R \cdot I(t)^2$
Da pærens registrerede lysstyrke er middellysstyrken, vil vi finde den tilsvarende middeleffekt i løbet af én svingning. Da svingningstiden som nævnt er $\frac{1}{50}$ sek., får vi, idet vi f.eks. betragter tidsintervallet [0 ; $\frac{1}{50}$], at

$$P_{middel} = \frac{1}{\frac{1}{50}} \cdot \int_0^{1/50} P(t)\,dt = 50 \cdot R \cdot \int_0^{1/50} I_{max}{}^2 \cdot \sin^2(100\pi \cdot t)\,dt$$

Ved substitutionen $u = 100\pi{\cdot}t$, $du = 100\pi{\cdot}dt$ og dermed: $\frac{1}{100\pi}du = dt$ ser vi (kontrollér!), at:

$$P_{middel} \;=\; 50 \cdot R \cdot I_{max}{}^2 \cdot \frac{1}{100\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2(u)\,du$$

Ifølge eksempel 1.4.17 a) har vi, at:

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(u)\,du = \left[\tfrac{1}{2}u - \tfrac{1}{4}\sin(2u)\right]_0^{2\pi} \;=\; \tfrac{1}{2}\cdot 2\pi - \tfrac{1}{4}\cdot\sin(4\pi) - (0 - \tfrac{1}{4}\cdot\sin(0)) \;=\; \pi$$

og dermed, at

$$P_{middel} \;=\; \tfrac{1}{2} R I_{max}{}^2$$

Middeleffekten er altså halvdelen af den maksimale effekt $RI_{max}{}^2$.

Man definerer *effektivværdien* for en vekselstrøm som den konstante strømstyrke I_{eff}, der i en modstand R giver samme effekt som vekselstrømmens middeleffekt. Vi har da, at

$$RI_{eff}{}^2 \;=\; P_{middel} \;=\; \tfrac{1}{2} R I_{max}{}^2$$

hvoraf vi får, at

$$I_{eff} \;=\; \sqrt{\tfrac{1}{2}} \cdot I_{max} \;=\; 0{,}707 \cdot I_{max}$$

Ifølge Ohm's lov har vi, at U = R·I, hvor U er spændingsforskellen over modstanden.
Hvis vi sætter $U_{eff} = R \cdot I_{eff}$, så får vi:

$$U_{eff} \;=\; R \cdot I_{eff} \;=\; 0{,}707 \cdot R \cdot I_{max} \;=\; 0{,}707 \cdot U_{max}$$

Effektivværdien af vekselspændingen er altså 0,707 gange den maksimale spændingsforskel.
Når der opgives, at stikkontakten giver 220 Volt (V) vekselspænding, så er det netop effektivværdien , som opgives. Vi kan heraf se, at den maksimale spændingsforskel er givet ved:

$$U_{max} \;=\; \frac{U_{eff}}{0{,}707} \;=\; \frac{220}{0{,}707}\,V \;=\; 311\ V$$

Stikkontakten giver derfor momentant spændingsforskelle på op til 311 Volt. ♥

Rumfanget af et omdrejningslegeme.

Lad f være en kontinuert, stykkevis monoton funktion defineret i intervallet $[a\,;b]$, og antag først, at $f(x) \geq 0$ for alle $x \in [a\,;b]$ (dvs. at f er en positiv funktion). Vi vil bestemme rumfanget af det *omdrejningslegeme*, som fremkommer ved at rotere grafen for f 360^{o} omkring 1.aksen (se figur 2.8).

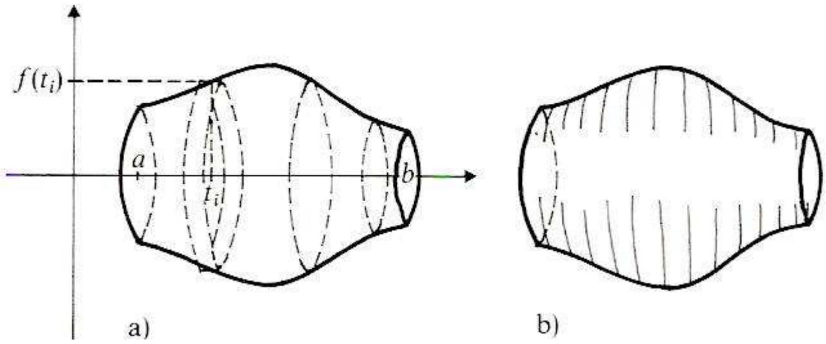


Fig. 2.8

Betragt en vilkårlig inddeling $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_{n+1}$ af intervallet $[a;b]$, og lad punkterne $t_1, t_2, t_3, t_4, \ldots, t_n$ være tilfældigt valgt indenfor hvert af delintervallerne.
Hvis vi antager, at f stort set er konstant indenfor hvert af intervallerne $[x_i;x_{i+1}]$, så ser vi, at den del af rumfanget, der svarer til $[x_i;x_{i+1}]$, er lig med $\pi \cdot f(t_i)^2 \cdot \Delta x_i$, hvor Δx_i er bredden af intervallet. Dette skyldes (jfr. figur 2.8 a) og figur 2.9), at vi får en flad cylinder med højden $h = \Delta x_i$ og radius $r = f(t_i)$ – og rumfanget af en cylinder er $\pi r^2 h$.

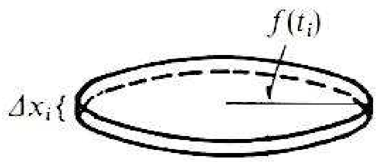


Fig. 2.9

Det samlede rumfang (volumen) V er derfor tæt på summen: $\sum_{i=1}^{n} \pi \cdot f(t_i)^2 \cdot \Delta x_i \; = \; \pi \cdot \sum_{i=1}^{n} f(t_i)^2 \cdot \Delta x_i$

dvs. V er tæt på π gange en middelsum for funktionen $(f(x))^2$. Da f er kontinuert og stykkevis monoton, gør det samme sig gældende om f^2. Når vi lader inddelingens finhed gå mod 0, vil den nævnte middelsum derfor (ifølge sætning 2.1.3) gå mod $\int_a^b f(x)^2 \, dx$.

Vi ser således, at $V = \pi \cdot \int_a^b f(x)^2 \, dx$

Hvis f ikke er en positiv funktion i $[a;b]$, så gælder dette udtryk alligevel, idet det for værdien af $f(x)^2$ er uden betydning, om $f(x) \geq 0$ eller $f(x) \leq 0$.
Vi har hermed bevist følgende sætning:

Sætning 2.1.11.
Lad f være en kontinuert og stykkevis monoton funktion defineret i $[a;b]$. Rumfanget V af det omdrejningslegeme, som fremkommer når grafen for f roteres 360^o omkring 1.aksen, er givet ved:

$$V = \pi \cdot \int_a^b f(x)^2 \, dx$$

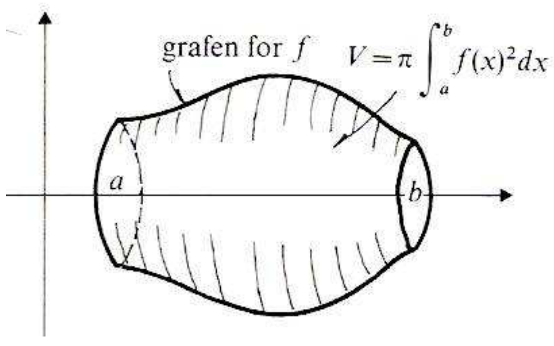


Fig. 2.10

Eksempel 2.1.12.
Punktmængden $\left\{ (x,y) \middle| \, 0 \leq x \leq 3 \; \wedge \; 0 \leq \; y \leq \frac{1}{2}x^2 \right\}$, som er skraveret på figur 2.11 (se næste side), roteres omkring 1.aksen. Herved fremkommer der et omdrejningslegeme, som vi vil bestemme rumfanget V af.
Ifølge sætning 2.1.11 har vi, at

$$V = \pi \cdot \int_0^3 (\tfrac{1}{2}x^2)^2\,dx = \pi \cdot \int_0^3 \tfrac{1}{4}x^4\,dx$$

$$= \frac{\pi}{4}\left[\tfrac{1}{5}x^5\right]_0^3 = \frac{243\pi}{20}$$

Hvis vi skal angive V med f.eks. 2 decimaler, så får vi:
V = 38,17
(Hvis enhederne på akserne f.eks. begge er cm, så bliver resultatet: V = 38,17 cm^3). ♥

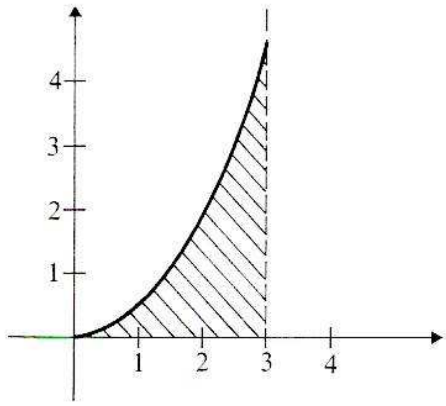


Fig. 2.11

Øvelse 2.1.13.
Vis v.hj.a. funktionen f i eksempel 1.6.25, at rumfanget af en kugle med radius r er lig med $\frac{4}{3}\pi r^3$ ♥

Øvelse 2.1.14.
Lad k > 0 være en given konstant, og betragt funktionen: $f(x) = kx$, $x \in [0\,;h]$, hvor h er et givet positivt tal.

a) Tegn en skitse, som illustrerer grafen for f.
b) Når grafen for f roteres 360° om førsteaksen, fremkommer der en kegle.
Find rumfanget for denne kegle, og argumentér for, at det er lig med $\frac{1}{3}Gh$, hvor G er keglegrundfladens areal og h er keglens højde.
c) Benyt resultatet i pkt. b) til at lave en formel for rumfanget af en keglestub ♥

Øvelse 2.1.15.
Få fat i en beholder (f.eks. en ølflaske eller en vase), som er "rotationssymmetrisk" omkring en given akse. Beholderen kan altså tænkes frembragt som et omdrejningslegeme udfra grafen for en funktion f (hvor f angiver beholderens indvendige "randkurve").
Bestem v.hj.a. en skydelære med tilpas lange kæber den udvendige diameter d(x) svarende til en del forskellige x-værdier, f.eks. med ½ cm's mellemrum. (Med x-værdier menes naturligvis punkter på symmetriaksen).
Gør rede for, at $f(x) = \dfrac{d(x)}{2} - t(x)$, hvor t(x) er beholdervæggens tykkelse det pågældende sted.
(For mange beholdere er t(x) nok konstant, hvorfor den kan måles ved åbningen).
Find ved numerisk integration beholderens indvendige volumen $V = \pi \cdot \int_a^b f(x)^2\,dx$
Fyld vand i beholderen og hæld derefter dette over i et måleglas.
Sammenlign de to bestemmelser af rumfanget.
I appendix 4 er vist resultater og billede af en løsning til denne øvelse. ♥

Længden af en kurve.

Lad f være en funktion, der opfylder, at f er differentiabel og stykkevis monoton i et interval $[a\,;b]$, samt at den afledede funktion f' er kontinuert og stykkevis monoton.

Vi vil bestemme længden af grafen for f.

Lad Δx være et lille delinterval i $[a;b]$ med startpunkt x_o, lad Δf være den tilsvarende funktionstilvækst, og Δs den tilsvarende tilvækst i kurvelængden (i længden af grafen) (se figur 2.12 og 2.13 a)). Figur 2.13 viser en del af grafen for f svarende til to forskellige værdier af tilvæksten Δx.
Hvis Δx er meget lille (se figur 2.13 b)), så er det lille kurvestykke næsten retlinet, og vi får da en lille retvinklet trekant med siderne Δx, Δf og Δs.
Ifølge Pythagoras gælder der, at

$$(\Delta s)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta f)^2$$

og dermed, at

$$\Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta f)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta f}{\Delta x}\right)^2} \cdot \Delta x$$

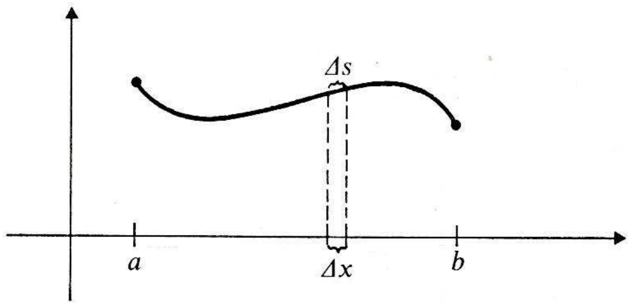


Fig 2.12

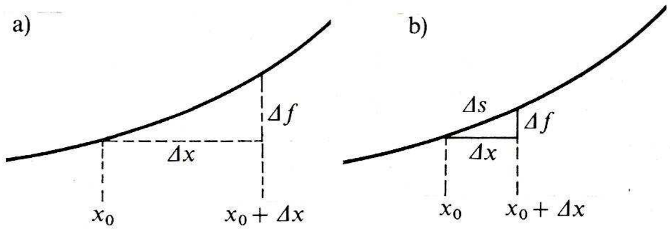


Fig 2.13

Hvis $[a;b]$ inddeles i n små delintervaller, så ses, at den samlede kurvelængde L (længden af grafen) stort set er givet ved summen

$$L \approx \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta f_i}{\Delta x_i}\right)^2} \cdot \Delta x_i$$

Når inddelingens finhed går mod nul, får vi specielt, at $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ går mod $f'(x)$. Det ses altså, at L stort set er en middelsum for funktionen $g(x) = \sqrt{1 + f'(x)^2}$. Da f' er kontinuert og stykkevis monoton, gælder det samme om funktionen g. Ifølge sætning 2.1.3 ser vi derfor, at $L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx$

Vi har hermed bevist følgende sætning:

Sætning 2.1.16.
Lad f være en funktion, der opfylder, at f er differentiabel og stykkevis monoton i et interval $[a;b]$, samt at den afledede funktion f' er kontinuert og stykkevis monoton i $[a;b]$
Længden af grafen for f er da givet ved:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx$$

Eksempel 2.1.17.
Vi vil finde længden af grafen for funktionen $f(x) = x^2$ i intervallet $[0;1]$. Da $f'(x) = 2x$ skal vi altså bestemme integralet $L = \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2}\,dx$.

Det er ikke helt simpelt at finde en stamfunktion til funktionen $\sqrt{1 + 4x^2}$, så den umiddelbare løsning vil være at anvende grafregneren eller et PC-matematikprogram til ved numeriske metoder at foretage udregningen. Vi får: L = 1,4789.

Den interesserede læser kan imidlertid via integrationsprøven kontrollere, at funktionen

$$h(t) \;=\; \frac{t}{2}\sqrt{1+t^2} + \tfrac{1}{2}\ln\left|t+\sqrt{1+t^2}\right|$$

er en stamfunktion til $\sqrt{1+t^2}$. Så v.hj.a. substitutionen t = 2x og dt = 2dx får vi:

$$\int_0^1 \sqrt{1+4x^2}\,dx \;=\; \tfrac{1}{2}\int_0^2 \sqrt{1+t^2}\,dt \;=\; \tfrac{1}{2}\cdot\left[\frac{t}{2}\sqrt{1+t^2} + \tfrac{1}{2}\ln\left|t+\sqrt{1+t^2}\right|\right]_0^2 \;=\; \tfrac{1}{2}(\sqrt{5} + \tfrac{1}{2}\ln(2+\sqrt{5}))$$

Ved udregning af dette eksakte facit fås igen: L = 1,4789. ♥

Eksempel 2.1.18.

Vi vil finde længden L af en halvcirkel ved anvendelse af funktionen f fra eksempel 1.6.25, dvs.

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \;\;,\;\; -r \le x \le r$$

Først finder vi den afledede funktion: $f'(x) = \dfrac{-2x}{2\sqrt{r^2-x^2}} \;=\; -\dfrac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}$

og derefter: $\quad 1+f'(x)^2 \;=\; 1+\dfrac{x^2}{r^2-x^2} = \dfrac{r^2-x^2+x^2}{r^2-x^2} \;=\; \dfrac{r^2}{r^2-x^2}$

hvormed vi ser, at: $\quad L \;=\; \displaystyle\int_{-r}^{r}\sqrt{\frac{r^2}{r^2-x^2}}\,dx \;=\; r\cdot\int_{-r}^{r}\frac{1}{\sqrt{r^2-x^2}}\,dx$

Dette integrale udregnes ved at anvende præcis den samme substitution som i eksempel 1.6.25 (se s.31n-32ø), hvormed vi får:

$$L \;=\; r\cdot\int_{\pi}^{0}\frac{1}{\sqrt{r^2-r^2\cos^2 t}}\cdot(-r\sin t)dt \;=\; r\cdot\int_{\pi}^{0}\frac{1}{r\sqrt{1-\cos^2 t}}\cdot(-r\sin t)dt \;=\; r\cdot\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{\sqrt{1-\cos^2 t}}\,dt$$

Da $\sqrt{1-\cos^2 t} \;=\; \sqrt{\sin^2 t} \;=\; |\sin t| \;=\; \sin t$, hvor numerisktegnet kan fjernes, idet $\sin t \ge 0$ i intervallet $[0;\pi]$, ser vi, at

$$L \;=\; r\cdot\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{\sin t}\,dt \;=\; r\cdot\int_0^{\pi}1\,dt \;=\; r\cdot[t]_0^{\pi} \;=\; r\cdot\pi$$

Da L er længden af halvcirklen, får vi – ved at gange med 2 – det velkendte udtryk for cirklens omkreds: $2\pi r$

Man ser ofte det ovenstående (eller et tilsvarende) argument anført som et <u>bevis</u> for, at cirklens omkreds er 2πr. At dette imidlertid ikke er holdbart kan ses på følgende måde: Integrationsgrænserne 0 og π blev (som anført s. 31 nederst) fundet ved at søge to tal a og b med den egenskab, at r·cos(a) = –r og r·cos(b) = r. Der vælges a = π og b = 0. Specielt vælges a = π, idet a skal passe i ligningen: r·cos(a) = –r, dvs. cos(a) = –1. Men at a = π er en løsning skyldes netop, at længden af den halve enhedscirkel er π, dvs. π·1. Vi benytter altså, at vi kender længden af den halve cirkelbue i enhedscirklen til at argumentere for den ovenstående beregning. At påstå, at vi ovenfor <u>beviser</u>, at cirklens omkreds er 2πr, vil derfor være at argumentere "i ring". Men teorierne passer smukt med hinanden. Formlen for cirklens omkreds kommer af, at π er defineret som forholdet mellem omkredsen og diameteren i en cirkel. ♥

Øvelse 2.1.19.
Bestem længden af grafen for funktionen:
a) $g(x) = \sin(x)$, $0 \le x \le \pi$
b) $h(x) = \ln(x)$, $1 \le x \le e$ ♥

Overfladearealet af et omdrejningslegeme.

Efter samme principper som ved bestemmelsen af længden af en kurve, vil vi nu finde et udtryk for overfladearealet af et omdrejningslegeme, altså f.eks. overfladen af det legeme, der ses og er skraveret på figur 2.10.
Der gælder i denne sammenhæng følgende sætning, hvis bevis er indeholdt i løsningen til den efterfølgende øvelse 2.1.24.

Sætning 2.1.20.
Lad f være en funktion, der opfylder, at f er differentiabel og stykkevis monoton i et interval $[a;b]$, samt at den afledede funktion f' er kontinuert og stykkevis monoton i $[a;b]$.
Overfladearealet S af det omdrejningslegeme, der fremkommer ved at rotere grafen for f 360^o om 1.aksen, er da givet ved:

$$S = 2\pi\int_a^b |f(x)| \cdot \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$$

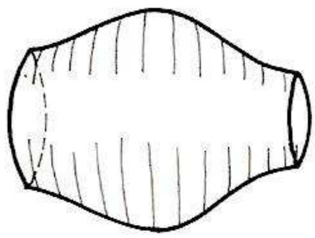


Fig. 2.14

Eksempel 2.1.21.
Vi vil (efter samme princip som i eksempel 2.1.18) anvende funktionen f fra eksempel 1.6.25 til at finde overfladen af en kugle med radius r. Ved anvendelse af sætning 2.1.20 ser vi på samme måde som i eksempel 2.1.18, at det søgte areal S er givet ved:

$$S = 2\pi\int_{-r}^{r} |f(x)| \cdot \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx = 2\pi\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2-x^2} \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}\,dx = 2\pi r\int_{-r}^{r} 1\,dx = 4\pi r^2$$

Vi ser hermed, at overfladearealet af en kugle med radius r er givet ved: $4\pi r^2$. ♥

Eksempel 2.1.22.
Overfladearealet af det omdrejningslegeme der fremkommer, hvis grafen for $h(x) = e^{-x}$, $0 \le x \le 3$ roteres omkring førsteaksen (læseren opfordres til at tegne en figur), er givet ved:

$$S = 2\pi\int_0^3 \left|e^{-x}\right| \cdot \sqrt{1+(-e^{-x})^2}\,dx = 2\pi\int_0^3 e^{-x} \cdot \sqrt{1+e^{-2x}}\,dx$$

Ved numerisk integration findes resultatet: S = 6,899. ♥

Øvelse 2.1.23.
Bestem overfladearealet af omdrejningslegemet der fremkommer, hvis grafen for funktionen g roteres omkring førsteaksen, idet g er givet ved:
a) $g(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0;2]$ b) $g(x) = \sin(x)$, $x \in [0;\pi]$
I punkt a) ønskes såvel et eksakt facit som en tilnærmet værdi. ♥

Øvelse 2.1.24.

Vi vil i denne øvelse gennem besvarelse af en række spørgsmål bevise sætning 2.1.20.

a) Tegn grafen for en funktion f (vælg en relativ simpel tegning som f.eks. figur 2.12), og inddel intervallet $[a;b]$ i et vist antal delintervaller.

b) Udvælg foreløbig ét af disse delintervaller til nærmere undersøgelse. Kald dets bredde for Δx og konstatér, at der som i beviset for sætning 2.1.16 gælder, at $\Delta s = \sqrt{1+\left(\frac{\Delta f}{\Delta x}\right)^2}\cdot \Delta x$

c) Lav en skitse af en rotation om 1.aksen af den del af grafen, der svarer til det valgte delinterval. Konstatér, at der herved fremkommer en keglestub, og at overfladen heraf svarer til et "keglebånd" med længden Δs af den skrå sideflade og med radius ca. lig med $|f(x)|$, hvor x er et tal i det betragtede delinterval, og hvor vi tager den numeriske værdi, idet funktionsværdien kunne være negativ.

d) Vi forlader nu for et øjeblik funktionen f for at se på overfladearealer af kegler og keglebånd. Tegn en kegle (et "kræmmerhus"). Argumenter for, at hvis radius i keglens grundflade er r og højden i keglen er h, så er længden l af sidefladen i keglen er givet ved: $l = \sqrt{h^2+r^2}$, og omkredsen af grundfladen er givet ved: $2\pi r$.

e) Argumentér for, at hvis vi skærer keglen op langs en ret linie fra toppen til et punkt på grundfladens periferi – og derefter folder keglen ud, så får vi et cirkeludsnit af en cirkel C med radius l . Og cirkeludsnittets buelængde er $2\pi r$. Lav en figur, der illustrere situationen.

f) Argumentér for, at cirkeludsnittet udgør så stor en brøkdel af cirklen C, som brøken $2\pi r/2\pi l$ angiver, og at cirkeludsnittets areal derfor er lig med: $\pi l^2\cdot(2\pi r/2\pi l)$

g) Argumentér for, at overfladearealet af en kegle er lig med $\pi r l$, hvor r er radius i keglens grundflade og l er længden af keglen skrå sideflade.

h) Overvej, at et keglebånd er en kegle fraregnet en lidt mindre kegle med samme åbningsvinkel (lav en figur), og at arealet A af et keglebånd derfor er givet ved: $A = \pi r_2 l_2 - \pi r_1 l_1$, hvor index 2 henviser til den største og index 1 til den mindste kegle.

i) Tegn et tværsnit af figuren fra pkt. h), og konstater, at der fremkommer to ensvinklede trekanter, hvormed der gælder, at: $l_2/r_2 = l_1/r_1$ og derfor også, at: $l_2\cdot r_1 = l_1\cdot r_2$

j) Lad Δl være længden af den skrå sideflade i keglebåndet, dvs. $\Delta l = l_2 - l_1$.
Argumentér for, at arealet A af keglebåndet (jfr. punkt h) er givet ved: $A = \pi(r_1 + r_2)\Delta l$

k) Sæt $r = \frac{r_1+r_2}{2}$ og argumentér for, at: $A = 2\pi r\Delta l$, hvormed vi i alt kan konkludere, at arealet af et keglebånd er givet ved omkredsen af cirklen i keglebåndets midte gange med længden af den skrå sideflade.

l) Vi vender nu tilbage til funktionen f og til ovenstående pkt. c). Konstatér, at overfladearealet af keglebåndet ifølge punkt k) er givet ved: $2\pi\cdot|f(x)|\cdot\Delta s = 2\pi\cdot|f(x)|\cdot\sqrt{1+\left(\frac{\Delta f}{\Delta x}\right)^2}\cdot\Delta x$, hvor x er midtpunktet af det betragtede delinterval, og at den samlede overflade af omdrejningslegemet derfor stort set er givet ved summen: $\sum_{i=1}^{n} 2\pi\cdot|f(x_i)|\cdot\sqrt{1+\left(\frac{\Delta f_i}{\Delta x_i}\right)^2}\cdot\Delta x_i$

m) Anvend definitionen på differentialkvotient, samt sætning 2.1.3 til at argumentere for, at vi hermed har bevist sætning 2.1.20. ♥

2.2. Modeller

Mængden af modeller (faglige anvendelser) med integralregning er meget stor indenfor næsten enhver afskygning af naturvidenskabelige fag (fysik, kemi, biologi, medicin, geologi, meteorologi, osv.), men også i samfundsvidenskabelige fag, herunder økonomi. Som ved andre modeller er en af udfordringerne ved beskrivelsen i en lærebog i matematik, at for at kunne arbejde med det matematisk set interessante skal der ofte en del fagligt forarbejde til (forklaring på, hvad emnet drejer sig om). Og dette nødvendige faglige forarbejde kan dels være ganske kompliceret, dels være ganske omfattende. I det følgende er der fokuseret på to fagområder: fysik og økonomi, og da kun i et begrænset udvalg. Interesserede læsere henvises til faglitteraturen for andre eksempler.

Integralregningens styrke i forbindelse med modellering ligger primært i en af følgende egenskaber:
1) Bestemte integraler kan bruges til opsummering af mange ”små” led af samme type
2) Bestemte integraler kan bruges til beregning af funktionstilvækster, hvis vi kender den afledede funktion, idet der gælder: $\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$
3) Ubestemte integraler bruges til at bestemme stamfunktion, herunder til at bestemme funktionen selv, hvis vi kender dens afledede funktion, idet der gælder: $\int f'(x)\,dx = f(x) + k$

Differentialkvotienten f' kaldes også for funktionens ændringshastighed, væksthastigheden, marginalfunktionen, grænsefunktionen eller intensitetsfunktionen – afhængig af den faglige sammenhæng. I en række faglige sammenhænge kender man denne funktion, og ud fra denne bestemmes den ”oprindelige” funktion som anført i pkt. 3), dvs. vi får den bestemt bortset fra en konstant. Og hvis vi desuden kender en funktionsværdi for den søgte funktion f, kan den bestemmes fuldstændig (konstanten findes !).
I forbindelse med pkt. 1) og 2) er der ofte knyttet bestemmelse af arealer. I pkt. 2) kan der således være tale om at arbejde med arealer under (eller i relation til) væksthastighedsgrafer.

Eksempel 2.2.1.
På nedenstående figur ses en kurve over produktionshastigheden PH for et bestemt kemikalie en given dag. Vi ser f.eks., at 1,5 timer inde i dagsproduktionen er produktionshastigheden 58 kg/min.

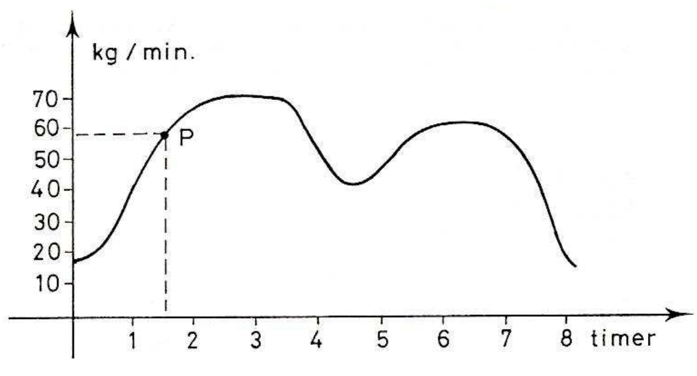


Fig. 2.15

Da produktionshastigheden er differentialkvotienten af den producerede mængde som funktion af tiden, dvs. PH(t) = PM′(t), ser vi, at den samlede produktion SDP den pågældende dag er givet ved: SDP $= \int_0^{480} PH(t)dt$, dvs. arealet under kurven. Bemærk, at da PH måles i kg pr. minut, skal tiden på førsteaksen ændres til minutter ved integrationen. ♥

Vi har i indledningen til dette kapitel vist, hvordan arealer kan tillægges betydning for konkrete modeller. Bemærk, at der i eksempel 2.1.1 og eksempel 2.1.2 faktisk er tale om integration af intensitetsfunktioner (væksthastigheder), idet der er tale om hhv. udstrømningshastigheden målt i liter pr. minut og indtjeningsintensiteten målt i øre pr. time.

Nogle eksempler fra fysik.

Eksempel 2.2.2. (Sted, hastighed og acceleration)
Vi ser på et legeme, der bevæger sig langs en linie (f.eks. en bil der kører ud af en vej). Hvis legemets position til tiden t kaldes s(t), hvor s(t) måles i meter fra startpunktet og t måles i sekunder, så er legemets hastighed v(t) til tiden t givet ved: $v(t) = s'(t)$, og v(t) måles i m/sek. Og dets acceleration a(t) til tiden t er givet ved: $a(t) = v'(t) = s''(t)$, hvor a(t) måles i m/sek^2.
Hvis vi tænker os, at vi kender a(t), så kan hastigheden findes ved integration. Specielt har vi, at hvis vi ser på to tidspunkter, t_{start} og t_{slut}, så er hastighedsændringen i dette tidsinterval givet ved:

$$v_{slut} - v_{start} = v(t_{slut}) - v(t_{start}) = \int_{t_{start}}^{t_{slut}} a(t)dt$$

Hvis a(t) er positiv, er hastighedsændringen altså arealet under grafen for a(t), der også kaldes (t,a)-kurven. Og hvis a(t) antager både positive og negative værdier (f.eks. hvis man i bilen til nogle tidspunkter træder på speederen og til andre tidspunkter på bremsen) som det ses på figur 2.16, så er hastighedsændringen lig med arealet over 1.aksen og under (t,a)-kurven minus arealet under 1.aksen og over (t,a)-kurven.

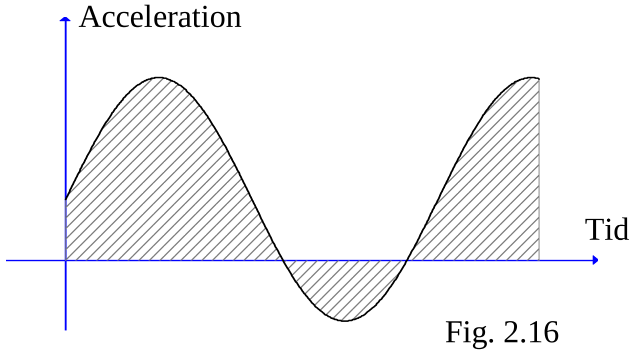


Fig. 2.16

På samme måde kan vi ud fra funktionen v(t) finde den kørte strækning – eller mere præcist: tilvæksten i positionen – i tidsintervallet fra t_{start} til t_{slut}. Der gælder altså, at:

$$s_{slut} - s_{start} = s(t_{slut}) - s(t_{start}) = \int_{t_{start}}^{t_{slut}} v(t)dt$$

Arealet under en (t,v)-kurve giver altså den kørte strækning. ♥

Eksempel 2.2.3. (Newton's anden lov)
Newtons 2. lov, som er en af fysikkens grundsætninger, siger, at den resulterende kraft F på et legeme er lig med legemets masse m gange med dets acceleration a, dvs. F = m·a
Da $a = v' = s''$, hvor v = v(t) er hastigheden til tiden t, og s = s(t) er legemets position (sted) til tiden t, kan Newtons 2. lov derfor skrives således:

$$F = m \cdot s'' \quad \text{eller} \quad s''(t) = \frac{F}{m}$$

Hvis kraften F er konstant, så har vi, idet $v(t) = s'(t)$ og dermed: $v'(t) = s''(t)$, at

$$v(t) = \int v'(t)\,dt = \int s''(t)\,dt = \int \frac{F}{m}dt = \frac{F}{m}t + c_1$$

hvor c_1 er en konstant.

Da $v(0) = \frac{F}{m}\cdot 0 + c_1 \;=\; c_1$ ser vi, at c_1 er hastigheden v_o til tiden 0. Vi får dermed: $v(t) = \frac{F}{m}\cdot t + v_o$

Tilsvarende ser vi, idet $s'(t) = v(t)$, at

$$s(t) = \int s'(t)\,dt \;=\; \int v(t)\,dt \;=\; \int (\frac{F}{m}t + v_o)\,dt \;=\; \frac{F}{m}\cdot\tfrac{1}{2}t^2 + v_o\cdot t + c_2$$

hvor c_2 er en konstant, som er lig med s(0), dvs. positionen til tiden 0, idet vi har, at

$$s(0) = \frac{F}{m}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot 0^2 + v_o\cdot 0 + c_2 \;=\; c_2$$

Kaldes s(0) for s_o får vi hermed:

$$\boxed{s(t) \;=\; \tfrac{1}{2}\frac{F}{m}\cdot t^2 + v_o\cdot t + s_o} \qquad \text{eller} \qquad \boxed{s(t) \;=\; \tfrac{1}{2}a\cdot t^2 + v_o\cdot t + s_o}$$

idet accelerationen a er givet ved: $a = \frac{F}{m}$.

Når kraften er konstant, er sammenhængen mellem tiden t og strækningen s(t) altså givet ved et andengradspolynomium.

Hvis kraften F er tyngdekraften, så har vi: F = mg, hvor g er tyngdeaccelerationen. Indsættes dette i det ovenstående får vi specielt, at:

I tyngdefeltet gælder: $\boxed{s(t) \;=\; \tfrac{1}{2}g\cdot t^2 + v_o\cdot t + s_o}$

(Det skal her bemærkes, at både g og v_o regnes med fortegn: g er positiv, hvis s-aksen er nedadrettet, og negativ, hvis s-aksen er opadrettet. v_o er positiv, hvis legemet til at begynde med bevæger sig i s-aksens positive retning, og negativ i modsat fald).

Hvis kraften <u>ikke</u> er konstant, kan vi stadigvæk arbejde med integration som angivet, og dermed finde en beskrivelse af legemets bevægelse. Resultatet bliver blot et andet. ♥

<u>Eksempel 2.2.4. (Kræfters arbejde og potentiel energi)</u>

Hvis en kraft påvirker et legeme og dermed flytter legemet, siger vi, at kraften udfører et arbejde på legemet – og dermed tilfører legemet energi.

Hvis kraften F er konstant og rettet langs forskydningen Δs af legemet, så siger vi, at kraften har udført arbejdet $A = F\cdot\Delta s$.

Hvis f.eks. tyngdekraften (jfr. eksempel 2.2.3) flytter et legeme med massen m nedad i en strækning med længden h, så har tyngdekraften udført arbejdet: A = mgh. Den energi, der herved tilføres til legemet, bliver til såkaldt kinetisk energi (bevægelsesenergi) – legemet får mere fart på.

Hvis kraften ikke er konstant, men afhænger af legemets position s, dvs. F = F(s), så må strækningen fra start til slut position inddeles i en række små intervaller indenfor hvilke kraften med rimelighed kan siges at være konstant. I hvert af disse delintervaller findes kraftens arbejde som $F(s)\cdot\Delta s$, hvormed kraftens samlede arbejde A stort set er lig med summen: $\sum_{i=1}^{n} F(s_i)\cdot\Delta s_i$, dvs. en middelsum for funktionen F(s). Ved at lade inddelingens finhed gå mod 0 ser vi, at det samlede arbejde kan udtrykkes ved:

$$A \;=\; \int_{s_1}^{s_2} F(s)ds$$

hvor s_1 er startpositionen og s_2 er slutpositionen.

Der findes syv forskellige energiformer: kinetisk energi, potentiel energi, termisk energi, elektrisk energi, kemisk energi, kerneenergi og strålingsenergi. Vi vil her se lidt nærmere på potentiel energi.

Potentiel energi kaldes også beliggenhedsenergi, idet den skyldes, at det legeme der besidder energien befinder sig et bestemt sted i et kraftfelt:

- En vase, der står på en hylde, har en potentiel energi, idet den gerne vil falde ned, hvis den får lov (her er kraftfeltet altså tyngdefeltet) og dermed omdanne sin potentielle energi til kinetisk energi.
- En kugle der sidder fast i enden af en udstrakt fjeder, har en potentiel energi, idet den gerne vil flyttes af fjederen ind mod dennes ligevægtsposition, hvis den ellers får lov (her kommer kraftfeltet altså fra fjederen) og dermed omdanne sin potentielle energi til kinetisk energi.
- En ladning q, der befinder sig i nærheden af en anden ladning Q, har en potentiel energi, idet den gerne vil lade sig flytte af den elektriske tiltræknings- eller frastødningskraft, hvis den ellers får lov.

Nulpunktet for potentiel energi defineres som det betragtede legemes energi, når det er i en given velvalgt position. I tyngdefeltet kan man frit vælge nulpunktet, men vælger ofte gulvet eller jordoverfladen, der hvor man befinder sig. For en fjeder vælges nulpunktet i den position, der svarer til fjederens ligevægtsposition, og for en elektrisk ladning vælges nulpunktet i en position uendeligt langt væk (dvs. tilstrækkeligt langt væk) fra den anden ladning.

Den potentielle energi $E_{pot}(P)$ i et givet punkt P defineres som det arbejde en ydre kraft skal udføre for at flytte legemet fra nulpunktet for den potentielle energi O til punktet P.

Tyngdefelt:
Hvis en ydre kraft (f.eks. en hånd) skal flytte et legeme (f.eks. en vase) op fra gulvet og til en hylde i højden h over gulvet, så skal denne kraft præcis være så stor, at den efter at bevægelsen er sat i gang, netop ophæver tyngdekraften. Kraften skal altså have størrelsen F = mg. Det arbejde kraften udfører er da givet ved $A = F\cdot\Delta s = mg\cdot h = mgh$.
Den potentielle energi i tyngdefeltet i højden h over nulpunktet er altså givet ved: $E_{pot}(h) = mgh$

Fjederfelt:
På figur 2.17 ses et legeme (et lod), der er sat på en fjeder. Der er anbragt en tallinie (en s-akse) med nulpunkt i loddets ligevægtsposition (dvs. i det punkt, hvor loddet kan hænge stille).
Hvis loddet er væk fra ligevægtspositionen, er det påvirket af en kraft fra fjederen ind imod ligevægtspositionen. Ifølge *Hookes lov* er denne kraft proportional med, hvor langt væk loddet er fra ligevægtspositionen, dvs. $F_{fjeder}(s) = -k\cdot s$.
Minusset skyldes, at hvis s er positiv, så er kraften rettet i negativ retning, og hvis s er negativ, så er kraften rette i positiv retning.

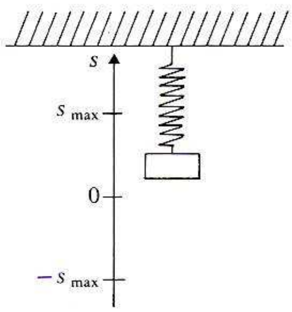


Fig. 2.17

Størrelsen k kaldes fjederkonstanten og er et udtryk for, hvor stiv fjederen er.
Hvis vi skal finde den potentielle energi af loddet, når det befinder sig i et givet punkt s_o, så skal vi finde det arbejde, som en ydre kraft (f.eks. fra en hånd) skal udføre for at føre loddet fra nulpunktet til punktet s_o. Denne ydre kraft F skal hele tiden – efter at bevægelsen er sat i gang – afbalancere fjederkraften, dvs. være lige så stor som denne, men modsat rettet, altså: F = ks.

$$A = \int_{s_1}^{s_2} F(s)ds = \int_0^{s_0} ks\,ds = \left[\tfrac{1}{2}ks^2\right]_0^{s_o} = \tfrac{1}{2}k\cdot s_o^{\,2}$$

Den potentielle energi i et fjederfelt i afstand s_o fra ligevægtsstillingen er altså givet ved:

$$E_{pot}(s_o) = \frac{1}{2} k \cdot s_o^2$$

<u>Elektrisk felt fra punktladning:</u>
Den elektriske kraftpåvirkning F_{el} på en ladning q, som befinder sig i afstanden r fra en anden ladning Q, er givet ved *Coulombs lov* : $F_{el} = k_c \cdot \frac{Q \cdot q}{r^2}$

k_c kaldes Coulomb-konstanten ($k_c = 8{,}99 \cdot 10^9$ Nm^2/C^2, hvor N er kraftenheden N og C er ladningsenheden Coulomb). Ladninger q og Q regnes med fortegn. (Læseren opfordres til at kontrollere, at kraften er en tiltrækningskraft (dvs. kraften peger ind mod Q) eller en frastødningskraft (dvs. kraften peger væk fra Q) afhængig af om ladningerne har forskelligt fortegn eller samme fortegn).

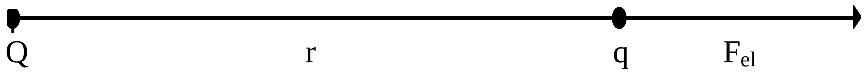


Fig. 2.18

Som nulpunkt for den elektriske potentielle energi vælges en position uendeligt langt fra Q.
Hvis en ydre kraft F skal føre ladningen q fra den potentielle energis nulpunkt til positionen r_o, så skal kraften (som i de foregående tilfælde) hele tiden være lige så stor og modsat rettet som F_{el}
Denne ydre krafts samlede arbejde A ved at føre ladningen fra nulpunktet for den potentielle energi (dvs. uendelig langt væk) til positionen r_o bliver derfor:

$$A = \int_{\infty}^{r_0} -k_c \frac{Q \cdot q}{r^2} dr \;=\; -k_c Qq \cdot \int_{\infty}^{r_0} \frac{1}{r^2} dr \;=\; k_c Qq \cdot \int_{r_0}^{\infty} \frac{1}{r^2} dr$$

Værdien af det uegentlige integrale udregnes således (jfr. definition 1.7.1):

$$\int_{r_0}^{\infty} \frac{1}{r^2} dr \;=\; \lim_{K \to \infty} \left(\int_{r_0}^{K} \frac{1}{r^2} dr \right) \;=\; \lim_{K \to \infty} \left[-\frac{1}{r} \right]_{r_0}^{K} \;=\; \lim_{K \to \infty} \left(-\frac{1}{K} + \frac{1}{r_o} \right) \;=\; \frac{1}{r_o}$$

Alt i alt ser vi dermed, at den ydre krafts arbejde A er givet ved: $A = k_c \cdot \frac{Q \cdot q}{r_o}$.

Den potentielle energi af en ladning q i et elektrisk felt omkring en punktladning Q er altså givet ved:

$$E_{pot}(r) = k_c \cdot \frac{Q \cdot q}{r}$$

hvor r er afstanden fra Q til q, og hvor Q og q regnes med fortegn. (Hvis f.eks. Q er positiv og q er negativ, som vi har det med en elektron omkring en atomkerne, så er den potentielle energi negativ, hvilket svarer fint til, at der skal tilføres energi for at fjerne ladningen q fra Q). ♥

<u>Øvelse 2.2.5.</u>

a) Tegn grafen for den ydre kraft $F(s) = ks$, $s \in [0; s_o]$ i relation til fjederen fra eksempel 2.2.4. Forklar, at det i eksemplet udregnede arbejde svarer til arealet under denne graf.

b) Skitser grafen for den ydre kraft $F(r) = -k_c \cdot \frac{Q \cdot q}{r^2}$, $r \in \,]0; \infty[$ i relation til ladningerne fra eksempel 2.2.4, idet det antages, at Q og q har hver sit fortegn.
Forklar, at det i eksemplet udregnede arbejde svarer til arealet under denne graf i intervallet $[r_o; \infty[$. ♥

Eksempel 2.2.6 (Afstandskvadratloven).
Selve afstandskvadratloven er gennemgået i appendix 5, hvortil der henvises. I det følgende fokuseres på brugen af afstandskvadratloven i relation til en problemstilling, hvor integration er en nødvendig disciplin. Og for morskabs skyld er problemstillingen sat ind i særlige eventyrlige rammer.

Den kendte rumhelt Nuke Skytalker (NS) har erfaret, at den underskønne prinsesse Lulu Banana (LB) er i fare, idet hendes rumskib er gået i stykker og den lede Fat O'Bob er på vej i sit rumskib for at tage hende til fange. Den gode Nuke Skytalker kender sin matematik og ved, at den korteste vej imellem to punkter er en ret linie – og vil derfor så hurtigt som muligt via en ret linie flyve direkte over til Lulu's rumskib. Problemet er bare, at hans rumskib befinder sig næsten på den modsatte side af planeten R-227 i forhold til Lulu's rumskib (se figur 2.19, som ikke angiver de korrekte indbyrdes størrelsesforhold). Og at flyve tæt forbi R-227 er forbundet med stor risiko p.gr.a. strålingsfaren – selv for en helt som Nuke. R-227 er nemlig en lille, men overopfyldt affaldsplanet for radioaktivt affald.

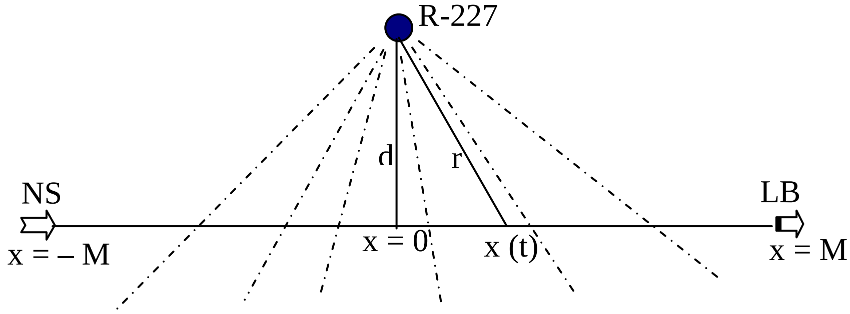


Fig. 2.19

Vi vil beregne den samlede strålingsmængde pr. m^2, som NS's rumskib udsættes for ved flyvningen langs den rette linie fra $x = -M$ til $x = M$. Men vi starter med at se på, hvordan man generelt beregner den samlede strålingsmængde pr. m^2 som i et tidsinterval fra t_1 til t_2 rammer et givet objekt.

Intensiteten I er antal strålingspartikler pr. sekund pr. m^2. Hvis intensiteten er konstant, så er strålingsmængden, der i løbet af et tidsinterval Δt rammer 1 m^2, givet ved: $I \cdot \Delta t$. I tidsintervallet fra t_1 til t_2 er den samlede strålingsmængde pr. m^2 altså givet ved: $I \cdot (t_2 - t_1)$.
Hvis intensiteten derimod ændres med tiden, (dvs. hvis I er en funktion af tiden t, således at I(t) angiver intensiteten til tiden t), så er strålingsmængden, som rammer 1 m^2 i løbet af et lille tidsinterval Δt omkring tidspunktet t givet ved: $I(t) \cdot \Delta t$. (Δt skal være så lille, at intensiteten stort set kan betragtes som konstant lig med I(t) i tidsintervallet).
Den samlede strålingsmængde S, der rammer 1 m^2 i tidsintervallet fra tiden t_1 til tiden t_2, er derfor summen af en stor mængde led af typen $I(t) \cdot \Delta t$, dvs.

$$S = \int_{t_1}^{t_2} I(t)dt$$

Hvis vi sætter tiden $t = 0$, når NS er i $x = -M$ og $t = T$ når NS er i $x = M$, så er den samlede strålingsmængde pr. m^2, som rammer NS's rumskib, givet ved: $S = \int_0^T I(t)dt$

Strålingsintensiteten opfylder afstandskvadratloven (se eksempel A.5.2 !). P.gr.a. rumskibets bevægelse ændres afstanden r til R-227 hele tiden, dvs. r er en funktion af tiden t.
Ifølge Pythagoras får vi: $r(t)^2 = x(t)^2 + d^2$ (se figur 2.19), hvoraf vi ser, at strålingsintensiteten I i virkeligheden er en funktion af x, som er en funktion af t, dvs.

$$I(t) = I(x(t)) = I_1 \cdot \frac{1}{x(t)^2 + d^2}$$

hvor I_1 er intensiteten i afstanden 1 km fra R-227, og hvor r – og dermed x(t) og d – måles i km (jfr. eksempel A.5.2).

Vi ser nu, at $$S = \int_0^T I_1 \cdot \frac{1}{x(t)^2 + d^2}\,dt$$

Hvis Nuke's rumskib flyver med hastigheden v, så har vi (overvej !), at $x(t) = -M + v\cdot t$, og dermed

$$S = I_1 \cdot \int_0^T \frac{1}{(-M + v\cdot t)^2 + d^2}\,dt$$

Ved substitutionen: $x = -M + v\cdot t$ (og dermed: $dx = v\,dt$, $t = 0 \Rightarrow x = -M$ og $t = T \Rightarrow x = -M + vT$) og ved anvendelse af, at $T = \frac{2M}{v}$, ser vi (kontrollér !), at følgende omskrivninger gælder:

$$S = \frac{I_1}{v} \cdot \int_{-M}^{-M+vT} \frac{1}{x^2 + d^2}\,dx = \frac{I_1}{v} \cdot \int_{-M}^{M} \frac{1}{x^2 + d^2}\,dx = \frac{I_1}{v\cdot d^2} \cdot \int_{-M}^{M} \frac{1}{\left(\frac{x}{d}\right)^2 + 1}\,dx$$

Hvis vi i det sidste integrale anvender substitutionen: $s = \frac{x}{d}$ får vi endelig (kontrollér !), at:

$$S = \frac{I_1}{v\cdot d} \cdot \int_a^b \frac{1}{s^2 + 1}\,ds$$

hvor $a = -\dfrac{M}{d}$ og $b = \dfrac{M}{d}$.

For at udregne dette sidste integrale anvender vi et lille "trick" (vi benytter omvendt substitution), idet vi sætter s = tan(p). Dette er muligt, idet Vm(tan) = R, så for enhver værdi af s findes en værdi p, så s = tan(p), og vi kan endda indskrænke os til at se på $p \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$.
Med substitutionen s = tan(p) har vi: $ds = (1 + \tan(p)^2)dp$. Hvis $\alpha, \beta \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ vælges, så $a = \tan(\alpha)$ og $b = \tan(\beta)$, så kan integralet omskrives således:

$$S = \frac{I_1}{v\cdot d} \cdot \int_a^b \frac{1}{s^2 + 1}\,ds = \frac{I_1}{v\cdot d} \cdot \int_\alpha^\beta \frac{1 + \tan(p)^2}{\tan(p)^2 + 1}\,dp = \frac{I_1}{v\cdot d} \cdot \int_\alpha^\beta 1\,dp = \frac{I_1}{v\cdot d} \cdot [p]_\alpha^\beta$$

dvs. $S = \dfrac{I_1}{v\cdot d} \cdot (\beta - \alpha)$.

Da $\beta = \tan^{-1}(b) = \tan^{-1}(\frac{M}{d})$ og $\alpha = \tan^{-1}(a) = \tan^{-1}(-\frac{M}{d}) = -\tan^{-1}(\frac{M}{d})$ (overvej !), ser vi:

$$S = \frac{I_1}{v\cdot d} \cdot 2 \cdot \tan^{-1}\left(\frac{M}{d}\right)$$

Læseren opfordres til at overveje rimeligheden af, at S er proportional med I_1, omvendt proportional med v – og i øvrigt vokser med voksende værdi af M og med aftagende værdi af d.

Imedens vi har foretaget disse beregninger, har vores helt Nuke Skytalker for længst glemt alt om strålingsfarer og givet sig på vej mod LB. Så lad os prøve at finde ud af, hvilken samlet strålingsmængde han bliver udsat for på flyveturen. Der er følgende data til beregningen:

Rumskibets hastighed er v = 15 km/sek, afstanden M = 600.000 km, afstanden d = 400 km og strålingsintensiteten i 1 km's afstand fra R-227 er $I_1 = 2{,}8 \cdot 10^{18}$ strålingspartikler pr. sek. pr. m^2.
Vi finder da:

$$S = \frac{2{,}8 \cdot 10^{18}}{15 \cdot 400} \cdot 2 \cdot \tan^{-1}\left(\frac{600000}{400}\right) = 1{,}465 \cdot 10^{15} \text{ strålingspartikler pr. m}^2$$

Den samlede strålingsmængde er altså $1{,}465 \cdot 10^{15}$ strålingspartikler pr. m^2.
(Bemærk, at da enheden på x(t) og d som nævnt skal være i km, idet I_1 er intensiteten i 1 km's afstand, så skal M og v·t også angives i km (idet x(t) = – M + v·t). Tiden t måles i samme tidsenhed som indgår i angivelsen af intensiteten, dvs. sekunder, idet tidsenheden skal "gå ud" ved udregning af strålingsmængden I(t)·Δt. v skal altså angives i km/sek. Når dette er sikret, spiller enhederne på v, d og M herefter ingen rolle for beregningen af den samlede strålingsmængde S).

Ca. 70 % af strålingen passerer igennem rumskibets vægge og ind til Nuke. Da han vejer 80 kg og vi kan regne med at hans overfladeareal i strålingens retning er ca. 0,9 m^2 ser vi, at han pr. kg kropsvægt ca. udsættes for: $\dfrac{1{,}465 \cdot 10^{15} \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}9}{80} = 1{,}154 \cdot 10^{13}$ strålingspartikler pr. kg.
Disse strålingspartikler har en gennemsnitlig energi på 1,1 MeV (mega elektronvolt), hvilket svarer til $1{,}1 \cdot 10^{6} \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \text{J} = 1{,}762 \cdot 10^{-13}\ \text{J}$. (J = Joule). Den samlede strålingsenergi pr. kg kropsvægt, dvs. den samlede strålingsdosis, er derfor givet ved: $1{,}154 \cdot 10^{13} \cdot 1{,}762 \cdot 10^{-13} = 2{,}03$ J/kg.
Strålingsdosis måles ofte i enheden "rem" (1 rem = 0,01 J/kg) Vi ser derfor, at vores helt Nuke er blevet udsat for en strålingsdosis på 203 rem på sin redningsmission for prinsesse Lulu.

Vi kan ikke så godt lade læseren sidde uforløst tilbage, så det skal fortælles at – jo, Nuke nåede at redde Lulu fra den lede Fat O'Bob. Og sandelig: Nuke og Lulu indgik den hellige kosmiske pagt og levede lykkeligt til hans dages ende.

Den interesserede læser kan f.eks. via Internettet undersøge, om en strålingsdosis på 203 rem er skadelig – og i givet fald hvor skadelig. ♥

Nogle eksempler fra økonomi.

Basale erhvervsøkonomiske begreber.
I de følgende eksempler arbejdes med begreber som omsætning, omkostninger, grænseomsætning, grænseomkostninger, variable omkostninger, profit og dækningsbidrag. Disse begreber er gennemgået i Appendix 6, der er ret omfattende (10 sider). Appendixet kan imidlertid uden problem læses selvom man springer over den matematiske beskrivelse af afsætningsfunktioner (4 forskellige modeller) og af omsætningsfunktioner (4 tilhørende modeller), samt over samtlige øvelser. Dette "ekstra" stof er medtaget for helheden og den særligt interesserede læsers skyld.

Ofte er det – såvel i modelteknisk som i praktisk sammenhæng – nemmere at fastlægge et udtryk for grænseomkostninger eller grænseomsætning end et udtryk for omkostningerne eller omsætningen selv. Og som det fremgår af de følgende eksempler, kan vi ud fra disse grænsefunktioner beregne totalomkostningsfunktionen, omsætningsfunktionen, profitfunktionen, osv..

Eksempel 2.2.7.
Vi ser på produktion af en given vare, hvor grænseomkostningerne, dvs. tilvæksten i omkostningerne pr. extra produceret vareenhed, er givet ved: Gromk(q) = $30+\frac{1}{40}q$
Grænseomkostningerne består altså dels af en fast værdi, dels af et led, hvis størrelse afhænger af, hvor mange enheder q, der produceres. Da grænseomkostningerne er differentialkvotienten af de totale omkostninger, dvs. Gromk(q) = Tomk′(q), ser vi, at:

$$\text{Tomk}(q) = \int \text{Gromk}(q)\,dq = \int (30+\tfrac{1}{40}q)\,dq = 30q+\tfrac{1}{80}q^2+c$$

hvor c er en konstant.
Hvis vi yderligere ved, at f.eks. Tomk(5000) = 560.000 kr. (dvs. at de totale omkostninger ved produktion af 5000 stk. er lig med 560.000 kr.), så kan c, og dermed Tomk(q) bestemmes:

$$\text{Tomk}(5000) = 30\cdot 5000 + \tfrac{1}{80}\cdot 5000^2 + c = 560.000 \quad\Rightarrow\quad c = 97.500$$

hvormed vi ser, at

$$\text{Tomk}(q) = \tfrac{1}{80}q^2+30q+97.500$$

Da Tomk(0) = 97.500 ser vi, at tallet 97.500 kr. er de fast omkostninger (FC) ved produktionen, medens resten af udtrykket for Tomk(q) er de samlede variable omkostninger VC(q) ved produktion af q enheder, dvs. VC(q) = $\frac{1}{80}q^2+30q$. ♥

Eksempel 2.2.8.

a) De samlede variable omkostninger VC(q_o) ved produktion af q_o enheder er (jfr. eksempel 2.2.7) givet ved:

$$\text{VC}(q_o) = \text{Tomk}(q_o) - \text{FC} = \text{Tomk}(q_o) - \text{Tomk}(0) = \int_0^{q_o} \text{Gromk}(q)\,dq$$

hvor Gromk(q) er grænseomkostningsfunktionen og FC er de faste omkostninger.

Der gælder altså: $\text{VC}(q_o) = \int_0^{q_o} \text{Gromk}(q)\,dq$

b) Omsætningen Oms(q) af en given vare er det samlede beløb, der tilgår virksomheden ved salg af q enheder af varen. Da der om omsætningsfunktionen specielt gælder, at Oms(0) = 0, ser vi, at

$$\text{Oms}(q_o) = \text{Oms}(q_o) - \text{Oms}(0) = \int_0^{q_o} \text{Groms}(q)\,dq$$

hvor Groms(q) er grænseomsætningsfunktionen ved salget af den pågældende vare (dvs. Groms(q) er tilvæksten i omsætning pr. extra solgt vareenhed, Groms(q) = Oms′(q)).

c) Den maksimale indtjening (profit) i forbindelse med produktion og salg af en given vare findes ved en produktionsstørrelse q_o, hvor Groms(q_o) = Gromk(q_o). (Se appendix 6).
Hvis Pr(q) = Oms(q) – Tomk(q) er profitfunktionen ved produktion og salg af q vareenheder, så kan den maksimale profit findes som: Pr(q_o) = Oms(q_o) – Tomk(q_o). Ifølge det ovenstående får vi da (overvej !):

$$\text{Pr}(q_o) = \int_0^{q_o} (\text{Groms}(q) - \text{Gromk}(q))\,dq - \text{FC}$$

Pr. definition af dækningsbidraget DB(q) ser vi hermed også, at

$$\text{DB}(q_o) = \int_0^{q_o} (\text{Groms}(q) - \text{Gromk}(q))\,dq$$

hvormed vi har et udtryk til udregning af dækningsbidraget ud fra grænsefunktionerne. ♥

Øvelse 2.2.9.

a) Grænseomsætningen for en vare antages at være givet ved: $-0{,}8q + 2750$ kr. pr. stk., når afsætningen q befinder sig i intervallet $[0; 4800]$. Bestem en forskrift for omsætningsfunktionen.

b) Grænseomkostningerne for den samme vare antages at være: $0{,}00075q^2 - 3q + 3000$ kr. pr. stk., når produktionsstørrelsen befinder sig i intervallet: $[0; 4000]$.
Bestem den værdi af q, hvor der er maksimalt dækningsbidrag (husk at gøre rede for, at det er et maksimum) – og bestem det maksimale dækningsbidrag.

c) De totale omkostninger ved produktion af 2000 stk. er 3.000.000 kr.
Bestem et udtryk for totalomkostningsfunktionen. ♥

Eksempel 2.2.10.

Virksomheden ”Cleanpaper” markedsfører en ny type miljøvenlige køkkenruller. Virksomheden regner med at kunne erobre en vis del af markedet, således at det solgte antal køkkenruller s(t) pr. dag efter en kortere eller længere indtrængningsperiode når op på værdien M, hvor markedet må siges at være mættet. Det er klart, at salget pr. dag vokser mest ”frit” (uhindret) i begyndelsen (i tiden efter lanceringen på markedet), men at væksten i salget pr. dag efterhånden bremses op, jo tættere salget kommer på mætningsværdien M.
Vi kan derfor med rimelighed antage, at forøgelsen Δs i salget pr. dag er proportional med både det aktuelle salgstal pr. dag, med afstanden til mætningen, og med Δt, hvis Δt er ”lille”, dvs.

$$\Delta s = k \cdot s(t) \cdot (M - s(t)) \cdot \Delta t$$

hvor k er proportionalitetsfaktoren. (Overvej rimeligheden af disse antagelser !!).

Ved at dividere med Δt på begge sider af lighedstegnet og udnytte, at Δt er lille, får vi i alt, at salgstallet pr. dag opfylder følgende ligning:

$$s'(t) = k \cdot s(t) \cdot (M - s(t))$$

Ifølge sætning A.1.1 i Appendix 1 findes en positiv konstant c, således at salget s(t) pr. dag, hvor t er tiden efter introduktionen på markedet, opfylder ligningen:

$$s(t) = \frac{M}{1 + c \cdot e^{-kMt}}$$

hvor M er den forventede mætningsværdi for produktet på markedet, og hvor k er en konstant som fortæller noget om produktets indtrængningshastighed på markedet.
Salgstallet pr. dag kan altså beskrives ved en logistisk vækstfunktion.

Belært af erfaringer med indtrængningshastigheder på markedet for andre produkter estimerer Cleanpaper, at størrelsen kM = 0,04. Det viste sig desuden, at der i begyndelsen blev solgt 1000 stk. pr. dag, samt at der efter 50 dage blev solgt ca. 3300 stk. pr. dag.
På baggrund af disse informationer vil vi bestemme værdierne af konstanterne M og c i modellen.

Vi har, at: $s(0) = 1000 \;\Leftrightarrow\; 1000 = \dfrac{M}{1 + c \cdot e^{-0{,}04 \cdot 0}} \;\Leftrightarrow\; M = 1000 \cdot (1 + c)$

og: $s(50) = 3300 \;\Leftrightarrow\; 3300 = \dfrac{M}{1 + c \cdot e^{-0{,}04 \cdot 50}} \;\Leftrightarrow\; M = 3300 \cdot (1 + c \cdot e^{-2})$

Disse to udtryk for M sættes lig med hinanden, og c isoleres. Derved får vi (kontrollér !), at:
c = 4,156 og dermed, at: M = 5156. Konstanten c er uden enhed og M har enheden stk. pr. dag.
Vi ser dermed, at funktionen s(t) har forskriften:

$$s(t) = \frac{5156}{1+4{,}156\cdot e^{-0{,}04t}}$$

Grafen for funktionen s(t), $t \in [0;150]$ ses på figur 2. 20.

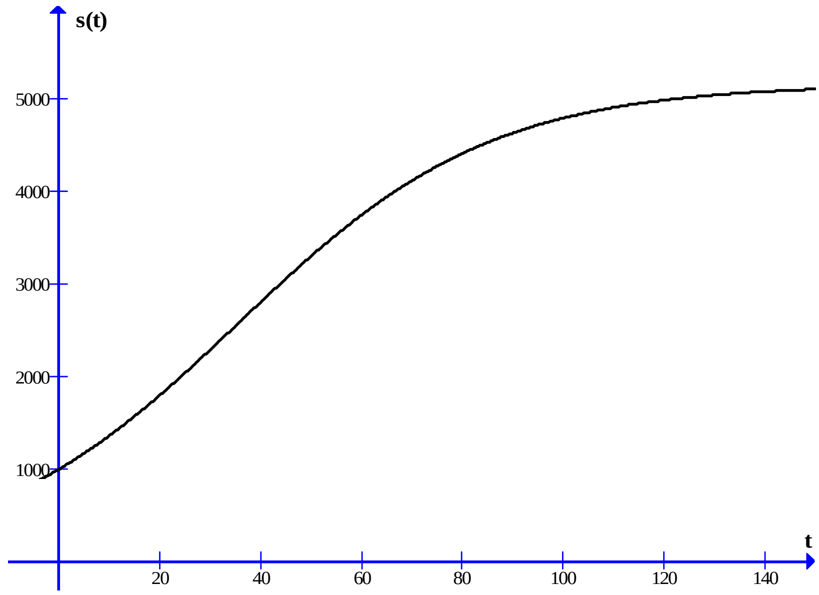


Fig. 2.20

Vi vil bruge modellen til at beregne det samlede salg i løbet af de første 70 dage. Da vi har salg pr. dag op af 2.aksen og antal dage ud af 1.aksen, er det samlede salg S(70) i løbet af de første 70 dage givet ved:

$$S(70) = \int_0^{70} s(t)\,dt$$

dvs.

$$S(70) = \int_0^{70} \frac{5156}{1+4{,}156\cdot e^{-0{,}04t}}\,dt$$

Ifølge sætning A.1.4 gælder der: $\int \frac{M}{1+c\cdot e^{-kMx}}\,dx = \frac{1}{k}\cdot \ln(e^{kMx}+c)$, hvor vi har udeladt konstanten q, da den alligevel forsvinder ved udregningen af det bestemte integrale. Vi ser, at det er nødvendigt at finde værdien af konstanten k for at kunne udregne integralet. Da kM = 0,04 og M = 5156 ser vi, at $k = 7{,}75795\cdot 10^{-6}$, hvormed vi kan udregne S(70). Vi får (kontrollér!):

$$S(70) = \int_0^{70} \frac{5156}{1+4{,}156\cdot e^{-0{,}04t}}\,dt = \left[\frac{1}{7{,}75795\cdot 10^{-6}}\cdot \ln(e^{0{,}04t}+4{,}156)\right]_0^{70} = 178.547$$

Ifølge modellen sælges der altså 178.547 stk. i løbet af de 70 første dage. ♥

Øvelse 2.2.11.
En virksomhed markedsfører en ny type vaskepulver og regner med, at det solgte antal kg s(t) pr. dag tilnærmelsesvist kan beskrives ved en logistisk vækstfunktion:

$$s(t) = \frac{a}{1+b\cdot e^{ct}}$$

hvor a, b og c er de konstanter, der fastlægger modellen. (Bemærk, at a = M, b = c og c = – kM i sætning A.1.1, men som bekendt kan man navngive sine konstanter og variable, som man vil).
Virksomheden estimerer på baggrund af en markedsanalyse og tidligere erfaringer, at det nye produkt efterhånden kan erobre en markedsandel, som svarer til en afsætning på ca. 8000 kg pr. dag.
I begyndelsen blev der solgt ca. 1500 kg pr. dag, og efter 45 dage blev der solgt ca. 4200 kg pr. dag.

a) Beregn ud fra disse informationer værdierne af parametrene a, b og c.
(Vejledning: Bestem først værdien af a ved at se på $t \to \infty$).
b) Tegn grafen for s(t), $t \in [0;200]$
c) Beregn det samlede salg i løbet af de første 100 dage. ♥

Kap. 3: En teoretisk tilgang til bestemte integraler mm.

Indledning

I den foregående tekst er begreberne ubestemt integral og bestemt integral bygget op på begreberne stamfunktion og areal:

- I definition 1.3.1 indførte vi det ubestemte integrale af en funktion f som en vilkårlig stamfunktion til f. Men det forudsætter, at f har en stamfunktion !
- I sætning 1.5.1 beviste vi så, at hvis f er kontinuert, positiv og stykkevis monoton, så har den en stamfunktion, nemlig arealfunktionen. Men det forudsætter, at punktmængden under en graf har et areal ! Og det er ikke naturgivent, som det senere vil blive vist i et eksempel i dette kapitel.
- I definition 1.5.3 indførte vi det bestemte integrale af en funktion f v.hj.a. en stamfunktion til f, hvormed bestemte integraler kun er defineret for funktioner, der har en stamfunktion (i hvert fald stykkevist i delintervaller – jfr. afsnittet om stykkevis kontinuerte funktioner (s. 20ff)).

Konklusionen på dette er bl.a., at der skal skabes et ordentligt fundament i sammenhængen mellem funktioners grafer og arealer, og at der derfor skal skabes et ordentligt grundlag for arealbegrebet. Vejen til dette fører via begrebet integrabilitet, som vi derfor først vil se på. Og vi venter længst muligt med at inddrage arealbegrebet, indtil det bliver nødvendigt at tage fat på.

Over-, under- og middelsummer.

Vi betragter en begrænset funktion f defineret i et interval $[a;b]$, dvs. en funktion, hvorom der gælder, at der findes to tal k og K, så $k \le f(x) \le K$ for alle $x \in [a;b]$ (jfr. definition 1.1.1).
Vi foretager en inddeling af intervallet $[a;b]$ i n delintervaller v.hj.a. delepunkterne $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, x_{n+1}$, hvor $x_1 = a$ og $x_{n+1} = b$. (Jfr. figur 3.1).
For hvert delinterval $[x_i;x_{i+1}]$ vælges dels et tal $t_i \in [x_i;x_{i+1}]$, dels to tal k_i og K_i som opfylder, at

$$k_i \le f(x) \le K_i \quad \text{for alle } x \in [x_i;x_{i+1}]$$

hvilket er muligt, da f er begrænset. På figur 3.1 er dette vist for intervallet $[x_3;x_4]$.

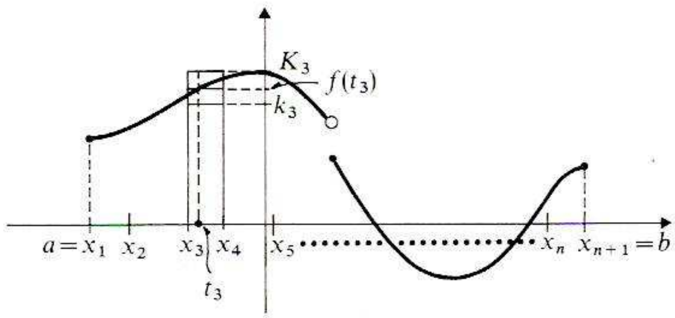


Fig. 3.1

For ethvert valg af talmængden $\{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ kaldes summen:

$$\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\cdot(x_{i+1}-x_i) = f(t_1)\cdot(x_2-x_1) + f(t_2)\cdot(x_3-x_2) + \ldots\ldots + f(t_n)\cdot(x_{n+1}-x_n)$$

som omtalt s. 38 for en *middelsum* m_s for f svarende til inddelingen $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, x_{n+1}$.

Og hvis intervalbredden $x_{i+1}-x_i$ betegnes Δx_i, kan summen skrives således: $m_s = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\cdot\Delta x_i$

Vi indfører nu begreberne *undersum* og *oversum* på følgende måde:
Ved en undersum s og en oversum S for f svarende til den givne inddeling forstår vi følgende summer:

$$s = \sum_{i=1}^{n} k_i \cdot \Delta x_i = k_1 \cdot \Delta x_1 + k_2 \cdot \Delta x_2 + \ ...... \ + k_n \cdot \Delta x_n$$

$$S = \sum_{i=1}^{n} K_i \cdot \Delta x_i = K_1 \cdot \Delta x_1 + K_2 \cdot \Delta x_2 + \ ...... \ + K_n \cdot \Delta x_n$$

hvor k'erne og K'erne er valgt som beskrevet ovenfor.

Da det gælder for alle t_i, at $k_i \le f(t_i) \le K_i$, opnår vi at: $s \le m_s \le S$.
Middelsummer er altså "spærret inde" imellem en undersum og en oversum.
Størrelsen $S - s$ angiver derfor, hvor stor variation der højst kan være for middelsummerne svarende til en given inddeling. Vi ser således, at hvis vi kan gøre størrelsen $S - s$ mindre ved at gøre inddelingens finhed mindre, så er den mulige variation i de tilsvarende middelsummer mindre.

Størrelsen $S - s$ er givet ved:

$$S - s = (K_1 - k_1)\cdot \Delta x_1 + (K_2 - k_2)\cdot \Delta x_2 + \ ...... \ + (K_n - k_n)\cdot \Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} (K_i - k_i)\cdot \Delta x_i$$

På figur 3.2 er $S - s$ lig med det samlede areal af de skraverede rektangler. (Vi betragter af tegnemæssige årsager en temmelig grov inddeling $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}$ af $[a;b]$).

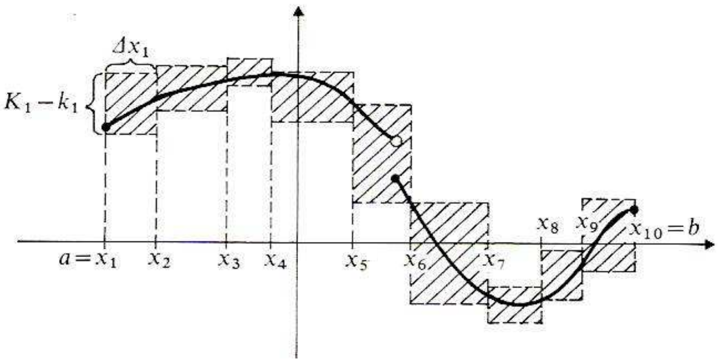


Fig. 3.2

Hvis vi på figur 3.2 tilføjer endnu et delepunkt x', f.eks. mellem x_6 og x_7 (se figur 3.3), så er de ovenfor bestemte summer s og S stadigvæk undersum og oversum for f. Dette ses af, at da $k_6 \le f(x) \le K_6$ for alle $x \in [x_6 ; x_7]$, så gælder dette naturligvis også for alle $x \in [x_6 ; x']$ og for alle $x \in [x' ; x_7]$.

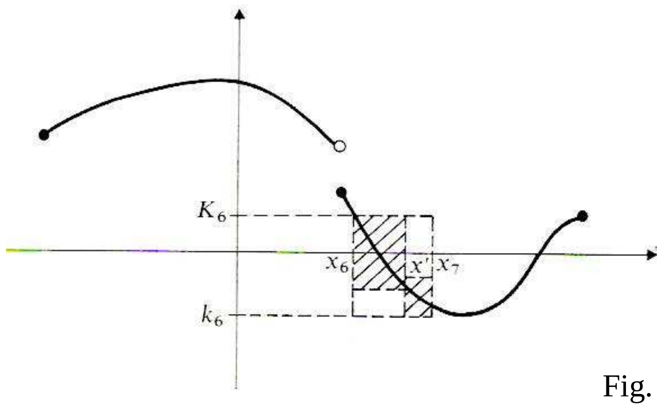


Fig. 3.3

Som antydet på figur 3.3 ser vi imidlertid, at vi med det nye delepunkt x' eventuelt kan gøre afstanden mellem mellem undersum og oversum mindre, idet de skraverede rektanglers areal er mindre end arealet af det større rektangel.
Vi ser således, at vi ved at tilføje delepunkter til en given inddeling muligvis kan gøre S – s mindre, idet vi eventuelt har fået en mindre oversum og samtidig en større undersum.
Det bemærkes, at når vi således tilføjer et (eller flere) delepunkter til en given inddeling, så siger vi, at vi foretager en *videre-inddeling* af intervallet.

<u>Øvelse 3.1.</u>

a) Tegn grafen for funktionen: $f(x) = x^2 \ , \quad x \in \left[0;2\right]$
Find den størst mulige undersum, en middelsum og den mindst mulige oversum svarende til en inddeling af intervallet $\left[0;2\right]$ i 5 lige store delintervaller.
b) Foretag samme beregning med 10 lige store delintervaller, og kommentér resultatet.
c) Gentage pkt. a) og b), idet vi i stedet for intervallet $\left[0;2\right]$ ser på intervallet $\left[-1;3\right]$ ♥

Adskillelse af summer

<u>Sætning 3.2.</u>
Lad f være en begrænset funktion defineret i et interval $\left[a;b\right]$.
Da gælder, at enhver undersum for f er mindre end enhver oversum for f.

Dette kan også udtrykkes således:
Hvis s er en vilkårligt valgt undersum for f svarende til en given inddeling af $\left[a;b\right]$, og hvis S er en vilkårligt valgt oversum for f svarende til en anden inddeling af $\left[a;b\right]$, så gælder, at: $s \leq S$

Bevis:
Lad I_1 betegne inddelingen (dvs. mængden af delepunkter) af $\left[a;b\right]$ svarende til s, og lad I_2 tilsvarende betegne inddelingen af $\left[a;b\right]$ svarende til S. Hvis vi nu gradvist (ét efter ét) tilføjer de delepunkter fra I_2 til I_1, som ikke allerede er med i I_1, så får vi inddelingen $I_1 \cup I_2$ af $\left[a;b\right]$.
Som omtalt ovenfor kan s stadigvæk betragtes som en undersum svarende til denne videreinddeling af I_1, ligesom S stadigvæk kan betragtes som en oversum svarende til den tilsvarende videreinddeling af I_2. På denne måde bliver s en undersum svarende til inddelingen $I_1 \cup I_2$ og S bliver en oversum svarende til den <u>samme</u> inddeling $I_1 \cup I_2$, hvormed vi ser, at $s \leq S$. ♥

<u>Definition 3.3.</u>
Et givet fast tal T siges at *skille* eller at *adskille* mængden af undersummer og mængden af oversummer for en given begrænset funktion f defineret i et interval $\left[a;b\right]$, hvis der gælder følgende:
For enhver undersum s og enhver oversum S gælder der, at: $s \leq T \leq S$

Nu er det på ingen måde givet, at der overhovedet findes et sådant tal T svarende til en given funktion f, men dette sikres af følgende sætning:

<u>Sætning 3.4.</u>
Hvis f er en begrænset funktion defineret i et interval $[a;b]$, så findes der mindst ét tal T, som adskiller mængden af undersummer og mængden af oversummer for f.

Bevis:
Lad s være en vilkårlig valgt undersum for f, og lad S være en vilkårligt valgt oversum for f.
Da gælder ifl. sætning 3.2, at $s \le S$. Der er nu to muligheder: $s = S$ og $s < S$.
Hvis $s = S$, så sætter vi $T = s = S$. Dette tal T adskiller mængden af undersummer og mængden af oversummer for f. For hvis vi f.eks. antager, at der findes en undersum s* som er større end T, så vil s* også være større end S, og dermed har vi en undersum, der er større end en oversum, hvilket er i strid med sætning 3.2.
Hvis $s < S$, så betragtes midtpunktet q af intervallet $[s;S]$. Der er nu tre muligheder:

1) Der findes en oversum S_1, som er mindre end q, og vi betragter da summerne s og S_1
2) Der findes en undersum s_1, som er større end q, og vi betragter da summerne s_1 og S.
3) Hvis hverken a) eller b) er opfyldt, sætter vi $T = q$, og vi da færdige, idet alle oversummer er større end eller lig med q og alle undersummer er mindre end eller lig med q.

Hvis pkt. 3 ikke indtraf, anvender vi de to fundne summer (s og S_1 eller s_1 og S) og begynder argumentet forfra (hvor S nu er S_1 eller hvor s nu er s_1).
På denne måde får vi <u>enten</u> "undersum = oversum" (dvs. $s = S$) eller pkt. 3) opfyldt på et eller andet tidspunkt – og vi er da som omtalt færdige – <u>eller</u> også får vi en række intervaller af typen $[s;S]$, som ligger indeni hinanden, og hvor bredden af et interval højst er halvt så stor som bredden af det foregående interval, dvs. vi får en såkaldt ruse. Ifølge intervalsammensnævringsaksiomet (se appendix 7) fastlægger denne ruse præcis ét tal, som vi vil kalde T.
Vi skal nu blot argumentere for, at dette tal T opfylder det ønskede, dvs. at alle undersummer for f er mindre end eller lig med T og at alle oversummer for f er større end eller lig med T.

Lad os først se på undersummerne.
Der anvendes et indirekte bevis, så vi antager, at der findes en undersum s*, så $s^* > T$, og skulle så gerne få en modstrid frem.
Sæt $\varepsilon = s^* - T$. Da længderne af intervallerne i den betragtede ruse går mod 0, idet de mindst halveres i hvert skridt, vil der findes et interval $[s_n;S_n]$ i rusen (det interval, der fremkommer efter n skridt, hvor n er tilstrækkelig stor), hvorom der gælder, at $S_n - s_n < \varepsilon$

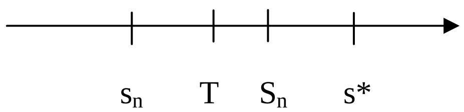


Fig. 3.4

Da $T \in [s_n;S_n]$ ser vi, at $S_n < s^*$, hvormed vi har fundet en oversum for f, som er mindre end en undersum for f, og dette er i strid med sætning 3.2.

Antagelsen om, at der findes en undersum s*, som er større end T, kan altså ikke være opfyldt, hvormed vi ser, at alle undersummer er mindre end eller lig med T.
Beviset for oversummer forløber tilsvarende og overlades til læseren. ♥

Ifølge sætning 3.4 findes der altså mindst ét tal, som adskiller undersummerne og oversummerne for en begrænset funktion f defineret i et interval $[a;b]$. Men spørgsmålet er også, om der findes mere end ét tal, der adskiller under- og oversummer ?!

Eksempel 3.5.
Lad funktionen f være givet ved:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{når } x \text{ er rational} \\ 1 & \text{når } x \text{ er irrational} \end{cases} \quad , \quad x \in [1;2]$$

Om denne funktion gælder, at uanset hvilken inddeling af intervallet $[1;2]$ vi betragter, så vil samtlige delintervaller indeholde både rationale og irrationale tal (se appendix 7), og dermed vil det for alle oversummer S og alle undersummer s gælde, at $S \geq 1$ og $s \leq 0$.
Vi ser dermed, at alle tal T mellem 0 og 1 adskiller mængden af undersummer og mængden af oversummer, dvs. der er uendeligt mange tal med denne egenskab. ♥

Så svaret på det rejste spørgsmål er ifølge eksempel 3.5, at der kan være mange tal, der adskiller under- og oversummer for en given funktion. I det følgende får vi brug den næste sætning:

Sætning 3.6.
Lad f være en begrænset funktion defineret i et interval $[a;b]$.
Da er følgende to udsagn ensbetydende:
1) Der findes netop ét tal T, der adskiller undersummerne og oversummerne for f
2) For ethvert $\varepsilon > 0$ findes en oversum S og en undersum s for f, så $S - s < \varepsilon$

Bevis:
Vi gennemfører beviset ved først at vise, at udsagn 1) medfører udsagn 2) (dvs. 1) ⇒ 2)), og derefter at udsagn 2) medfører udsagn 1) (dvs. 2) ⇒ 1)).
1) ⇒ 2): Her forudsætter vi altså, at der findes netop ét tal T, som adskiller undersummer og oversummer. Lad $\varepsilon > 0$ være vilkårligt valgt. Vi skal nu vise, at der findes en undersum s og en oversum S, så $S - s < \varepsilon$.
Betragt tallet $T + \varepsilon/2$ (læseren opfordres til at tegne en tallinie). Da $T + \varepsilon/2 > T$, adskiller tallet $T + \varepsilon/2$ ikke under- og oversummerne. Der må derfor findes en oversum S, som er mindre end $T + \varepsilon/2$, dvs. $S < T + \varepsilon/2$. På samme måde ses, at der må findes en undersum s, så $s > T - \varepsilon/2$.
Men heraf ses i alt, at $S - s < \varepsilon$.
2) ⇒ 1): Her forudsætter vi, at der for ethvert $\varepsilon > 0$ findes en oversum S og en undersum s for f, så $S - s < \varepsilon$, og vi skal vise, at der findes netop ét tal T, der adskiller undersummerne og oversummerne for f. Ifølge sætning 3.4 findes der mindst et sådant tal T. Så vi skal bevise, at der ikke findes mere end ét tal T, som adskiller. Dette gøres ved et indirekte bevis.
Vi antager derfor, at der findes to forskellige tal T_1 og T_2, som adskiller, og da de to tal er forskellige, må det ene være mindre end det andet. Vi tænker os, at $T_1 < T_2$. Vi sætter nu $\varepsilon^* = T_2 - T_1$.
Ifølge forudsætningerne findes der en undersum s og en oversum S, så $S - s < \varepsilon^*$.
Da alle oversummer er større end eller lig med T_2, har vi specielt, at $S \geq T_2$, og da alle undersummer er mindre end eller lig med T_1, har vi specielt, at $s \leq T_1$. Dette giver os: $S - s \geq T_2 - T_1 = \varepsilon^*$, hvilket strider imod, at $S - s < \varepsilon^*$
Hermed er sætningen bevist. ♥

Integrabilitet

Vi starter med at bevise følgende sætning:

Sætning 3.7.
Lad f være en begrænset funktion defineret i et interval $[a;b]$.
Hvis der findes netop ét tal T, som adskiller undersummerne og oversummerne for f, så vil middelsummerne m_s for f gå imod T, når inddelingens finhed IF går mod 0, dvs.

$$m_s \to T \quad \text{for} \quad IF \to 0$$

Dette kan mere præcist og formelt formuleres på følgende måde:
Hvis der findes netop ét tal T, som adskiller undersummerne og oversummerne for f, så gælder der:

For ethvert tal $\varepsilon > 0$ findes der en middelsum m_s for f , så $|m_s - T| < \varepsilon$

Bevis:
Inddelingen finhed er som omtalt s. 38 længden af det længste delinterval i den betragtede inddeling. Og vi skal altså vise, at for ethvert $\varepsilon > 0$ er det muligt at finde en middelsum m_s for f svarende til en tilstrækkelig fin inddeling af $[a;b]$, så der gælder, at $|m_s - T| < \varepsilon$.
Lad $\varepsilon > 0$ være vilkårligt valgt. Ifølge forudsætningen om, at der findes netop ét tal T, der adskiller undersummer og oversummer, giver sætning 3.6 os, at der findes en undersum s og en oversum S, så $S - s < \varepsilon$. Lad I_1 betegne inddelingen (dvs. mængden af delepunkter) af $[a;b]$ svarende til s, og lad I_2 tilsvarende betegne inddelingen af $[a;b]$ svarende til S, og lad m_s være en vilkårlig middelsum svarende til videreinddelingen $I_1 \cup I_2$. Da gælder der (overvej !), at $s \le m_s \le S$.
Da vi samtidig har, at $s \le T \le S$, ser vi i alt, at $|m_s - T| \le S - s < \varepsilon$, hvor numerisktegnet er nødvendigt, idet vi ikke ved om m_s er større eller mindre end T. Hermed er det ønskede bevist. ♥

På baggrund af det ovenstående kan vi nu give følgende definition.

Definition 3.8.
En funktion f, der er defineret og begrænset i et interval $[a;b]$, siges at være *integrabel* i $[a;b]$, hvis der findes netop ét tal T, som adskiller undersummerne og oversummerne for f.
Tallet T kaldes det bestemte integrale af f og skrives: T = $\int_a^b f(x)dx$

På baggrund af definition 3.8, sætning 3.6 og sætning 3.7 kan vi nu anføre følgende (overvej !):

Sætning 3.9.
Lad f være en begrænset funktion defineret i et interval $[a;b]$. Da gælder:

a) Følgende to udsagn er ensbetydende:
   1) f er integrabel i $[a;b]$
   2) For ethvert $\varepsilon > 0$ findes en oversum S og en undersum s for f, så $S - s < \varepsilon$

b) Hvis f er integrabel i $[a;b]$, så vil middelsummerne m_s for f gå mod integralet af f, når inddelingens finhed IF går mod 0, dvs.

$$m_s \to \int_a^b f(x)dx \quad \text{for IF} \to 0$$

dvs.: For ethvert tal $\varepsilon > 0$ findes der en middelsum m_s for f , så $\left| m_s - \int_a^b f(x)dx \right| < \varepsilon$

Eksempel 3.10.
Lad $f(x) = k$, $x \in [a;b]$, være en konstant funktion. Da tallet $k(b - a)$ både er en undersum og en oversum for f (svarende til den inddeling af $[a;b]$, som kun har to "delepunkter" a og b), og da $k(b - a)$ samtidig er den eneste mulige middelsum (overvej dette), ser vi, at f er integrabel i $[a;b]$, og at

$$\int_a^b k dx = k(b-a).$$ ♥

Hvis vi ser på funktionen f omtalt i eksempel 3.5, så er der mere end ét tal, der adskiller undersummerne og oversummerne for f, hvorfor f ikke er integrabel.
Men som vi skal se, er det lidt af en matematisk spidsfindighed, at der overhovedet findes funktioner, som ikke er integrable. De fleste af de begrænsede funktioner, vi betragter, <u>er</u> integrable.

Når vi ud fra definition 3.8 og sætning 3.9 a) skal vise, at en given forelagt funktion er integrabel, så skal vi enten vise, at der netop findes ét tal, som adskiller undersummerne og oversummerne for funktionen, eller at der for ethvert nok så lille, vilkårligt valgt $\varepsilon > 0$ gælder, at der findes en undersum s og en oversum S, så $S - s < \varepsilon$. Det sidste er ofte det nemmeste at gå til. Som eksempel herpå vil vi bevise følgende sætning:

Sætning 3.11.
Lad f være en begrænset funktion defineret i et interval $[a;b]$.
Hvis f er monoton, så er f integrabel.

Bevis:
Vi fører beviset for en voksende funktion. Beviset for en aftagende funktion er helt tilsvarende.
Lad $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, x_{n+1}$, være en inddeling af $[a;b]$. (Se figur 3.5, hvor n = 7). Da f er voksende, kan vi vælge k'er og K'erne i hhv. undersum og oversum, således at

$$k_1 = f(x_1)$$
$$k_2 = K_1 = f(x_2)$$

$k_3 = K_2 = f(x_3)$
.....
.....
$k_n = K_{n-1} = f(x_n)$
$K_n = f(x_{n+1})$

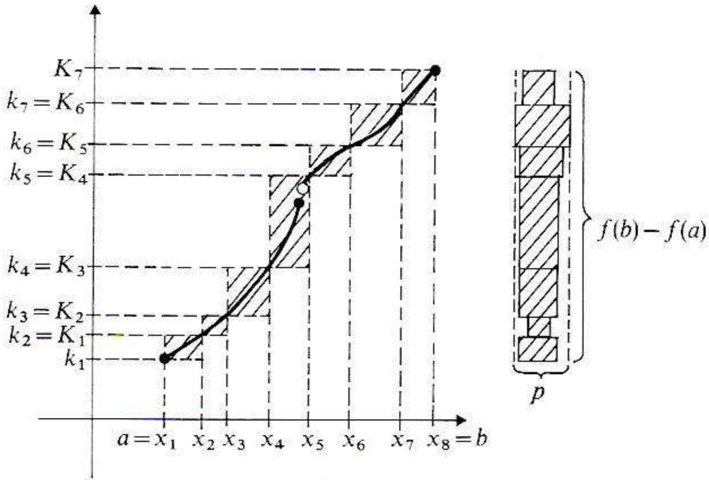


Fig. 3.5

$S - s$ er lig med det samlede areal af de skraverede rektangler. Og hvis vi stabler disse rektangler ovenpå hinanden (se figuren), så ser vi, at $S - s$ er mindre end eller lig med $p \cdot (f(b) - f(a))$, hvor p er længden af det største delinterval, dvs. p er inddelingens finhed.
Ved at gøre p tilstrækkelig lille kan vi få gjort $S - s$ så lille, som vi ønsker. Dette indses således:

Hvis $\varepsilon > 0$ er en vilkårligt givet (underforstået lille) positiv værdi, så sætter vi $p = \dfrac{\varepsilon}{2(f(b) - f(a))}$

Hvis vi nu vælger en inddeling med finheden p, så gælder der om den ovenfor beskrevne undersum s og oversum S, at:

$$S - s \le p \cdot (f(b) - f(a)) = \frac{\varepsilon}{2(f(b) - f(a))} \cdot (f(b) - f(a)) = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

dvs. $S - s < \varepsilon$.
Hermed er sætningen bevist. ♥

<u>Øvelse 3.12.</u>
Giv en begrundelse for, at funktionen $f(x) = x^2$, $x \in [0;1]$, er integrabel.
Gøre rede for, at hvis vi inddeler $[0;1]$ i n lige store delintervaller, så er

$$s = \frac{0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + ... + (n-1)^2}{n^3}$$

en undersum for f svarende til betragtede inddeling, og

$$S = \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + ... + n^2}{n^3}$$

er en oversum for f svarende til den betragtede inddeling.
Kontrollér for n lig med 2, 3, 4, 5 og 6, at der gælder følgende formel:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \tfrac{1}{6} \cdot n \cdot (n+1) \cdot (n+2)$$

Formlen gælder for alle heltallige værdier af n, hvilket kan vises ved et såkaldt induktionsbevis. Men vi vil ikke komme yderligere ind på dette hér.

Vis v.hj.a. den betragtede formel, at $s = \frac{1}{6}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(2-\frac{1}{n}\right)$ og at $S = \frac{1}{6}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(2+\frac{1}{n}\right)$

Lad n gå mod uendelig (dvs. lad inddelingens finhed gå mod 0), og bestem derved: $\int_0^1 x^2 dx$ ♥

Eksempel 3.13.

Vi betragter en funktion f, som er integrabel i $[a;b]$. Vi ændrer nu denne funktion i ét enkelt punkt x_o og kalder den derved fremkomne funktion g, dvs.

$$g(x) = \begin{cases} q \quad , \text{ når } x = x_o \\ f(x), \text{ når } x \neq x_o \end{cases}$$

hvor $q \neq f(x_o)$. (Se figur 3.6 a)).

Vi vil nu argumentere for, at funktionen g er integrabel i $[a;b]$ og at: $\int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(x)dx$

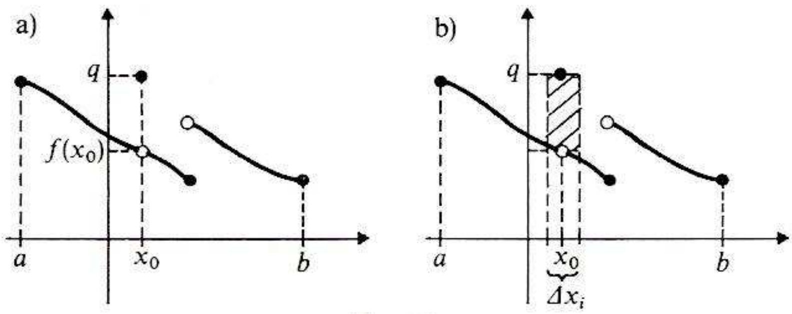


Fig. 3.6

Den eneste forskel på summerne for f og for g er et led, hvis størrelse svarer til det skraverede areal på figur 3.6 b). Og når inddelingens finhed går mod 0, så bliver denne forskel forsvindende lille, hvormed det ønskede indses.

Vi bemærker, at hvis to funktioner er ens bortset fra i et endeligt antal punkter, og hvis den ene funktion er integrabel, så er den anden funktion også integrabel, og de to integraler er ens. For ifølge det ovenstående resultat kan vi blot ændre den ene funktion til den anden punkt for punkt.
Af dette få vi specielt, at en integrabel funktions værdier i endepunkterne af et integrationsinterval er uden betydning for integralets værdi.
Funktionerne f_1 og f_2 på nedenstående figur 3.7 har således samme integral fra a til b.

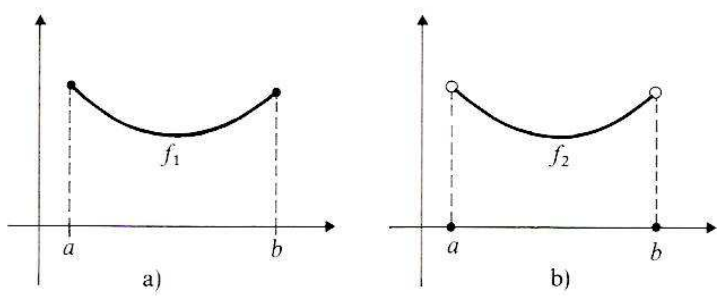


Fig. 3.7

♥

Vi er nu klar til at vise en af de afgørende sætninger:

Sætning 3.14.
Hvis f er en kontinuert funktion defineret i $[a\,;b]$, så er f integrabel i $[a\,;b]$

Bevis:
Da f er kontinuert i et lukket, begrænset interval $[a\,;b]$, antager f såvel et maksimum som et minimum i $[a\,;b]$. Hermed ser vi, at f er en begrænset funktion.

Vi vil nu benytte sætning 3.9 a) til at bevise, at f er integrabel.
Lad derfor $\varepsilon > 0$ være vilkårligt valgt. Vi skal da vise, at der findes en undersum s og en oversum S for f i $[a\,;b]$, så $S - s < \varepsilon$.
Lad $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, x_{n+1}$ være en vilkårlig inddeling af $[a\,;b]$. Da f er kontinuert i hvert af intervallerne $[x_i\,;x_{i+1}]$, kan vi sætte $k_i = \min\limits_{x\in[x_i;x_{i+1}]} f(x)$ og $K_i = \max\limits_{x\in[x_i;x_{i+1}]} f(x)$ (Se figur 3.8)

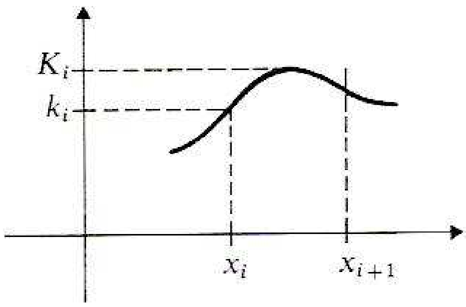


Fig. 3.8

Summerne:

$$s = \sum_{i=1}^{n} k_i \cdot \Delta x_i = k_1 \cdot \Delta x_1 + k_2 \cdot \Delta x_2 + \ldots\ldots + k_n \cdot \Delta x_n$$

$$S = \sum_{i=1}^{n} K_i \cdot \Delta x_i = K_1 \cdot \Delta x_1 + K_2 \cdot \Delta x_2 + \ldots\ldots + K_n \cdot \Delta x_n$$

bliver da hhv. en undersum og en oversum for f svarende til den givne inddeling.

<u>Hvis</u> det for <u>alle</u> indeks i (dvs. for <u>alle</u> delintervaller $[x_i\,;x_{i+1}]$) gælder, at $K_i - k_i < \frac{\varepsilon}{b-a}$, så kaldes inddelingen for en ε-uniform inddeling af $[a\,;b]$. (Ordet uniform betyder ensartet. Det bruges f.eks. også i forbindelse med "uniform kontinuitet". Vi vil ikke komme yderligere ind på. Men den interesserede læser kan finde mere om det i litteraturen). Da vi skal omtale begrebet "en ε-uniform inddeling" adskillige gange i det følgende, indfører vi følgende korte benævnelse: EUI.

Hvis der findes en EUI, så har vi:

$$S - s = \sum_{i=1}^{n}(K_i - k_i)\cdot\Delta x_i < \sum_{i=1}^{n}\frac{\varepsilon}{b-a}\cdot\Delta x_i = \frac{\varepsilon}{b-a}\cdot\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i = \frac{\varepsilon}{b-a}\cdot(b-a) = \varepsilon$$

dvs. hvis vi har en EUI af $[a\,;b]$, så opfylder den angivne undersum s og oversum S, at $S - s < \varepsilon$, hvor med det ønskede er bevist.

Vi skal altså vise, at for det givne (men vilkårligt valgte) ε findes der en EUI af $[a;b]$!!
Dette gør vi ved at føre et indirekte bevis. Argumentet forløber således:

Antag derfor, at der <u>ikke</u> findes en EUI af $[a;b]$. Heraf får vi, at der enten ikke findes en EUI af venstre halvdel eller af højre halvdel af intervallet (idet hvis der er en EUI for hver af de to halvdele, så er der også en EUI af hele intervallet). Lad os f.eks. tænke os, at der ikke findes en EUI af højre halvdel af intervallet. Hvis vi indskrænker os til at se på dette interval, så kan det igen deles i to halvdele, hvorom der gælder, at mindst en af dem ikke har en EUI. Således kan vi fortsætte, hvormed vi får en interval-ruse (se appendix 7), hvor det om hvert interval i rusen gælder, at der ikke eksisterer en EUI af intervallet. En sådan ruse bestemmer netop ét punkt, som vi vil kalde x_o.
Da f er kontinuert i $[a;b]$, er f specielt kontinuert i x_o. Ifølge definitionen på kontinuitet i et punkt får vi, at der findes en omegn $\omega(x_o)$ (dvs. et symmetrisk interval) omkring x_o, hvorom der gælder:

$$x \in \omega(x_o) \;\Rightarrow\; |f(x) - f(x_o)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\,.$$

Da længden af intervallerne i rusen går mod 0, vil disse intervaller fra et eller andet skridt (lad os kalde det n), være en delmængde af $\omega(x_o)$.

Vi ser hermed, at det om intervallet I_n gælder, at: $\quad x \in I_n \;\Rightarrow\; |f(x) - f(x_o)| < \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$.

Heraf får vi (overvej !), at:

$$\max_{x\in I_n} f(x) - \min_{x\in I_n} f(x) = \max_{x\in I_n} f(x) - f(x_o) + f(x_o) - \min_{x\in I_n} f(x) < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} = \frac{\varepsilon}{b-a}\,,$$

hvormed vi ser, at der findes en EUI af I_n bestående af blot to punkter (I_n's endepunkter).
Men hermed har vi opnået en modstrid. For ifølge antagelsen og den heraf følgende konstruktion af rusen har ingen intervaller i rusen en EUI. Antagelsen om, at $[a;b]$ ikke har en EUI kan altså ikke holde, hvormed vi ser, at der findes en EUI af $[a;b]$. Hermed er sætningen bevist. ♥

Vi ved nu, at monotone funktioner er integrable, og at kontinuerte funktioner er integrable.
Det er imidlertid ikke alle funktioner, som er kontinuerte eller monotone. Men praktisk talt alle de funktioner, vi møder, er *stykkevis kontinuerte* og/eller *stykkevis monotone*, dvs. deres definitionsmængder kan inddeles i et endeligt antal delintervaller (eller evt. endepunkter), hvori funktionen er kontinuert, eller hvori funktionen er enten voksende, aftagende eller konstant (se figur 1.3).

For at vise, at en stykkevis kontinuert eller en stykkevis monoton funktion er integrabel, må vi have en sætning som siger, at hvis en funktion er integrabel i de (endeligt mange) delintervaller, som udgør intervallet $[a;b]$, så er funktionen også integrabel i $[a;b]$.

Følgende sætning, som kaldes indskudssætningen, giver os det ønskede:

<u>Sætning 3.15.</u> (Indskudssætningen)
Lad f være en begrænset funktion defineret i $[a;b]$, og lad $c \in]a;b[$ være vilkårligt valgt.
Der gælder da følgende:
Hvis f er integrabel i $[a;c]$ og i $[c;b]$, så er f integrabel i $[a;b]$, og omvendt.
Og i bekræftende fald har vi: $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

Bevis:
Antag først, at f er integrabel i $[a;b]$, og lad ε være et vilkårligt valgt lille positivt tal. Ifølge sætning 3.9 a) har vi, at der findes en undersum s for f og en oversum S for f svarende til en tilstrækkelig fin inddeling af $[a;b]$, således at: $S - s < \varepsilon$.
Hvis c ikke er et delepunkt i denne inddeling, kan vi ifølge side 62-63 blot tilføje c som delepunkt (lave en videre-inddeling). Herved er s og S stadigvæk hhv. undersum og oversum for f.
Vi kan herefter skrive:

$$S = S_1 + S_2 \quad \text{og} \quad s = s_1 + s_2$$

hvor S_1 er den del af S, som stammer fra $[a;c]$, og hvor S_2 er den del af S, som stammer fra $[c;b]$ – og tilsvarende med s_1 og s_2.
Herved bliver s_1 og s_2 undersummer for f i hhv. $[a;c]$ og $[c;b]$, og S_1 og S_2 bliver de tilsvarende oversummer for f.
Da $S_1 - s_1 \geq 0$ og $S_2 - s_2 \geq 0$, da $S - s = (S_1 + S_2) - (s_1 + s_2) = (S_1 - s_1) + (S_2 - s_2)$ og da $S - s < \varepsilon$ ser vi, at: $S_1 - s_1 < \varepsilon$ og $S_2 - s_2 < \varepsilon$.
Vi har således til et vilkårligt valgt $\varepsilon > 0$ fundet en undersum s_1 og en oversum S_1 for f i $[a;c]$, så $S_1 - s_1 < \varepsilon$. Ifølge sætning 3.9 a) er f derfor integrabel i $[a;c]$.
Tilsvarende ses, at f er integrabel i $[c;b]$.

Antag nu omvendt, at f er integrabel i $[a;c]$ og i $[c;b]$, og lad $\varepsilon > 0$ være vilkårligt valgt.
Da $\frac{1}{2}\varepsilon > 0$, og da f er integrabel i $[a;c]$, har vi ifølge sætning 3.9 a), at der findes en undersum s_1 og en oversum S_1 for f svarende til en tilstrækkelig fin inddeling af $[a;c]$, således at $S_1 - s_1 < \frac{1}{2}\varepsilon$.
På tilsvarende måde bestemmes s_2 og S_2 fra $[c;b]$, så $S_2 - s_2 < \frac{1}{2}\varepsilon$.
Hvis vi nu sætter $S = S_1 + S_2$ og $s = s_1 + s_2$, så er S en oversum for f og s en undersum for f svarende til en inddeling af $[a;b]$, og desuden gælder der, at:

$$S - s = (S_1 + S_2) - (s_1 + s_2) = (S_1 - s_1) + (S_2 - s_2) < \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$$

dvs. $S - s < \varepsilon$.
Ifølge sætning 3.9 a) har vi hermed indset, at f er integrabel i $[a;b]$
Hermed er første del af sætningen bevist.
Antag nu, at f er integrabel i $[a;b]$ - og dermed også i $[a;c]$ og $[c;b]$.
Hvis m_{s1} og m_{s2} er middelsummer for f i hhv. $[a;c]$ og $[c;b]$, så er $m_s^* = m_{s1} + m_{s2}$ en middelsum for f i $[a;b]$.

Da middelsummerne m_{s1} går imod $\int_a^c f(x)dx$, når inddelingens finhed går mod 0, og tilsvarende middelsummerne m_{s2} går imod $\int_c^b f(x)dx$, når inddelingens finhed går mod 0, så vil middelsummerne af formen m_s^* gå mod $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

Da vi desuden ved om <u>alle</u> middelsummerne m_s for f i $[a;b]$, at de går imod $\int_a^b f(x)dx$, når inddelingens finhed går mod 0, så må vi have, at: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

Hermed er sætningen bevist. ♥

V.hj.a. indskudssætningen vil vi nu udvide integralbegrebet til også at omfatte $\int_a^b f(x)dx$, når $a \geq b$.
Idet vi ønsker, at indskudssætningen skal gælde, ser vi ved at lade a = c, at:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^a f(x)dx + \int_a^b f(x)dx .$$

Dette giver os, at vi må sætte: $\int_a^a f(x)dx = 0$.

Da vi ligeledes vil have, at $\int_a^b f(x)dx + \int_b^a f(x)dx = \int_a^a f(x)dx$ (= 0) skal gælde, vi må sætte:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx .$$

Vi anfører derfor følgende definition:

Definition 3.16.
Lad f være en integrabel funktion. Vi sætter da: $\int_a^a f(x)dx = 0$ og $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

Øvelse 3.17.
Gør v.hj.a. definition 3.16 og sætning 3.15 rede for, at $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ gælder for alle mulige placeringer af a, b og c i forhold til hinanden (f.eks. $c < b < a$ eller $a < b < c$) og ikke kun for $a < c < b$ som i sætning 3.15. ♥

Indtil nu har vi fundet en masse resultater om integrabilitet, men selve udregning af integralerne (altså bestemmelse af den værdi, der adskiller under- og oversummer), har ikke været meget omtalt, og bestemmelsen af værdien er da foregået med en del besvær (jfr. eksempel 3.10 og øvelse 3.12). Dette problem afhjælpes i de fleste tilfælde af følgende sætning – evt. i kombination med eksempel 3.13 og sætning 3.15.

Sætning 3.18.
Hvis f er integrabel i intervallet $[a;b]$, og hvis f har en stamfunktion F i dette interval, så gælder der, at

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Bevis:
Lad $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, x_{n+1}$ være en vilkårlig inddeling af $[a;b]$. Vi har da, (idet $a = x_1$ og $b = x_{n+1}$), at

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= F(x_{n+1}) - F(x_1) \\ &= F(x_{n+1}) - F(x_n) + F(x_n) - F(x_1) \end{aligned}$$

hvor vi har trukket $F(x_n)$ fra og lagt det til igen.
Hvis vi gør tilsvarende med leddene $F(x_{n-1})$, $F(x_{n-2})$ ......, $F(x_2)$, så får vi:

$$F(b) - F(a) = (F(x_{n+1}) - F(x_n)) + (F(x_n) - F(x_{n-1})) + (F(x_{n-1}) - F(x_{n-2})) + \ldots\ldots + (F(x_2) - F(x_1))$$

Da F er differentiabel i $[a;b]$ og dermed i alle delintervallerne, får vi ifølge differentialregningens middelværdisætning, at der i hvert interval $]x_i;x_{i+1}[$ findes et tal t_i, således at

$$F(x_{i+1}) - F(x_i) = F'(t_i)\cdot(x_{i+1}-x_i) = f(t_i)\cdot\Delta x_i$$

hvor vi har brugt, at $F' = f$.
Heraf ser vi, at

$$F(b) - F(a) = f(t_n)\cdot\Delta x_n + f(t_{n-1})\cdot\Delta x_{n-1} + ... + f(t_1)\cdot\Delta x_1$$

dvs. $F(b) - F(a)$ er lig med en middelsum for f svarende til den givne inddeling af $[a;b]$.

For hver inddeling af $[a;b]$ vil vi således få, at $F(b) - F(a)$ er lig med en middelsum for f. Da vi ved, at middelsummerne for f går imod et entydigt bestemt tal, når inddelingens finhed går mod 0, ser vi, at dette tal må være $F(b) - F(a)$. Da vi også ved, at tallet er $\int_a^b f(x)dx$, har vi hermed, at

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Hermed er sætningen bevist. ♥

Vi har nu på baggrund af den teoretiske tilgang til bestemte integraler via summer og integrabilitet etableret en sætning, som stemmer overens med definition 1.5.3 fra den mere pragmatisk orienterede tilgang til emnet i kapitel 1. Det betyder, at alle sætninger og regler i afsnit 1.5, 1.6 og 1.7, som ikke omhandler arealer, også gælder for det i kapitel 3 definerede integralbegreb. Om de indgående funktioner skal blot anføres den ”tillægsforudsætning”, at de er integrable.
Læsere, der ønsker at se eksempler på udregning af bestemte integraler, henvises derfor til kapitel 1.

Som det fremgår af sætning 3.18, vil det være rart at kunne arbejde med integrable funktioner, der har en stamfunktion. Vi har allerede bevist, at en kontinuert funktion er integrabel (se sætning 3.14). Vi vil derfor nu bevise, at en kontinuert funktion har en stamfunktion (jfr. sætning 1.5.2):

Sætning 3.19.
Lad f være en kontinuert funktion defineret i et interval I, og lad $q \in I$ være et vilkårligt valgt tal.
Hvis vi for alle $x \in I$ sætter

$$F(x) = \int_q^x f(t)\,dt$$

så er funktionen F en stamfunktion til f i I.
Der gælder altså, at

- $F'(x) = f(x)$ for alle indre punkter x i I,
- hvis a er et venstre endepunkt for I, som er med i I, så er $F'_+(a) = f(a)$, og
- hvis b er et højre endepunkt for I, som er med i I, så er $F'_-(b) = f(b)$.

Bevis:
$F(x)$ er defineret for alle $x \in I$, idet f er kontinuert og dermed integrabel i intervallet $[q;x]$ eller $[x;q]$
Ifølge definitionen på differentiabilitet skal vi for et vilkårligt $x_o \in I$ undersøge differenskvotienten
$\frac{F(x) - F(x_o)}{x - x_o}$ for x gående mod x_o (evt. fra højre eller venstre i et intervalendepunkt a eller b).
Ifølge indskudssætningen for integraler har vi:

$$F(x) - F(x_o) \;=\; \int_q^x f(t)\,dt - \int_q^{x_o} f(t)\,dt \;=\; \int_q^x f(t)\,dt + \int_{x_o}^q f(t)\,dt \;=\; \int_{x_o}^x f(t)\,dt$$

<u>Antag først, at $x > x_o$:</u>
Da f er kontinuert i det lukkede, begrænsede interval $[x_o;x]$, antager f både et maximum K_x og et minimum k_x i $[x_o;x]$. Vi sætter altså: $k_x = \min\limits_{t\in[x_o;x]} f(t)$ og $K_x = \max\limits_{t\in[x_o;x]} f(t)$.

Vi får da: $$k_x \cdot (x - x_o) \;\le\; \int_{x_o}^x f(t)\,dt \;\le\; K_x \cdot (x - x_o)$$

Overvej dette, f.eks. ved under- og oversumsbetragtninger, både når f antager positive og negative funktionsværdier !!.
Ifølge det ovenstående har vi således, at:
$$k_x \cdot (x - x_o) \;\le\; F(x) - F(x_o) \;\le\; K_x \cdot (x - x_o)$$
og ved division med $x - x_o$ (som er positiv), får vi: $$k_x \;\le\; \frac{F(x) - F(x_o)}{x - x_o} \;\le\; K_x$$

<u>Antag dernæst, at $x < x_o$:</u>
Da f er kontinuert i det lukkede, begrænsede interval $[x; x_o]$, antager f både et maximum K_x og et minimum k_x i $[x; x_o]$. Vi sætter altså: $k_x = \min\limits_{t\in[x;x_o]} f(t)$ og $K_x = \max\limits_{t\in[x;x_o]} f(t)$.

Vi får da (overvej !): $$k_x \cdot (x_o - x) \;\le\; \int_x^{x_o} f(t)\,dt \;\le\; K_x \cdot (x_o - x)$$

dvs. $$k_x \cdot (x_o - x) \;\le\; F(x_o) - F(x) \;\le\; K_x \cdot (x_o - x)$$

og ved division med $x_o - x$ (som er positiv), får vi: $$k_x \;\le\; \frac{F(x_o) - F(x)}{x_o - x} \;\le\; K_x \,.$$

Ved at forlænge brøken med –1 får vi endelig: $$k_x \;\le\; \frac{F(x) - F(x_o)}{x - x_o} \;\le\; K_x \,.$$

Vi ser dermed, at denne dobbeltulighed både gælder for $x < x_o$ og $x > x_o$
Hvis vi nu lader x gå mod x_o (evt. fra højre eller venstre, hvis x_o er et endepunkt for I), så giver kontinuiteten af f, at både k_x og K_x går mod $f(x_o)$. Men da $\dfrac{F(x) - F(x_o)}{x - x_o}$ ligger imellem k_x og K_x, ser vi, at også $\dfrac{F(x) - F(x_o)}{x - x_o}$ går mod $f(x_o)$ for x gående mod x_o .
Vi får derfor, at F er differentiabel i x_o og at $F'(x_o) = f(x_o)$.
(Hvis x_o er et venstre intervalendepunkt, som er med i I, får vi $F'_+(x_o) = f(x_o)$. Og tilsvarende med et højre intervalendepunkt). Hermed er sætningen bevist. ♥

Ifølge sætning 3.18 kan vi udregne bestemte integraler, blot vi kender en stamfunktion, og ifølge sætning 3.19 har en kontinuert funktion en stamfunktion. Så alt skulle være i den skønneste orden. Vi har for en række standardfunktioner fundet deres tilsvarende stamfunktioner (se omslaget på bogen), og vi har en række regneregler til at finde stamfunktioner for andre mere komplekse funktioner, men det er alligevel langtfra givet, at vi altid kan <u>finde</u> et <u>funktionsudtryk</u> for en stamfunktion til en given kontinuert funktion, selvom vi ifølge sætning 3.19 ved, at stamfunktionen <u>eksisterer</u>.
Prøv f.eks. at finde en stamfunktioner til funktionerne f og g givet ved:
$$f(x) = \frac{1}{x^3 + e^x} \quad \text{og} \quad g(x) = \sqrt{\sin(x)}$$

Arealbegrebet i planen.

Arealbegrebet bygger på nogle grundlæggende aksiomer, dvs. udsagn/sætninger, hvis indhold der er generel enighed om fornuften og korrektheden af. Sådanne aksiomer bevises derfor ikke, men opskrives som gyldige forudsætninger for det øvrige arbejde med emnet. Desuden skal der anføres nogle definitioner til fastlæggelse af de begreber, vi arbejder med.
(Det skal bemærkes, at der er dygtige matematikere, som igennem tiden har arbejdet på at bringe antallet af aksiomer for den matematiske teori ned på et minimum, således at man ud fra dette minimum på snedig vis kan argumentere for (bevise) udsagn, der tidligere var opfattet som aksiomer. Dette ligger imidlertid langt udenfor rammerne af denne bog).

Aksiom 1: Den tomme mængde Ø har et areal af størrelsen 0, dvs. A(Ø) = 0.

Aksiom 2: Et rektangel har et areal, som er givet ved rektanglets længde (ℓ) gange dets bredde (b), dvs. A(rektangel) = $\ell \cdot b$

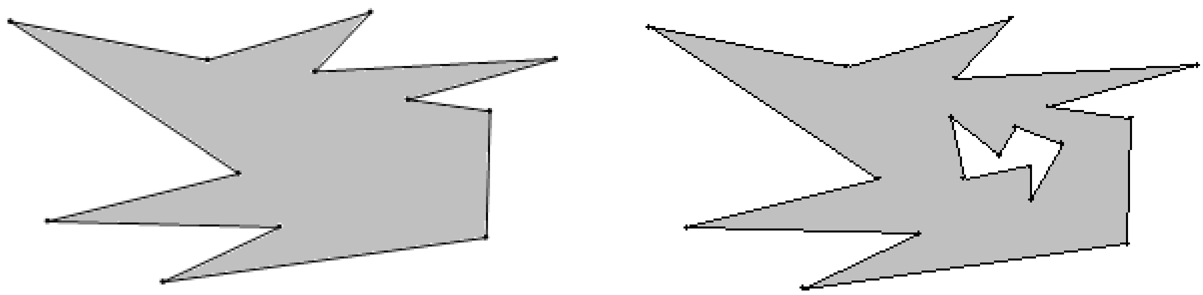
Aksiom 3: Diagonalen i et rektangel deler rektanglet i to lige store retvinklede trekanter, som hver har et areal, der er halvt så stort som arealet af rektanglet, dvs.
A(retvinklet trekant) = $\frac{1}{2} \cdot \ell \cdot b$

Aksiom 4: Et liniestykke har et areal af størrelsen 0, dvs. A(liniestykke) = 0.

Aksiom 5: Hvis en punktmængde M har et areal, så gælder, at A(M) ≥ 0.

Aksiom 6: <u>Hvis</u> to punktmængder M_1 og M_2 hver for sig har et areal, og <u>hvis</u> M_1 og M_2 er parvis disjunkte (evt. bortset fra en fælles kant bestående af et endeligt antal liniestykker), så har punktmængden $M_1 \cup M_2$ et areal, og der gælder, at:
$A(M_1 \cup M_2) = A(M_1) + A(M_2)$.

<u>Definition 3.20.</u>
a) Ved en *generel polygon* (se figur 3.9) forstår vi et sammenhængende, aflukket, begrænset område i planen, der afgrænses af et endeligt antal liniestykker, som ikke skærer hinanden.
b) Denne tomme mængde Ø regnes af praktiske grunde for en polygon.
c) Ved en *polygonområde* (Se figur 3.10) forstår vi foreningsmængden af et endeligt antal generelle polygoner, der er parvis disjunkte (evt. bortset fra en fælles kant bestående af et endeligt antal liniestykker)


a) b)
Fig. 3.9

Som det fremgår af figur 3.9 b) må der gerne være polygonformede ”huller” i figuren (heraf navnet generel polygon), men almindeligvis tænker vi på et område som vist på figur 3.9 a).

Et polygonområde kan f.eks. se således ud:

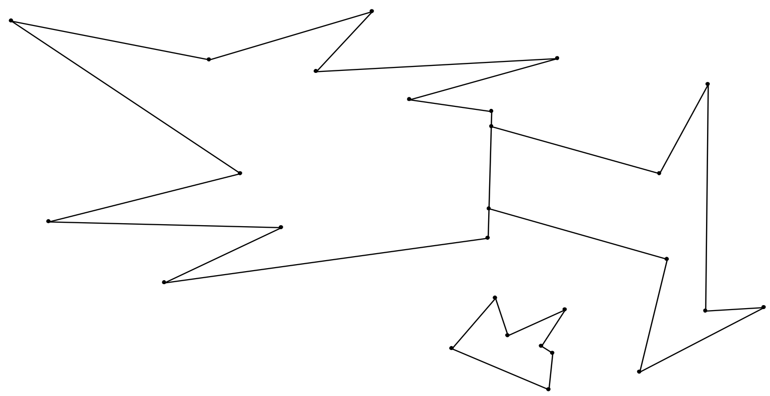


Fig. 3.10

__Øvelse 3.21.__
Vis ud fra de ovenstående aksiomer, at en vilkårlig trekant har et areal, og at arealet kan udregnes som $\frac{1}{2} \cdot g \cdot h$, hvor g er længden af grundlinien og h er længden af højden. ♥

__**Sætning 3.22.**__
Ethvert polygonområde har et areal, idet polygonområdet kan inddeles i et endeligt antal trekanter. Arealet af polygonområdet er summen af arealerne for disse trekanter.

Bevis:
Da et polygonområde består af endeligt mange generelle polygoner, er det nok at se på én generel polygon. Da denne ifølge sin definition er sammenhængende, aflukket og afgrænset af et endeligt antal liniestykker, som ikke skærer hinanden, kan den på naturlig måde opdeles i trekanter som vist på figur 3.11. (Et stringent, generelt bevis for denne påstand er relativt besværligt, og vil blive udeladt her).

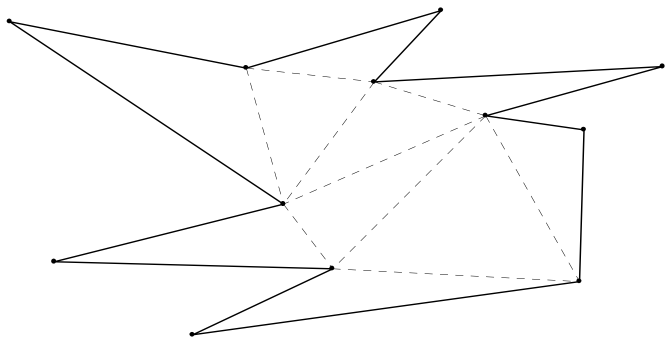


Fig. 3.11

Ifølge aksiom 6 og øvelse 3.21 ser vi nu, at sætningen er bevist. ♥

Definition 3.23.
a) Et polygonområde P_i siges at være et *indre polygonområde* for en given punktmængde M, hvis $P_i \subseteq M$
b) Et polygonområde P_y siges at være et *ydre polygonområde* for en given punktmængde M, hvis $M \subseteq P_y$

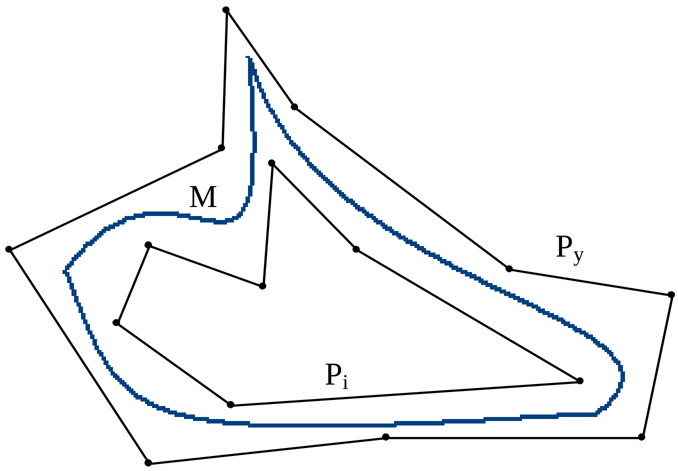


Fig. 3.12

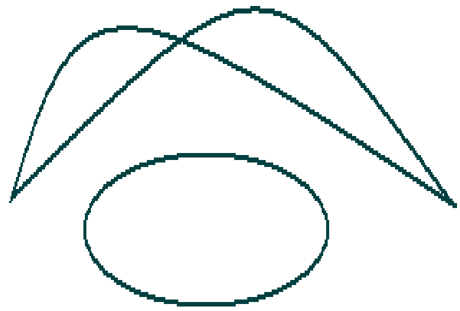


Fig. 3.13

Bemærk, at

- i definition 3.20 c) kan et polygonområde godt bestå af kun én polygon !
- da vi har defineret den tømme mængde til at være en polygon, så har alle punktmængder M et indre polygonområde.
- en forudsætning for, at en punktmængde M har et ydre polygonområde er, at M er begrænset i sin udstrækning, idet dette gælder om ethvert polygonområde.
- når vi har valgt at arbejde med et polygonområde – og ikke bare en polygon –, så skyldes det ønsket om at kunne tage højde for punktmængder som den på figur 3.13 viste.

Det er klart, at hvis P_i er et *indre polygonområde* for en given punktmængde M, og hvis P_y er et *ydre polygonområde* for M, så gælder der, at $A(P_i) \le A(P_y)$.
På samme måde som ved sætning 3.4 kan vi argumentere for, at der for en givet punktmængde M findes mindst ét tal A, som adskiller mængden af arealer af indre polygonområder og mængden af arealer af ydre polygonområder for M.

Vi giver nu følgende definition:

Definition 3.24.
En begrænset punktmængde M siges at have et areal, hvis der for ethvert $\varepsilon > 0$ findes et indre polygonområde P_i og et ydre polygonområde P_y for M, så $A(P_y) - A(P_i) < \varepsilon$.

Øvelse 3.25.
Argumenter for, at punktmængden M under grafen for f fra eksempel 3.5 ikke har et areal. ♥

Efter præcis samme princip som i beviset for sætning 3.6 kan følgende sætning 3.26 bevises:

<u>Sætning 3.26.</u>
Lad M være en begrænset punktmængde i planen. Da er følgende to udsagn ensbetydende:
1) Der findes netop ét tal A, der adskiller mængden af arealer af indre polygonområder og mængden af arealer af ydre polygonområder for M.
2) For ethvert $\varepsilon > 0$ findes et indre polygonområde P_i og et ydre polygonområde P_y for M, så $A(P_y) - A(P_i) < \varepsilon$.

På baggrund af sætning 3.26 og definition 3.24 gives endelig følgende definition:

<u>Definition 3.27.</u>
Hvis en punktmængde M har et areal, så sættes værdien af arealet af M , dvs. A(M), lig med værdien af det tal, der adskiller mængden af arealer af indre polygonområder og mængden af arealer af ydre polygonområder for M.

Vi vil nu anvende dette arealbegreb i forbindelse med punktmængder under, over eller imellem grafer for funktioner.

<u>Sætning 3.28.</u>
Lad f være en positiv, integrabel funktion defineret i intervallet $[a;b]$. Da gælder, at
a) punktmængden M = $\{(x,y) \,|\, a \le x \le b \wedge 0 \le y \le f(x)\}$ har et areal
b) arealet A(M) er givet ved: $A(M) = \int_a^b f(x)dx$

Bevis:
<u>Ad a):</u> At f er positiv betyder ifølge definition 1.1.3, at $f(x) \ge 0$ for alle $x \in [a;b]$. Punktmængden M er derfor veldefineret (se nedenstående figur 3.14 b))
Ifølge definition 3.24 skal vi vise, at der for ethvert $\varepsilon > 0$ findes et indre polygonområde P_i og et ydre polygonområde P_y for M, så $A(P_y) - A(P_i) < \varepsilon$.

Lad derfor $\varepsilon > 0$ være vilkårligt valgt, og herefter fastholdt.
At f er integrabel betyder ifølge sætning 3.9 a), at der for ethvert $\varepsilon > 0$ findes en undersum s og en oversum S for f i $[a;b]$, så $S - s < \varepsilon$.

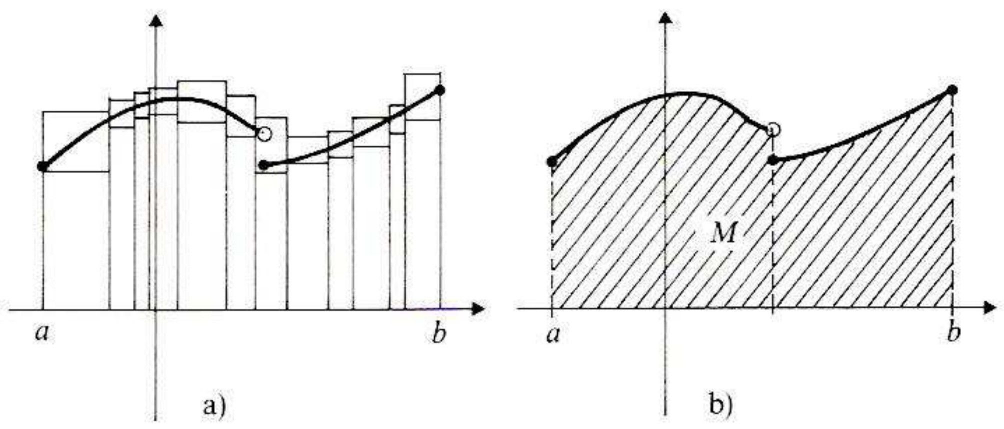


Fig. 3.14

Da f er positiv kan vi sikre, at alle led i undersummen s er ikke-negative (overvej, se figur 3.14 a)), og afstanden mellem S og s bliver kun mindre heraf.
Da oversummen S og undersummen s hermed er arealet af hhv. et ydre polygonområde og et indre polygonområde for M (se figur 3.14 a)), er første del af sætningen hermed bevist.

Ad b): Hvis s er en undersum og S er en oversum for f i intervallet $[a;b]$, så har vi (se figur 3.14 a)), at $s \le A(M) \le S$, hvor A(M) er arealet af punktmængden M. Vi ser altså, at uanset hvilken undersum s og hvilken oversum S vi betragter, så er tallet A(M) "spærret inde" imellem s og S. Ifølge integrabiliteten af f (jfr. definition 3.8) gør dette sig også gældende for tallet $\int_a^b f(x)dx$, og da der kun er ét tal, der adskiller undersummerne og oversummerne ser vi, at: $A(M) = \int_a^b f(x)dx$

Hermed er sætningen bevist. ♥

Vi er hermed i en situation, der svarer til sætning 1.5.5, idet det om funktionen f hér forudsættes, at f er positiv og integrabel.
Og vi kan herefter på samme måde som i sætning 1.5.9, 1.5.11 og 1.6.5 arbejde med arealer i forbindelse med integrable funktioner, som er negative eller som både antager positive og negative værdier, samt med arealer imellem to integrable funktioner.

Vi stopper arbejdet med den teoretiske tilgang til det bestemte integrale her, hvor de basale sætninger i kapitel 1 også er vist på baggrund af integrabilitetsbegrebet.

Opmærksomheden henledes på appendix 8, hvor det teoretiske grundlag for logaritmefunktioner og deres egenskaber bevises på baggrund af bl.a. integrabilitetsbegrebet.