

Steen Bentzen

Matematik for Gymnasiet

Integralregning.

Teori, anvendelser og modeller

Indholdsfortegnelse

Forord	s. 2
Kap. 1: Integralregning byggende på stamfunktioner	s. 3
1.1. Specielle egenskaber ved funktioner	s. 3
1.2. Stamfunktioner	s. 5
1.3. Ubestemte integraler	s. 7
1.4. Regneregler for ubestemte integraler	s. 9
Delvis integration	s. 10
Integration ved substitution	s. 11
Specielle forhold ved og specielle udregninger af ubestemte integraler ...	s. 12
1.5. Arealer og bestemte integraler	s. 14
Stykkevis kontinuerte funktioner	s. 20
1.6. Regneregler for bestemte integraler	s. 24
Delvis integration for bestemte integraler	s. 26
Integration ved substitution for bestemte integraler	s. 27
Integration ved omvendt substitution for bestemte integraler	s. 29
Stykkevis kontinuerte funktioner og regneregler for integraler	s. 32
1.7 Uegentlige integraler	s. 33
Kap. 2: Modeller og specielle anvendelser af integralregning	s. 35
2.1. Middelsummer	s. 35
Arealers betydning	s. 35
Middelsum	s. 37
Numerisk integration	s. 38
Middelværdi af funktion	s. 40
Rumfanget af et omdrejningslegeme	s. 43
Længden af en kurve	s. 45
Overfladearealet af et omdrejningslegeme	s. 48
2.2. Modeller	s. 50
Nogle eksempler fra fysik	s. 51
Nogle eksempler fra økonomi	s. 57
Kap. 3: En teoretisk tilgang til bestemte integraler	s. 61
Appendices	s. 81
Appendix 1: Logistisk vækst og integralregning	s. 81
Appendix 2: Udregning af et bestemt integrale på grafregneren TI-83/TI-84	s. 83
Appendix 3: Summationstegn	s. 84
Appendix 4: Rumfangsbestemmelse af omdrejningssymmetrisk beholder	s. 85
Appendix 5: Afstandskvadratloven	s. 87
Appendix 6: Grundæggende erhvervsøkonomiske emner og modeller	s. 90
Appendix 7: Nogle egenskaber ved reelle tal	s. 100
Appendix 8: Den basale teori for logaritmefunktioner	s. 103
Opgavesamling	s. 106
Stikordsregister	s. 116

Forord.

Formålet med denne bog er at

- præsentere en sammenhængende beskrivelse af integralregning på gymnasialt niveau byggende på begrebet stamfunktion
- give en række eksempler på anvendelser og matematiske modeller hvori integration indgår
- give en teoretisk funderet tilgang til bestemte integraler byggende på begrebet integrabilitet.

Bogens indhold og opbygning afspejler direkte dette formål – jfr. indholdsfortegnelsen. Men det bør fremhæves, at bogens struktur desuden bevirker, at læseren kan nøjes med at søge et eller to af de omtalte formål realiseret, hvis det ønskes.

I kapitel 1 er integralbegrebet behandlet relativt teoretisk. Det ubestemte integral er opbygget på stamfunktionsbegrebet, og det bestemte integral er desuden opbygget på arealbegrebet.

I kapitel 2 gives der forskellige eksempler på anvendelse af integraler og modeller med integration.

I kapitel 3 gives en mere ”kontant” teoretisk tilgang til emnet – byggende på diverse summer, på begrebet integrabilitet, og på en teoretisk definition af arealbegrebet. Dette kapitel er for de særligt interesserede, herunder eventuelle projektopgaveskrivere o.lign.

Det forudsættes, at læseren bl.a. har et indgående kendskab til begreberne: funktioner, kontinuitet og differentiability, herunder til funktionerne: $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$, $\ln(x)$, $\log_c(x)$, a^x , e^x og x^r .

Bogen er beregnet til undervisning i matematik på gymnasialt niveau, men bogen kan også anvendes på første studieår på en række matematisk orienterede studier.

Bogens indhold og struktur gør den desuden oplagt at bruge i tværfagligt samarbejde og i projekter med specielt fysik og erhvervsøkonomi.

Eksempler, øvelser og beviser i teksten afsluttes med tegnet: ♥

Der er 8 appendices til bogen, som på forskellig vis udbygger eller udgør fundamentet for bogen. Disse læses naturligvis kun i det omfang, det skønnes relevant.

Læseren, der blot skal introduceres til/orienteres om emnerne i appendix 6 om økonomiske modeller, kan springe samtlige eksempler og øvelser over – og også de to indrammede matematiske modelbeskrivelser af afsætningsfunktioner og tilhørende omsætningsfunktioner –, og blot læse selve teksten.

Der er i teksten ikke gjort noget særligt ud af anvendelse af grafregnere og PC-programmer. TI-83/84 er dog kort omtalt i appendix 2, hvorimod PC-programmerne overlades til læseren.

Der er en omfattende opgavesamling til kapitel 1 og afsnit 2.1, hvorimod der ikke er egentlige opgaver, men dog naturligvis indlæringsøvelser, til afsnit 2.2 og kapitel 3.

På indersiden af omslagets bagside er der anført en tabel med nogle udvalgte funktioners differentialkvotienter og stamfunktioner.

Herning, September 2007
Steen Bentzen