

Steen Bentzen

Matematik for Gymnasiet

**Grænseværdi,
kontinuitet og
differentiabilitet**

Indholdsfortegnelse

Forord	s. 2
Kap. 1: Nogle nødvendige begreber	s. 3
Kvantorer	s. 3
Omegne	s. 5
Kap. 2: Grænseværdi for funktion	s. 7
Kap. 3: Kontinuitet	s. 19
Nogle egenskaber ved kontinuerte funktioner og deres grafer	s. 27
Kap. 4: Differentiabilitet 1	s. 31
Differentiabilitet og differentialkvotient	s. 31
Tangent	s. 40
Afledede funktioner	s. 42
Kap. 5: Regneregler for differentiation	s. 45
Differentiation af $f + g$, $f - g$, $k \cdot f$ og $f + k$	s. 45
Differentiation af produkt og brøk af funktioner	s. 47
Differentiation af sammensatte funktioner	s. 51
Differentiation af omvendte funktioner	s. 55
Kap. 6: Middelværdisætningen, monotoniforhold og optimering ..	s. 58
Monotoniforhold for og optimering af differentiable funktioner	s. 64
Kap. 7: Differentiabilitet 2	s. 72
Differentiationsmetoder og notation	s. 72
Differentiation fra højre og fra venstre. Halvtangenter	s. 75
Krumning af grafer	s. 79
Differentialer	s. 83
Stamfunktioner	s. 86
Kap. 8: Lidt om grænsebetragtinger, asymptotiske forhold og funktionsundersøgelse	s. 90
$f(x)$ for x gående mod $x_0 \notin \text{Dm}(f)$	s. 90
$f(x)$ for x gående mod uendelig eller minus uendelig	s. 93
Asymptoter	s. 98
Funktionsundersøgelse	s. 100
Kap. 9: Nogle matematiske modeller	s. 103
Appendices	s. 120
Appendix 1: Nogle egenskaber ved reelle tal	s. 120

Appendix 2: Regneregler for grænseværdier. Beviser	s. 125
Appendix 3: Sammensatte og omvendte funktioner	s. 132
Appendix 4: Beviser for sætninger om kontinuerte funktioner	s. 139
Appendix 5: Lokale og globale extrema	s. 145
Appendix 6: Differentiation af specialfunktioner	s. 147

Opgavesamling	s. 151
Stikordsregister	s. 168

Forord.

Formålet med denne bog er at

- præsentere en sammenhængende, matematisk velfunderet beskrivelse af emnerne grænseværdi, kontinuitet og differentiability
- præsentere og bevise en række matematiske anvendelser af disse emner (f.eks. monotoni-forhold, krumningsforhold og asymptotiske forhold for funktioner)
- give nogle få eksempler på modeller, hvori disse begreber anvendes

Og dette formål søges nået uden at læseren har kendskab til specialfunktioner som: $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$, $\ln(x)$, $\log_c(x)$, a^x , e^x og x^t (altså trigonometriske, logaritmiske, eksponentielle og potentielle funktioner). Bogen kan altså læses inden man beskæftiger sig med disse funktioner.

Dette har dog den konsekvens, at mængden af interessante, dybtgående modeller er begrænset.

Bogens titel, indhold og opbygning afspejler naturligvis dette formål – jfr. indholdsfortegnelsen. Det er bogens ambition at alle omtalte sætninger bevises – og dette kan man afhængig af tempera-ment og indlæringsituation udelade helt eller delvist.

Bogen har 6 appendices. Det anbefales kraftigt, at Appendix 1, der beskriver fundamentale egen-skaber ved de reelle tal, læses under alle omstændigheder – for at give en bedre fornemmelse af begreberne grænseværdi, kontinuitet og differentiability. Appendix 2 og 4 indeholder nogle af de mere komplicerede matematiske beviser, medens Appendix 3 og 5 er beregnet på at give det be-grebsmæssige fundament for læsere, der ikke har forhåndskendskab til emnerne heri.

Endelig er Appendix 6 beregnet på at give interesserede læsere en kort oversigt over differentiation af de ovenfor omtalte specialfunktioner – dog anført uden definitioner og beviser.

Der er en omfattende opgavesamling til kapitel 4-9, hvorimod der ikke er egentlige opgaver, men dog naturligvis indlæringsøvelser, til kapitel 1-3.

Eksempler, øvelser og beviser i teksten afsluttes med tegnet: ♥

Der er i teksten ikke gjort ret meget ud af anvendelse af grafregnere og PC-programmer, idet formå-let med denne bog bl.a. også er at give det teoretiske fundament og dermed en dybere forståelse for en del af de emner, der undertiden behandles maskinelt.

Bogen er beregnet til undervisning i matematik på gymnasialt niveau, men den kan også anvendes på første studieår på en række matematisk orienterede studier.

Herning, August 2010
Steen Bentzen